90

עומר

אינפי - תרגיל 6

24 בנובמבר 2013

אבי גרשוני -ת.ז 200290724

מתרגל - אוהד

0.1 שאלה 1

תהי $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$

0.1.1 סעיף א.

נכון.

על פי ההגדרה טענה על סדרה נכונה כמעט תמיד אם קיים N כך שלכל $n > N$ הטענה נכונה תמיד,
נסיק: אם $P_1(n)$ נכונה כמעט תמיד קיימת N_1 שעבור $n > N_1$ הטענה נכונה תמיד.
אם $P_2(n)$ נכונה כמעט תמיד קיימת N_2 שעבור $n > N_2$ הטענה נכונה תמיד.
לכן עבור $max(N_1, N_2)$ נקבל כי $P(n)$ הטענה נכונה תמיד.

0.1.2 סעיף ב

לא נכון.

על פי ההגדרה טענה על סדרה מתקיימת באופן שכיח אם לכל N קיים $n > N$ שעבורה הטענה נכונה,
נסיק: אם $P_1(n)$ מתקיימת באופן שכיח לכל N קיימת $n_1 > N$ שעבורה הטענה נכונה.
אם $P_2(n)$ מתקיימת באופן שכיח לכל N קיימת $n_2 > N$ שעבורה הטענה נכונה.
אך יכול להיות ש n_1 לא מקיימת את $P_2(n)$ ולהפך.
דוגמא:
$P_1(n)$ - כל המספרים הזוגיים.
$P_2(n)$ - כל המספרים האי-זוגיים.
שתי הטענות נכונות אך לא קיימת n שמקיימת את שניהם, ולכן שניהם יחד אינם נכונים תמיד.

0.2 שאלה 2

0.2.1 לא נכון

דוגמא נגדית:
$a_n = (-1)^n$
כיון ש'קיים אפסילון' נבחר $\varepsilon = max(| 2 - L |, | -2 - L |)$
בסדרה זו $a_n = 1$ לכל n זוגי, ו $a_n = -1$ לכל n אי-זוגי
לכן לכל n זוגי:

$$| 1 - L | < \varepsilon \Rightarrow | a_n - L | < \varepsilon$$

ולכל n אי- זוגי:

$$| -1 - L | < \varepsilon \Rightarrow | a_n - L | < \varepsilon$$

א"כ התנאי יתקיים, אך הסדרה אינה מתכנסת אף פעם.

הוכחה: יהי $L \in \mathbb{R}$ צ"ל שקיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $N \in \mathbb{N}$ קיים $n > N$ ε $|(-1)^n - L| \geq$.
נניח בשלילה שזה לא לכל L
נבחר $\varepsilon = |L|$
צ"ל:

$$|(-1)^n - L| \geq |L|$$

וזה נכון (כאשר $L \geq 0$ אז בכל n זוגית המשפט נכון, וכאשר $L < 0$ אז בכל n אי-זוגית המשפט נכון).

0.2.2 נכון

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$ צ"ל שקיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ ε $|a_n - L| <$.
על פי הנתון קיים N' כך שלכל $\varepsilon > 0$ ולכל $n' > N'$ ε $|a_n - L| <$.
נגדיר את ה $N' = N$ וממילא לכל $n > N$ ε $|a_n - L| <$.

0.2.3 נכון

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$ צ"ל שקיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ ε $|a_n - L| <$.
כיון שאנו יודעים ש $b_n \longrightarrow 0$ אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ ε $|a_n - L| = |b_n - 0| <$
לכן לכל $\varepsilon > 0$ נבחר את ה N המקיים את התנאי לאותו ε בסדרה b_n והוא יקיים זאת גם ל a_n.

0.2.4 נכון

ע"פ ההגדרה בשאלה לכל $u < L < v$ אז $u < a_n < v$ כמעט תמיד, ז"א שקיים $N \in \mathbb{N}$ שעבור כל $n > N$ הטענה תהיה נכונה תמיד.
ע"פ הגדרת גבול: לכל $\varepsilon > 0$ צ"ל שקיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ ε $|a_n - L| <$
נבחר $u = L - \frac{\varepsilon}{2},\ v = L + \frac{\varepsilon}{2}$.
ונבחר את $N \in \mathbb{N}$ שממנה והלאה הטענה עבור a_n נכונה תמיד.
ויתקיים

$$u < a_n < v = L - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < L + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} < a_n - L < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

0.3 שאלה 3

0.3.1 סעיף א

לא נכון.
הראינו בשבוע שעבר ובכיתה כי $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ אך לעולם לא יהיה שווה אפס,
ולכן $\frac{1}{n} \in (0,2)$ אך $L = 0 \notin (0,2)$

0.3.2 סעיף ב

נכון.
הראנו כי כאשר הסדרה חסומה עולה הגבול שלה הוא $lim\, a_n = sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
וכאשר סדרה חסומה יורדת הגבול שלה הוא $lim\, a_n = inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
ולכן אם $a_n \in [c,d]$ אזי גם החסם שלה נמצא בתוך הקטע (ע"פ הגדרות חסם עליון ותחתון), ולכן גם הגבול שלה שייך אליו.

0.3.3 סעיף ג

נכון.
נניח בשלילה כי $L \notin \mathbb{Z}$:
לכן $L \neq [L]$
וקיים $[L] < L < [L] + 1$
נבחר
ע"פ ההגדרה לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ ε $|a_n - L| <$
נקח $\varepsilon = min(L - [L], [L] + 1 - L)$

עדיף להשתמש ב
\min, \lim, \sup
וכו', זה נראה
יפה יותר :)

$$-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \Rightarrow [L] - L < a_n - L < [L] + 1 - L$$

יפה!

$$[L] < a_n < [L] + 1$$

נסיק כי $a_n \notin \mathbb{Z}$ וקבלנו סתירה.

0.4 שאלה 4

0.4.1 סעיף א

אנו יודעים כי הסדרה $\frac{1}{n} \to 0$.
$a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{n!}{n^{n-1}} = \frac{n!}{n^n}$
וע"פ ארתמטיקה הגבול של שני סדרות כאשר אחת שואפת לאפס שואף לאפס.
לכן $a_n \to 0$

0.4.2 סעיף ב

$$a_n = \frac{2n^5 - n^3 + 10}{3n^5 - 5n^4 + 8n^2 + n} = \frac{\frac{2n^5}{n^5} - \frac{n^3}{n^5} + \frac{10}{n^5}}{\frac{3n^5}{n^5} - \frac{5n^4}{n^5} + \frac{8n^2}{n^5} + \frac{n}{n^5}} = \frac{\frac{2}{1} - \frac{1}{n^2} + \frac{10}{n^5}}{\frac{3}{1} - \frac{5}{n} + \frac{8}{n^3} + \frac{1}{n^4}} \Rightarrow$$

אנו יודעים כי לכל $x \in \mathbb{R}$ $p \in \mathbb{P}$ $\frac{x}{n^p} \to 0$ נסיק ע"פ ארתמטיקה של הגבולות:

$$\Rightarrow \frac{\frac{2}{1} - 0 + 0}{\frac{3}{1} - 0 + 0 + 0} = \frac{2}{3}$$

לכן $a_n \to \frac{2}{3}$

0.4.3 סעיף ג

אנו יודעים כי הסדרה $\frac{1}{n} \to 0$.
$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$
ניתן לראות כי

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n}}} = \frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2}}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{n}{n} = 1$$

ע"פ ארתמטיקה $\frac{1}{n} \to 0$ ולכן: $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \to 1$

$$1 =< \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} < 1$$

וע"פ משפט הסנדביץ' הגבול הוא אחד.
$a_n \to 1$

0.4.4 סעיף ד

$a_n = \frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{n}$
הוכחנו בתרגיל בשבוע שעבר כי הסדרה $\sqrt[n]{n} \to 1$.
וכן הסדרה $\frac{1}{n} \to 0$.
ע"פ ארתמטיקה הגבול a:

$$a = 0 \cdot 1 = 0$$

לכן:
$a_n \to 0$

0.4.5 סעיף ה

אנו יודעים ע"פ ארכימדיות כי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש $N > \frac{1}{(1-0.999999)} \Leftarrow 1 < N(1-0.999999) \Leftarrow 0.999999 + \frac{1}{N} < 1$
לכן לכל $n > N$ המספר $(0.999999 + \frac{1}{n}) < 1$
נסיק מכך: $\frac{1}{n} < 0.000009$
ולכן

$$0 < (0.99999 + \frac{1}{n}) < (0.999999)$$

וממילא:

$$0 < (0.99999 + \frac{1}{n})^n < (0.999999)^n$$

וע"פ מה שהוכח בהרצאה אם בין שני סדרות השואפות לגבול מסויים קיימת סדרה. גם היא תשאף לאותו גבול. $a^n \to$
$0 \Leftarrow 0 < a < 0$
נסיק ע"פ משפט הסנדביץ' כי הגבול הינו אפס.
ולכן:
$a_n \to 0$

0.5 שאלה 5

0.5.1 סעיף א

נכון
יהי $a_n \longrightarrow a$ וכן $(a_n + b_n) \longrightarrow L$
ע"פ ארתימטיקה אנו יודעים כי $q_n - p_n \longrightarrow q - p$,
ולכן $(a_n + b_n) - a_n \longrightarrow L - a \Rightarrow b_n \longrightarrow L - a$

0.5.2 סעיף ב

לא נכון. דוגמא נגדית.
$a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ אך $b_n = n$ ולא מתכנס.
ואילו הכפל שלהם מתכנס: $a_n b_n = \frac{n}{n} = 1 \longrightarrow 1$.

0.5.3 סעיף ג

לא נכון.
$a_n = n^{\frac{(-1)^n - 1}{2}}$
איננה מתכנסת, ב n זוגי שווה לאחד, וב n אי זוגי שווה $\frac{1}{n}$.
$b_n = n^{\frac{(-1)^{n+1} - 1}{2}}$
איננה מתכנסת, ב n אי זוגי שווה לאחד, וב n זוגי שווה $\frac{1}{n}$.

$$a_n = n^{\frac{(-1)^n - 1}{2}} \quad b_n = n^{\frac{(-1)^{n+1} - 1}{2}} \Rightarrow a_n b_n = n^{\frac{(-1)^n + (-1)^{n+1} - 2}{2}} = n^{-1} \longrightarrow 0$$

הכפל של שתי הסדרות שואף לאפס, אך שתיהן אינן מתכנסות.

0.5.4 סעיף ד

עדיף

$0 \leq a_n \leq a_n + b_n$

אז

וסנדוויץ'.

נכון.

יהי $(a_n+b_n)^2 \longrightarrow 0$ אזי: $(a_n+b_n)^2 = a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2 \longrightarrow 0$ ו

טענת עזר:

אם $a_n^2 \longrightarrow 0$ אזי גם $a_n \longrightarrow 0$.

הוכחה:

ע"פ ההגדרה לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ $\mid a_n^2 \mid < \varepsilon$

כיון ש $\varepsilon > 0 \Leftarrow \varepsilon^2 > 0 \Leftarrow$ ולכן: $a_n^2 < \varepsilon^2 \Leftarrow \mid a_n \mid < \varepsilon$

נחזור להוכחה הנדרשת:

ע"פ מה שהוכח בסעיף א וכיון שאנו יודעים כי כל הסדרות חיוביות:

$a_n^2, b_n^2 > 0$ מכאן שאם הם אינן שואפות לאפס החיבור שלהם גם כן לא ישאף לאפס.

נסיק כי $a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2 \longrightarrow 0 \Leftarrow a_n^2, b_n^2 \longrightarrow 0$

וע"פ טענת העזר $a_n, b_n \longrightarrow 0$

0.5.5 סעיף ה

נכון.

$a_n \to 0$

נסיק ע"פ אריתמטיקה: $a_n^n = a_n^{n-1}a_n \to a_n^{n-1} \cdot 0 \to 0$ כפל של סדרה כל שהיא בסדרה אפסה שואף לאפס.

0.5.6 סעיף ו

כאשר $a = 0$ הוכחתי בסעיף (ד) בטענת עזר:

הוכחה:

כיון ש $\varepsilon > 0 \Leftarrow \varepsilon^2 > 0$ ולכן קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ $\mid a_n \mid < \varepsilon^2 \Leftarrow \mid \sqrt{a_n} \mid < \varepsilon$

(כמובן שאנו מתעסקים רק בסדרות חיוביות)

.

כאשר $a > 0$:

ע"פ ההגדרה לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ $\mid a_n - a \mid < \varepsilon$

אנו יודעים כי $a_n - a \neq 0$

נגדיר $M = \mid \frac{1}{\sqrt{a_n} - \sqrt{a}} \mid$ אנו יודעים כי לכל εM קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ $a_n - a < \mid \varepsilon M \mid$

ה ε אסור להיות תלוי בn!

$$\mid a_n - a \mid < \varepsilon M \Rightarrow -\varepsilon M < (\sqrt{a_n} - \sqrt{a})(\sqrt{a_n} - \sqrt{a}) < \varepsilon M$$

ובכלל מאיפה n-M ניתן לכל ε. אז הולך εM?

$$-\varepsilon \mid \frac{1}{\sqrt{a_n} - \sqrt{a}} \mid < (\sqrt{a_n} - \sqrt{a})(\sqrt{a_n} - \sqrt{a}) < \varepsilon \mid \frac{1}{\sqrt{a_n} - \sqrt{a}} \mid$$

נכפיל ב M^{-1} ונצמצם:

$$-\varepsilon < (\sqrt{a_n} - \sqrt{a}) < \varepsilon$$

רק ה הוכחה במוכן.

■