

האינדוקציה המתמטית במשנה ובתלמוד

גדעון ארליך

מבוא

בכדי להבין את טיבו של עקרון האינדוקציה המתמטית נדון תחילה בבעיות הלקוחות לכאורה, מחיי היום יום.

פקח רוצה להוכיח שכל הפרות ברפת מסוימת חולות במחלת הפה והטלפים. שיטה פשוטה להוכחת טענתו היא בדיקת כל אחת מהפרות וקבלת תוצאה חיובית לגבי כל פרה. שיטה זו מתאימה לכל רפת מצויה ויהיה מספר הפרות בה רב ככל שיהיה.

נניח עתה כי הפקח הגיע לרפת מיוחדת במינה: רפת בה מסודרות הפרות החל מהפרה הראשונה והלאה בשורה ישרה ארוכה לאין סוף, לכל פרה קימת פרה שכנה הנמצאת מיד אחריה. מובן כי בדיקת פרה אורכת לפחות זמן מינימלי מסוים וע"כ השיטה הקודמת אינה מתאימה למקרה הנוכחי. אם אומנם כל הפרות חולות ואם הפקח יבדוק אותן לפי סדרן אזי לגבי כל פרה יגיע רגע בו ידע הפקח כי היא חולה אך לעולם לא ידע שכולן חולות.

פקח פיקח יוכל להשיג את מבוקשו בדרך אחרת: הוא יוכיח כי מחלת הפה והטלפים היא מחלה מדבקת, ובנוסף לכך יוכיח למשל על ידי בדיקה כי הפרה הראשונה חולה. ברור כי המחלה מתפשטת מהפרה הראשונה אל כל הפרות בתהליך הדבקה שאינו דורש זמן וע"כ כל הפרות חולות.

ההיסק שמשתי ההנחות מחלת הראשונה ותכונת ההדבקה נובע שכל הפרות חולות אינו נובע ואינו נסתר על ידי תורת ההגיון האריסטוטלית. היסק זה אם מכלילים אותו לכל המקרים הדומים מייצג את עקרון האינדוקציה המתמטית.

ללא שימוש בעקרון האינדוקציה נוכל להוכיח כי הפרה השלישית חולה. שהרי מכך שהראשונה חולה ושהמחלה מדבקת נובע שהשנייה חולה ומכך שהשנייה חולה והמחלה מדבקת נובע שהשלישית חולה. נוכל גם להוכיח כי הפרה ה-100 חולה אך לא נוכל להוכיח כי כולן חולות.

עקרון האינדוקציה המתמטית

אם קבוצה:

- א. מכילה את המספר 1. וגם
 - ב. לכל מספר טבעי N אם N שייך לקבוצה אזי גם העוקב ל- N שייך לקבוצה.
- אזי הקבוצה מכילה את כל המספרים הטבעיים.

עקרון זה משמש במערכת אכסיומות-פיאנו כחלק מהגדרת המספרים הטבעיים. ניסוח שקול לנוסח ה"נ"ל הוא הניסוח הבא:

תהי P תכונה המוגדרת לגבי איברי הסדרה: a_1, a_2, a_3, \dots אזי אם:

- א. $P(a_1)$, וגם
- ב. לכל $k: P(a_k) \rightarrow P(a_{k+1})$ גורר
- אזי לכל $n: P(a_n)$.

התכונה P בדוגמת הפרות היא: לחלות במחלת הפה והטלפים.

טענה א היא: : הפרה הראשונה חולה.
 טענה ב היא : המחלה מדבקת ("לכיוון מעלה" — כל פרה חולה מדביקה את זו שאחריה)

המסקנה : כל הפרות חולות.

Maurolico ידוע כראשון שניסח את עקרון האינדוקציה, אחריו ניסח אותו גם Pascal. מאמר זה דוגמת [2] ו[3] אינו טוען שהעיקרון נוסח לפני Maurolico אלא בא להצביע על מקורות הקודמים לאלו הידועים בהם ניתנו הוכחות באינדוקציה. על ההיסטוריה של האינדוקציה המתמטית ראה: D. Knuth: The Art of Programming חלק 1 עמוד 17. וכן ההפניות למאמרים שבסוף המאמר וההפניות שבהם.

יש שניסו למצוא רמזים לחשיבה אינדוקטיבית במשפטו של אוקלידס על כך שאין מספר המונה את הראשוניים, ראה למשל [4], אך עיון באוקלידס מראה מיד שאין שם שום רמז לאינדוקציה וההוכחה היא טהרת דרך השלילה. במאמר זה אצביע על מספר מקומות בתלמוד בהן ישנן הוכחות באינדוקציה, או שמגדירים בהם מבנים באינדוקציה. אראה גם כי לומדי הגמרא, שחיו לפני שעקרון זה הוגדר ע"י Maurolico, הבינו היטב את דרך ההוכחה האינדוקטיבית. יתכן ע"כ כי ההוגים האירופים שמעו על עקרון זה מחבריהם היהודים. הדוגמאות שתוכאנה בהמשך תצגנה מקרים בהן מוגדרות סדרות באינדוקציה וכן טיעונים המוכחים באינדוקציה.

הדוגמאות המובאות במאמר זה הן:

1: צרת-הצרה. 2: עדים זוממים. 3: האחיות שקמו לתחיה. 4: המשכיר פרה. 5: מעגל קדימויות. 6: חומש שנעשה קרן. 7: סדרת הנזירים. 8: סדרת הנאסרים כהנאה. 9: סדרת המשקים הטמאים. 10: הצבת הראשונה. 11: שרשרת חברים. 12: רכושנות ללא גבול. 13: פירות הפירות. 14: שרשרת ולדות. 15: מקרה בו אין להפעיל אינדוקציה. 16: שתיית יין ללא סוף. 17: כל הבשר אסור. 18: שרשרת הדורות.

בדוגמא 1. יש התייחסות אל דרך ההוכחה במילים "סברא היא". הוכחות נזכרות גם בדוגמאות 16, 6. בדוגמא 16 קיימת הבחנה בין הוכחת קיום תכונת-המעבר מכל N ל- $N+1$ לבין המסקנה שלכל N $P(N)$.

בדוגמא 2 מובאת סדרה של סדרות סופיות כאשר הדין של האיבר ה- K בסדרה ה- N (K) $F(N, K)$ הפוך הן מ- $F(N, K-1)$ והן מ- $F(N-1, K)$. גם בדוגמא 3 יש דין אחד לאיברים הזוגיים ודין הפוך לפרדיים.

1. צרת-הצרה

משנה יבמות פרק א'

חמש עשרה נשים פוטרות צרותיהן וצרות צרותיהן מן החליצה ומן היבום עד סוף העולם: בתו, ובת-בתו, ובת-כנו, בת-אשתו... וכלתו הרי אלה פוטרות צרותיהן וצרות צרותיהן מן החליצה ומן היבום עד סוף העולם.

...כיצד פוטרות צרותיהן. היתה בתו או אחת מכל העריות האלו נשואה לאחיו ולו אשה אחרת, ומתה כשם שבתו פטורה כך צרתה פטורה. הלכה צרת בתו ונשאת לאחיו השני ומת — כשם שצרת בתו פטורה כך צרת צרתה פטורה אפילו הן מאה.

רקע

ניסוח מתומצת של דיני יבום וחליצה מופיעים בתחילת פרוש המשניות לרמב"ם למסכת יבמות וכן בתחילת פרוש קהתי. לעניינינו אזכיר רק כי אם בתו של אדם היתה נשואה לאחיו, והאח מת ללא בנים אזי הבת אסורה לאביה. אם אין לאב אח חי היא פטורה מהחליצה והיבום דהינו: מותרת להנשא לאדם זר ללא יבום או חליצה. אך אם יש לאב אחים חיים היא זקוקה ליבום או לחליצה מאחד מהם.

הסדרה הנדונה במשנה

A_0 : לאיש היתה בת.
 A_0 : דין A_0 : הבת אסורה לאיש.

- A_1 : המקרה הוא A_0 והיה לאיש אח (מס' 1) הבת נישאה לאח זה שהיתה לו אשה נוספת — צרת הבת. האח מת.
- דין A_1 : גם צרת הבת אסורה לאיש, ואם אין אח נוסף אזי גם היא פטורה מחליצה וייבום ורשאית להנשא לאיש זר.
- A_2 : המקרה הוא A_1 , והיה לאיש גם אח מס' 2. צרת הבת נישאה לאחר מס' 2 שהיתה לו אשה נוספת. האח מס' 2 מת.
- דין A_2 : צרת-צרת הבת אסורה לאיש. ואם אין אח נוסף אזי גם היא פטורה מחליצה ומיבום, ורשאית להנשא לאיש זר.
- A_{k+1} : המקרה הוא A_k , והיה לאיש גם אח מס' $k+1$.
- צרת... צרת (k פעמים) הבת נישאה לאח מס' $k+1$ שהיתה לו אשה נוספת. האח מס' $k+1$ מת.
- דין A_{k+1} : צרת צרת... צרת [$(k+1)$ פעמים] הבת אסורה לאיש ואם אין אח נוסף אזי גם היא פטורה מהחליצה ומייבום ורשאית להנשא לזר.

הגדרת A_n לכל n נעשית במשנה ע"י הביטוי "עד סוף העולם" המוחלף בהמשך בכטוי השקול "אפילו הן מאה". המספר 100 במקרה זה משמעו "כל מספר" שמוש כזה שכיח במשנה, ראה למשל יבמות י"א ג' ששם המספר 5 משמש בתפקיד n והמספר 4 בתפקיד $n-1$, אין שם אינדוקציה, והמקרים רבים.

הביטוי "אפילו הן מאה" מונע אפשרות לכאר "עד עולם" כתאור זמן. הביטוי "עד עולם" מונע אפשרות לכאר "אפילו הן מאה" כמתאר את מספר הנשים של האח.

הגירסה היא "אפילו הן" כך מצאתי בצילומי 9 המשניות העתיקות שבדקתי, הן של הבבלי והן של הירושלמי. ומשמעות הביטוי הוא: אפילו צרת צרת... צרת (100 פעמים) הבת. הגירסא שהיתה לפני רש"י (1105—1040). היא "אפילו הם מאה". רש"י מבין שהכוונה היא למספר האחים שבשרשרת, ולשם הבהרה מתאר איבר נוסף בסדרה — את A_3 . שאותו הוא בונה על סמך A_2 וזו לשונו: "ואפילו הם מאה — אחים, והלכה צרת צרתה של בתו ונתייבמה לאחיו השלישי ולו אשה אחרת ומת כלא בנים שתייהן נאסרות על זה, וכן לעולם". המשנה הדגימה את המעבר מ- A_2 ל- A_3 . והסבירה שכאופן דומה אפשר לבנות כל A_k .

הוכחה באינדוקציה

יבמות י"ג ע"א

מנהגי מילי? אמר רב יהודה, דאמר קרא "לצרו" — התורה ריבתה צרות הרבה. רב אשי אמר: סברא היא, צרה מאי טעמא אסירא? דבמקום ערוה קיימא. צרת צרה נמי במקום ערוה קיימא.

תרגום: מהיכן דין זה? אמר רב יהודה, שהתורה אמרה "לצרור" — התורה ריבתה צרות הרכה. רב אשי אמר: סכרא היא, צרה — מה טעם אסורה? שבמקום ערוה היא קיימת. צרת צרה גם היא במקום ערוה קיימת.

רקע

בדף ג' ע"ב נלמד הדין שאחות-האשה (וכן כל חמש עשרה העריות) וגם צרתה אסורות על אדם אם היו שתייהן נשואות לאחיו. הדין נדרש מהמלה "לצרור" (ויקרא י"ח י"ח). בנוסח הגמרא שלפנינו נלמד שם גם הדין של צרת הצרה אך רבנו תם מעיר בתחילת ספרו ספר-הישר ליבמות כי תוספת זו היא שבוש. (ראה אור לישירים על ספר הישר).

הגמרא בדף ג' ע"ב דנה באיסור צרת הבת בלבד ואין חולק על כך שהדין נלמד מהמלה "לצרור". בדף י"ג ע"ב המצוטט לעיל דנים בדין של צרת הצרה וכו'. רבי יהודה (בן יחזקאל, תלמיד מובהק של רב, 299—220) סבור שמהמלה "לצרור" לומדים את הדין של צרתה וצרת-צרתה עד עולם. רב אשי (עורך התלמוד הבבלי 427—352) מסיק את הדין של "צרות הרכה" בדרך הגיונית (אינדוקציה מתמטית): מהפסוק "לצרור" לומדים (בדף ג' ע"ב) כי כשאשת האח היא ערוה אזי הנמצאת אתה באותו סטטוס, דהיינו הנשואה לאותו אדם, גם היא אסורה. דין כל אחת מהחמש עשרה המנויות במשנה זהה לדין הבת: הן אסורות לאיש ולכן אסורות עליו גם את צרותיהן. עכשיו, הצרה, של הבת או של אחת מרשימת החמש עשרה, אסורה לאיש, היא נחשבת לערוה כמו כל אחת מחמש עשרה הנשים, ומהוה מקרה שש עשרה, וכאשר תינשא לאת אחר תאסור את צרתה החדשה דהינו את צרת-הצרה ומכאן (באינדוקציה) עד עולם.

רבנו תם בתחילת ספר הישר מסביר כי לדעת רב יהודה אין להשוות את צרת-הבת לבת עצמה וע"כ אין להסיק ממעבר האיסור מהבת לצרת-הבת, את המעבר מצרת הבת לצרת-צרת הבת. (להבחנה בין הבת לצרת הבת ראה תורת כוהנים ויקרא כא ז: ואשה גרושה, אך ראה תורה תמימה) לדעת רבנו תם רבי יהודה מפעיל את האינדוקציה החל מהאיבר השלישי (איסור צרת הבת זהה לאיסור צרת הצרה וכל צרה נוספת), ואילו רב אשי מפעיל אותה כבר מהאיבר השני.

הסבר שונה נמצא בסוף התוספות בדף ב' ע"א ("עד סוף העולם"). הגירסא בדף ג' ע"ב שפרוש זה מסתמך עליה היא זו שאותה פסל רבנו תם. על פי גרסה זו מוסכם על כולם שמהמלה "לצרור" לומדים גם את דין צרת הבת וגם את דין צרת הצרה. רבי יהודה, לפי פרוש זה, לומד מ"לצרור" צרות הרכה — את כל הסדרה; ואילו רב אשי לומד ממעבר האיסור מהצרה אל צרת הצרה שתמיד האיסור עובר מאשה אל צרתה, כלשונו: קיום תכונת המעבר! (מעמד האיסור של צרת הצרה וכו' זהה לזה של הצרה) ומכאן באינדוקציה לכל הסדרה. פרוש זה מיחס לרב אשי את מה שפרוש רבנו תם מיחס לרבי יהודה. לפי

הסבר זה במלה "לצרור" רומזת התורה כי קימת כאן תכונת המעבר ועלינו להפעיל אינדוקציה.

על פי רבנו תם בספר הישר עלינו להבין את דברי רב אשי "צרה מאי טעמא אסירא" כאומרים "צרה מאיזה טעם נאסרת" ולפי הפרוש האחרון שבתוספות "צרה מאיזה טעם אוסרת". פרוש רבנו תם מצמצם את הבדלי הדעות בין רב יהודה ורב אשי, פרוש התוספות מבסס יותר את מסקנת רב אשי שתכונת המעבר קימת לכל ת.

גירסת כת"י ותיקן 114.

הגירסא שהובאה לעיל זהה בכל כתבי היד העתיקים, פרט לכתב יד ותיקן 114 שבו כתוב: מנהני מילי אמ' רב יהוד אמ' רב לצרור התור ריבת' צרות הרבה רב אשי אמ' צר' צר' לא צרי' קרא קסבר צר' מ' ט אסיר' דבמקו ערוה קיימ' צר' צר' נמי דבמקו' ערוה קימ'.

פיענוח: מנהני מילי? אמר רב יהודה, אמר רב: לצרור, התורה ריבתה צרות הרבה. רב אשי אמר צרת-צרה לא צריך קרא. קסבר צרה מאי טעמא אסירא דבמקום ערוה קיימא. צרה צרה נמי דבמקום ערוה קיימא. על פי גרסה זו רבי יהודה מוסר את דברי רבו רב (נפטר 247). רב אשי חולק על רב, בעל הסמכות הגדולה הנחשב לעתים כאחד התנאים.

2. עדים זוממים

משנה, מכות א' ד'

מעידים אנו את איש פלוני שהרג את הנפש... אמרו להן היאך אתם מעידים שהרי אתם הייתם עמנו באותו היום במקום פלוני, הרי אלו זוממין ונהרגים על פיהם. באו אחרים והזימום, באו אחרים והזימום. אפילו מאה כלם יהרגו.

תוספתא, מכות א'

מעידין אנו באיש פלוני שהרג את הנפש, ובאו אחרים והזימום הנידון כשר (גירסא אחרת: פטור). כת הראשונה חייבת: ובאו אחרים והזימום הנידון חייב, וכת הראשונה פטורה וכת השנייה חייבת. כת אחת נכנסת וכת אחת יוצאת אפילו הן מאה כולן פטורין.

גירסת המאירי (1229—1287): "כולן ידונו". גירסת הרמב"ן (1194—1270): "כולן חייבים".

את התוספתא נוכל לנסח כסדרה של מקרים A:

A₁: באה כת (כת"י) והעידה שאדם רצח.

A₂: הנידון חייב.

- A_1 : A_2 , ובאו אחרים (כת-2) והזימום (את כת-1).
 דין A_2 : הנדון פטור, כת הראשונה חייבת.
 A_2 : A_3 , ובאו אחרים (כת-3) והזימום (את כת-2).
 דין A_3 : הנדון חייב וכת הראשונה פטורה וכת השנייה חייבת.
 A_k : A_{k-1} , ובאו אחרים (כת k) והזימום (את כת k-1).
 דין A_k : נכנה את הנדון בשם כת-0,
 כל הכתות A_j כך שזוגיות j כזוגיות k פטורות.
 וכל הכתות A_j כך שזוגיות j שונה מזוגיות k חייבות.

לפנינו סדרה אין סופית של סדרות סופיות A_k כשבכל סדרה כזו K איברים החל בנדון וכלה בכת $K-1$ שהוזמה ע"י הכת K .

בניסוח סימבולי אוסיף את הסימון הבא: $F_k(i)$ הוא דין K של כת- i כאשר הנדון נקרא למען הכלליות כת-0, ודינו בשלב K יסומן ע"כ בסמל $F_k(0)$. דינה של כל כת הוא פונקציה של שני המשתנים K, i .

דין המקרה A_k נסמן בסימן F_k . פועל על המספרים החל ב-0 וכלה ב- $K-1$.

במקורות אפשר לראות מספר דרכים לבטוי דין הכתות השונות. אין מחלוקת בין הדרכים השונות, אך הן מציגות אפשרויות שונות של הפעלת האינדוקציה.

דרך ראשונה: הגדרת F_k באינדוקציה יורדת מ- $K-1$ אל 1.

"כת אחת נכנסת וכת אחת יוצאה". אין לראות בתאור זה תאור של תנועת כתות העדים בבית דין. תאור תנועה שכזו היה מתרכז רק בהגעת העדים החדשים, למשל: "זו מעידה וזו באה" בדומה לתאור "עודך מדברות שם עם המלך ואני אבוא אחריו ומלאתי את דבריו" מלכים א' א' י"ד. "עוד זה מדבר וזה בא" (איוב א' י"ו י"ז) למעלה מכך אף כדיני ממונות אין מקבלים עדים שלא בפני בעל דין פרט למקרים חריגים. (בבא-קמא ק"ב ע"א ע"ב), וכן הוא נוסח ההזמה במשנה ובברייתא: "היאך אתם מעידין".

מדברות שם עם המלך ואני אבוא אחריו ומלאתי את דבריו" מלכים א' א' י"ד. "עוד זה מדבר וזה בא" (איוב א' י"ו י"ז) למעלה מכך אף כדיני ממונות אין מקבלים עדים שלא בפני בעל דין פרט למקרים חריגים. (בבא-קמא ק"ב ע"א ע"ב), וכן הוא נוסח ההזמה במשנה ובברייתא: "היאך אתם מעידין".

את הבטוי "כת אחת נכנסת וכת אחת יוצאה" יש לפרש על כן בדומה לפסוק "צדיק מצרה נחלץ ויבוא רשע תחתיו" (משלי י"א ח'). וכן במקרה שיידון להלן (בבא מציעא לה ע"ב) בתרגום לעברית: פרה אחת היא נכנסת ויוצאת, יוצאת משכירות ונכנסת לשאלה.

יוצאת משאלה ונכנסת לשכירות. ומעין זה במדרש תהילים קי"ט: אפילו דינו יוצא למיתה, התורה שלמד היא משיבה את נפשו.

במקרה הנרון: הכת k נאמנת, הכת $k-1$ שהיתה זכאית נכנסת לדין מיתה, וכת $k-2$ יוצאת מדין מיתה. כת $k-3$ נכנסת למיתה וכת $k-4$ יוצאה וכו'. נראה שכך הבין הרמב"ם בטוי זה. בהלכות עדות פרק כ' ו' הוא מביא דין התוספתא בסגנון התוספתא כשהוא מוסיף ומפרט גם מקרה נוסף, "באה כת רביעית והזימה את הכת השלישית, תהרג הכת השלישית והראשונה וינצל ראובן והכת השנייה. וכן אפילו הן מאה כת זו מזימה את כת נכנסת וכת יוצאה".

הכת האחרונה באה ראשית לבית הדין ורק אח"כ מזימה את זו שלפניה אך הסדר הכתוב ברמב"ם הוא הפוך. ברור שהרמב"ם כתב את הדברים כסדרם: תחילה את המקרה "זו מזימה את זו" ואח"כ את הדין "כת נכנסת וכת יוצאה": נכנסת למיתה ויוצאה ממיתה.

מקרה A_2 הוא כותב "יהרגו העדים הזוממים וינצל ראובן". ובמקרים A_3, \dots הוא מונה (למען הקיצור או מסיבה שתוכהר בהמשך) בנפרד את החייבים והזכאים. החייבים מסודרים מהסוף להתחלה לפי הסדר הלוגי של קביעת דינם ע"י הכלל "כת נכנסת וכת יוצאה". ולאחר שהוא כתב את סדרת החייבים ברור שהשאר זכאים והם נמנים, כרגיל, בסדר עולה.

אם אמנם זה פרוש הבטוי "כת אחת נכנסת וכת אחת יוצאה" אזי תאור דין A_k ניתן באופן הבא:

$$F_k(i) = \text{not } F_k(i+1)$$

$$F_k(k-1) = \text{מיתה} \quad \text{כאשר}$$

הדרך השנייה: קביעת האיבר הראשון $F_k(0)$ באינדוקציה על K , וקביעת האיברים $F_k(1)$ שבסדרה F_k באינדוקציה על I .

הדרך השנייה היא זו הנרמזת על ידי פרוט המקרים הראשונים. מי שמכיר מקרה A_1 וקורא בברייתא את תאור המקרה A_2 ולאחריו את A_3 יבנה לעצמו לכל k את דין A_k , באינדוקציה, באופן הבא:

$$F_k(0) = \text{not } F_{k-1}(0)$$

$$F_k(i) = \text{not } F_k(i-1)$$

$$F_k(0) = \text{חיים} \quad \text{כאשר כמובן:}$$

הדרך השלישית: קביעת ערך הפונקציה F_k באינדוקציה על K

(לפי נוסח המאירי) "כולם ידונו" דהיינו את כולם יש לדון מחדש

$$F_k = \text{not } F_{k-1}$$

או בפרוט $F_k(i) = \text{not } F_{k-1}(i)$

$$F_k(k) = \text{חיים}$$

כאשר

נוסח הרמב"ן (כפי שהוא בחידושי הרמב"ן) "כולם חייבים" הושפע אולי מנוסח המשנה. ויש לבארו כמופנה כלפי כל אלה שבשלב קודם היו זכאים. וממילא ברור שאם כת j דינה מיתה הרי שעדותה בטלה ועל כן דין כת $j-1$ הוא חיים. אולי נוסח זה היה לפני הרמב"ם וע"כ הוא מנה (הלכות עדות כ' ר') תחילה את החייבים ולאחריהם את הזכאים. בדומה לכך את הבטוי "כולם זכאים" שבנוסחאות צוקרמנדל יש להבין כמופנה כלפי אלה שבשלב הקודם היו חייבים, וממילא עדותם חוזרת ומקבלת תקף וע"כ דין הכת $j-1$ הוא מיתה.

הדרך הרביעית: אינדוקציה לגבי הסדרה כלה בדילוגים.

המאירי עצמו מסביר את הנוסח שלפניו במילים: "כולם ידונו כלומר כל שהזמתן מתאמת על פי האחרונה".

הכת מספר K מבטלת את כת $K-1$ וע"כ:

$$F_k = F_{k-2}$$

כאשר גם כאן יש להגדיר את המקרים האלמנטריים.

רבנו חננאל (1055 — 965) מבאר שהבטוי "באו אחרים והזימום, באו אחרים והזימום אפילו מאה" שכמשנה מתאר את המקרה המתואר בתוספתא.

רש"י (1105 — 1040) מבאר את המשנה: "אלו השניים שהזימו את הראשונים הזימו גם את האחרונים: אפילו הן מאה כתות, זו אחר זו וכת אחת הזימתן — יהרגו".

הרי"ף מתנגד לפרוש רבנו חננאל ומסביר שכונת המשנה אינה למקרה האינדוקטיבי. כמובן שהמדובר בדרכי פרשנות של המשנה ולא באי-הסכמה לדין האינדוקטיבי שבברייתא. הרמב"ם מבאר את המשנה בצורה לא אינדוקטיבית — כת אחת המזימה מאה כתות. וכותב בסוף פירושו את הדין של המקרה האינדוקטיבי המתואר בתוספתא.

הבטוי החוזר בכרייתא "ובאו אחרים" חורג מהתחביר המקובל ומראה לנו שאת המקרה A_{k+1} עלינו לבנות כהמשך למקרה A_k (תוך דילוג על הקטע המתאר את הדין A_k).

מובן מאליו כי הוכחת דין הברייתא נעשתה באינדוקציה.

3. האחיות שקמו לתחיה

משנה יבמות י' ה'

מי שהלכה אשתו למדינת הים, ובאו ואמרו לו מתה אשתך, ונשא את אחותה ואחר כך באה אשתו, מותרת לחזור אליו. הוא מותר בקרובות שניה ושניה מותרת בקרוביו. ואם מתה הראשונה מותר בשניה.

יבמות י' ו'

אמרו לו: "מתה אשתך" — ונשא את אחותה מאביה, "מתה" — ונשא את אחותה מאמה, "מתה" — ונשא את אחותה מאביה, "מתה" — ונשא את אחותה מאמה, מותר בראשונה ובשלישית ובחמישית. ופוטרות את צרותיהן, ואסור בשניה וברביעית, ואין ביאת אחת מהן פוטרת צרתה. ואם בא על השניה לאחר מיתת הראשונה מותר בשניה וברביעית ופוטרות צרותיהן ואסור בשלישית ובחמישית, ואין ביאת אחת מהן פוטרת צרתה.

המשנה הזו מנסחת את הדין עבור כל מספר לא ע"י בניית שורת מקרים פשוטים: מי שהיה נשוי אשה אחת, שתי נשים וכו' אלא ע"י תאור המקרה הכללי: מי שהיה נשוי חמש נשים. המספר 5 מתאים להבהרת הדין עבור כל n . 5 הוא המספר המינימלי כך ששתי הסדרות סדרת הזוגיים, וסדרת האי זוגיים תכלנה, גם במקרה שהראשונה אמנם מתה והשניה הפכה לאשתו, לפחות שני איברים.

במקרה הנדון: אם האשה ה־ k היא אשתו אזי האשה ה־ $k+1$ היא אחות אשתו וע"כ קידושה אינם קידושין ואין היא אוסרת את אחיותיה ובפרט לא את האשה ה־ k . אם האשה ה־ k אינה אשתו אזי חייה עם האיש היו חיי זנות ואין היא אוסרת את אחיותיה וע"כ הנישואין עם אחותה, האשה ה־ $k+1$ שאינה אחות־אשת־איש הם נישואין תקפים והיא אשתו. מובן הדבר מאליו כי המשנה מהווה הרחבה בדרך האינדוקציה של המשנה הקודמת.

4. המשכיר פרה

משנה: בכא מציעא פרק ג' ב' (המשנה מובאת להסברת הרקע לגמרא שתובא להלן). האינדוקציה היא בגמרא ולא במשנה). השוכר פרה מחברו והשאלה לאחר ומתה כדרכה ישבע השוכר שמתה כדרכה והשואל ישלם לשוכר. אמר רבי יוסי כיצד הלה עושה סחורה בפרתו של חברו אלא תחזור פרה לבעלים.

רקע

השוכר פרה, (והדין זהה בכל חפץ), והפרה מתה שלא באשמת השוכר. השוכר פטור מלשלם למשכיר את מחיר הפרה. המשכיר זכאי לתבוע מהשוכר שישבע שאמנם התנהג באופן סביר ועל כן לא בו האשם. המשכיר חייב, כמובן, להעמיד לרשות השוכר פרה אחרת

להשלמת תקופת השכירות. אחריות השואל חפץ גדולה יותר והוא חייב לשלם אף אם התנהג באופן סביר, (בקצרה: שוכר פטור באונסין, שואל חייב). אך גם שואל פטור אם הפרה מתה, או החפץ ניוזק, כתוצאה מהעבודה שלשמה הוא שאל את החפץ.

הסבר המשנה

(רש"י) השוכר פרה מחברו, ועמד שוכר והשאלה לאחר לעשות בה ימי שכירותו, ישבע השוכר, למשכיר, שמתה כדרכה — ופטור, שהשוכר אינו חייב באונסין. והשואל שהוא חייב באונסין, משלם לשוכר. וכמובן שהבעלים יעמידו לרשות השוכר פרה אחרת להשלמת השכירות. הדין הוא כרבי יוסי (הרמב"ם) אך הגמרא דלהלן מוסבת על דברי התחלת המשנה.

גמרא בבא מציעא ל"ה ע"ב (מוסבת על המשנה דלעיל).

אמר רב זירא: פעמים שהבעלים משלמים כמה פרות לשוכר. היכי דמי? אגרה מיניה מאה יומי, והדר שייליה מיניה תשעין יומי. הדר אגרה מיניה תמנן יומי, והדר שייליה מיניה שבעין יומי ומתה בתוך ימי שאלתה — דאכל שאלה ושאלה מיחייב חדא פרה.

תרגום: איך יתכן? שכר ממנו למאה ימים, וחזר ושאל ממנו לתשעים ימים, חזר ושכר ממנו לשמונים ימים, וחזר ושאל ממנו לשבעים ימים ומתה בתוך ימי שאלתה — שעל כל שאלה ושאלה מתחייב פרה אחת.

"רב זירא" לדעת רש"י (כתובות מ"ג ע"ב) הכוונה היא לרבי זירא בעת שעוד היה בבבל. ומכאן שהדברים דלעיל נאמרו בסוף המאה ה-3. לדעת התוספות (מנחות מ' ע"ב). רבי-זירא הוא אמורא בבלי שאינו זהה לרבי-זירא. אם נניח שרבי-זירא אינו רבי-זירא או רבי-זירא חי בתחילת המאה ה-4. (אינצ. יודאיקה). בדפוס כתוב "רבי-זירא", בכת"י פירנצה ר' זירא. בכת"י המבורג: א"ר זירא, וכן גם בכת"י מינכן. אפשר ע"כ להניח שהמדובר בשכיח שבין השנים, אם בכלל יש שנים, דהיינו ברבי זירא. בפרט שידוע כי "רבי זירא חריף ומקשה" (הוריות י"ד). (ובדומה לזה עירובין ס"ה ע"ע). ועל חידודיו ירושלמי דמאי פ"ז ז' כלאים פ"ה א'.

הסבר: (רש"י) "פעמים שהבעלים, המשכירים הראשונים, משלמין לשוכר זה כמה פרות על פרה זו. כיצד? ראובן ששכר פרה משמעון שיעשה בה מלאכה 100 יום, וחזר שמעון ואמר לו: עשה עמי טובה והשאלני אותה 90 יום מן ה-100 ששכרת ולאחר 90 אחזירנה לך לעשות אצלך 10 ימים להשלים ה-100. וכן עשה. יש כאן דין משנתנו דתנן: השוכר פרה מחברו והשאלה לאחר בתוך ימי שכירותה, דמה לי בעלים ומה לי אחר. אם מתה אצל שואל הרי שוכר פטור בשבועה, והשואל משלם לשוכר. חזר ראובן ובא אצלו ואמר לו: השכירנה לי מתשעים יום שהיא שאלה בידך ממני ואשתעבד בה שמונים יום וטול

שכרך. וכן עשה הרי היא בחזקת שאילתו על שמעון כאילו השכירה לאחר שהרי נוטל שכרו..."

רש"י מסביר למען הפשטות, שכל ההשכרות וההשאלות נעשו ביום הראשון. הבאתי רק את תחילת הסברו של רש"י (שאולי הוא הארוך בהסבריו שבש"ס) המראה כי המקרה המתואר ע"י רב זירא הוא מקרה פרטי של מקרה בו אדם השכיר לשני שהשאל לשלישי השכיר לרביעי שהשאל לחמישי. רש"י מדגיש בכיאוורו שכל שאלה התיחסה לשכירות שלפניה ותמיד נשאר זמן — עשרה ימים — שבו זכאי השוכר להשלים את השכירות הגדונה. (גם השכירויות נעשו באופן דומה).

במקרה הנדון משלם בעל הפרה שתי פרות לשוכר (וחייב עוד להעמיד לרשות השוכר שתי פרות אחת להשלמת השכירות הראשונה ואחת להשלמת השנייה. הדבר ברור מדברי מר-בר-רבאשי שבהמשך הגמרא).

רב זירא עצמו מבאר שדוגמתו היא מקרה הניתן להרחבה. הוא עושה זאת בשתי דרכים:

א. הוא אומר "הבעלים משלמים כמה פרות" ולא "שתי פרות" כפי הדין במקרה המודגם על ידו.

ב. הוא מתחיל במספר 100 המסמל מספר גדול כל שהוא כפי שראינו במקרה צרת-הצרה ובעדים הזוממים. כאשר יכול היה להתחיל מהמספר 40. או לרדת בצעדים של 25, הקורא אינו יכול שלא להמשיך ולפתח את דוגמתו של רב-זירא למספרים נוספים, תוך הבנה שאפשר לבנות דוגמא לכל מספר פרות שהוא.

המיוחדת במקרה הנדון הוא שהסדרה היא מופשטת ומחוכמת: יש שני אנשים ופרה אחת אך סדרת השכירויות והשאלות ארוכה כרצוננו. (הגמרא בהמשך מתיחסת לנקודה זו).

רבנו חננאל מסתפק בהערה קצרה על דברי רב זירא: "ודברים פשוטים הן".

5. מעגל קדימויות

משנה כתובות פרק י' א'

מי שהיה נשוי לשתי נשים ומת הראשונה קודמת לשנייה.

משנה י'

מי שהיה נשוי לשתי נשים ומכר את שדהו וכתבה הראשונה ללוקח דין ודברים אין לי עמך, השנייה מוציאה מיד הלוקח והראשונה מיד השנייה והלוקח מיד הראשונה, וחזרת חלילה עד שייעשו פשרה ביניהן. וכן בעלי חוב. וכן אשה בעלת חוב.

רקע

אם בעל קרקע לווה ממספר אנשים ולאחר מכן מכר קרקעות למספר אנשים, אזי תחילה גובה המלוה הראשון את חובו, אם נותרה קרקע גובה השני וכו', הגביה מהלקוחות נעשית בסדר הפוך מהסוף להתחלה, כשכל לוקח מהראשונים יכול לומר למלוה "מקום הנחתי לך לגבות הימנו" — לך לאחרונים.

כתובה של אשה הוא סכום קצוב מראש החייב להיות גדול או שווה לסכום מינימום שקבעו חכמים. האשה זכאית לגבות סכום זה במקרה שבעלה מת או שהוא מגרש אותה. דין נשים הגובות כתובתן כדין מלוים הגובים את חובם. (אם הבעל רכש את הקרקע לאחר שנשא את הנשים הקרקע משועבדת להן אך ללא תלות בזמן נישואיהן). הקרקע משועבדת למלוה, ולאשה, גם כשהיא בידי הלווה (או הבעל) וגם כשהוא בידי אחר: קונה, מי שקבלה במתנה, או מי שקבלה מידי המקבל: במתנה, במכירה או כגביה של חוב. כמובן שהמלוה, או האשה, זכאים לותר על חלק מזכויותיהם. למשל לותר על זכות טריפת הקרקע מאדם מסוים. כל מי שהקרקע נטרפה מידו הופך לבעל חוב הזכאי לפיצוי ממי שמכר לו את הקרקע.

במקרה הנדון במשנה האשה הראשונה שהקרקע נשתעבדה לה לפני המכירה ויתרה על זכות הגביה שלה מהקונה. השניה שגם היא קודמת לקונה טורפת ממנו, כי אין מי שהוא הזכאי לטרוף ממנו לפניו. הראשונה מחלה את זכויותיה לקונה אך לא למי שמקבל ממנו וע"כ היא זכאית לגבות מהשניה. הקונה שהקרקע שקנה נטרפה ממנו הפך לבעל חוב של המת והוא טורף את הקרקע שבידי הראשונה, כי היא ויתרה לו על זכות הקדימה שלה עליו לגבי קרקע זו, ואין מי שהוא הזכאי לטרוף מהראשונה לפניו. וחזור חלילה. "חלילה — לשון מחול סביב סביב" רש"י פסחים מ"ח ע"ב.

המשנה מראה כיצד לבנות את האיבר ה- $k+1$ בסדרת בעלי הזכות ההחזקה בקרקע אם האיבר ה- k ידוע.

מכיון שיש סדר קדימויות מעגלי אין אף אחד יכול להחזיק בקרקע או בחלק ממנה אלא אם כן על המחילה של הראשונה ללוקח עוד מספר מחולות על זכויות דהיינו פשרה.

אין לפנינו מקרה של חוסר יכולת הכרעה של דיני הממונות שבתורה. לאשה הראשונה היתה זכות גביה על הקרקע אך היא זכאית לותר לחלוטין על זכויותיה, או לותר עליהם באופן חלקי ובכלל זה לגרום למצב שבו הקרקע שהיתה יכולה להיות בבעלותה תהיה בסטטוס לא מוכרע.

6. חומש שנעשה קרן

ויקרא ה' כ"א – כ"ד

"נפש כי תחטא ומעלה מעל בה' וכחש בעמיתו בפקדון או בתשומת ידו או בגזל או עשק את עמיתו או מצא אבדה וכחש בה, ונשבע על שקר... והיה כי יחטא, ואשם, והשיב את הגזלה אשר גזל או את העשק אשר עשק... או מכל אשר ישבע עליו לשקר, ושלם אותו בראשו וחמשתיו יוסף עליו". (קרי: וחמישיתיו).

(הערה: רש"י שבחומשים על "וחמישיתיו" אינו בדפוס ראשון של רש"י, מקורו במשנה ותורת כהנים שלהלן).

רקע

כל החייב ממון לחברו בגלל סיבה המפורטת בתורה, וכן בגלל כל דבר שאילו הודה חייב לשלם בדין, וכפר, ונשבע עליו לשקר (שאינו חייב), ולא באו עדים והעידו שנשבע לשקר, אלא הוא עצמו הודה הרי שהוא חייב לשלם את הקרן ובנוסף על כך גם חומש. החומש הוא חומש מהסכום הכולל, כלומר רבע מהקרן (תורת כהנים להלן).

תשלום החומש הוא חלק מהחזרה בתשובה של החוטא, ואם לא הודה מעצמו אלא עדים העידו ששיקר אינו משלם את החומש (בבא־קמא ט' ח'). כל האמור לעיל הוא רק כשהחוב שוה לפחות פרוטה. על סכום השוה פחות מפרוטה אין משלמים חומש. (החומש עצמו יכול להיות פחות משוה פרוטה).

ברשימת המקרים המנויים בתורה פקדון, תשומת־יד, גזל, עושק וכו', שבהם אדם חייב ממון לחברו לא נמנה במפורש המקרה שבו אדם חייב חומש ומתכחש לחוב זה.

משנה בבא קמא ט' ז'

נתן לו את הקרן ונשבע על החומש, הרי זה משלם חומש על חומש עד שיתמעט הקרן פחות משוה פרוטה.

הרמב"ם בפירוש המשניות נותן דוגמא של חומש־חומש־חומש־חומש. רש"י (שם) – כגמרא ק"ג ע"ב) "חומש על חומש: חומשו של חומש, דחומש ראשון נעשה קרן" רש"י מרגים גם לחומש־חומש החומש, ומסביר: "וכן לעולם עד שיתמעט הקרן של חומש...".

תלמוד בבלי, בבא מציעא נ"ד ע"א

אמר רבא: גבי גזל כתיב וחמישיתיו יוסף עליו, ותנן: נתן לו את הקרן ונשבע לו על החומש הרי זה מוסף חומש על חומש עד שיתמעט הקרן פחות משוה פרוטה.

רש"י (שם: "נתן לו את הקרן"): וכן אס... כפר ונשבע על חומש שני והודה מוסיף חומש על חומש וכן לעולם. עד שימעט הקרן: חומש שהוא מחוייב כבר וחוזר וכופרו קרוי קרן עד שתהא כפירת שבועתו בפחות משה פרוטה.

תלמוד ירושלמי בבא-קמא ט' ז'

כינוי (כך-היא, כך-היא) מתנותא (המשנה) עד שיתמעט חומש האחרון פחות משה פרוטה. אמר ר' יונתן: בנתינת החומש נעשה החומש קרן.

תורת כהנים (ספרא) ויקרא פרשה י"ג י"ב

"חמישיתיו" — מלמד שמוסיף חומש על חומש, עד שימעט הקרן משה פרוטה. "יוסף עליו" — שיהא הוא וחומשו חמשה.

בבלי בבא מציעא נ"ד ע"א:

כתנאי: יוסף חמישיתו עליו שיהא הוא וחומשו חמישה — דברי רבי אושיה. ר' יונתן אומר חמישיתו — חומשו של קרן.

רבי יונתן הוא מאחרוני התנאים בן זמנו של רבי יהודה הנשיא (220—135). דבריו שבירושלמי הם הסבר לקטע הראשון שבתורת כהנים המובא במשנה הנדונה. הוא מדגיש שהניסוח "עד שיתמעט הקרן" מהווה לא רק תיאור באינדוקציה של הדין אלא גם הוכחתו באינדוקציה: לאחר שנשבע האדם לשקר שנתן את החומש ה- $k-1$ והודה, נתחייב בנתינת חומש ה- k שדינו כקרן. אם ישבע לשקר שנתן אותו ויודה יתחייב בחומש ה- $k+1$ שנעשה גם הוא לקרן. בדברי הבבלי נ"ד ע"א חולק רבי יונתן על הדרשה השניה המובאת בתורת כהנים — וטוען כי החומש פרושו חמישית, ולא רבע, מהקרן. ע"כ אין להתפתות ולנסות לבאר את החלק הראשון כמסיק את הדין שהחומש פרושו רבע הקרן ע"י סכום טור אין סופי "חמישיות הרבה". גם אין מדובר בטור אין סופי, כי תמיד עוצרים בפחות משה פרוטה. לסיום קטע זה יש להעיר כי בבא מציעא נ"ד ע"א ע"ב דנה הגמרא באריכות האם גם במקרה אחר — חומש של המועל בקדשים — "חומשו כמותו", כי אז יבוא דין חומש-החומש.

7. סדרת הנזירים

משנה, נזיר פרק ד' משנה א'

מי שאמר "הריני נזיר", ושמע חברו ואמר "ואני", "ואני" הרי כולם נזירים הותר הראשון הותרו כולם. הותר האחרון האחרון מותר וכולם אסורין.

רקע

אדם יכול לנדוד נזירות, לזמן קצוב או לתמיד, ואז אסורים עליו שלושה דברים: שתיית יין, תספורת, היטמאות למתים. את הנזירות מקבל אדם ע"י אמירה כל שהיא שמשמעה קבלת נזירות. כגון במקרה המתואר במשנה ברור שהחבר שאמר "ואני" — התכוון לצרף את עצמו לנזירות שקבל על עצמו הראשון.

התרה: נזירות שנעשית בטעות כגון שהארם לא היה מודע לתוצאות מעשהו מבוטלת מראש. במקרי גבול ההתרה נעשית ע"י בית דין — שלושה אנשים או יחיד מומחה — הכודקים אם אמנם נחשבת הנזירות לנזירות בטעות.

במקרה שבמשנה מדובר בשני אנשים האומרים זה לאחר זה "ואני" בחלק מהנוסחאות כתוב שלוש פעמים: ואני, ואני, ואני. בגמרא מכואר שהאמירה "ואני" חייבת להיות סמוכה לאמירת "הריני נזיר" והפרש הזמן אסור לו שיעלה על "תוך כדי דבור" הזמן הדרוש לאמירת "שלום עליך רבי".

תלמוד בבלי נזיר כ"א ע"א

איבעיא להו: חד בחבריה מתפיס או דלמא בקמא מיתפסי? למאי נפקא מינה — לאתפוסי ומיזל: אי אמרת חד בחבריה מתפיס מתפסין ואזלין לעולם ואי אמרת בקמא מיתפסי טפי מכדי דבור לא מתפסין.

(תרגום חופשי) נשאלה השאלה: האם כל אחד מתפיס (את נזירותו) בחברו (האחרון לפניו שאמר "ואני"), או אולי מתפיס בראשון. למה זה משנה — ללכת ולהתפיס. אם אמר אחד בחברו מתפיס — מתפיסים והולכים לעולם ואם תאמר: בראשון מתפיסים יותר מכדי דבור לא מתפיסים. הגמרא דנה כיצד לפרש את כוונת שורת אנשים האומרים בזה אחר זה "ואני": האם כוונת כל אחת להיות נזיר כמו הראשון או כמו זה שלפניו.

ברייתא מובאת שם בגמרא בהמשך: ת"ש דתניא בהדייא (בא ושמע שנישנה בפרוש): "הותר הראשון הותרו כולם, הותר האחרון הותרו כולם אסורין. הותר אמצעי הימנו ולמטה מותר הימנו ולמעלה אסור". שמע מינה חד בחבריה מתפיס. שמע מינה!

A_k שבסדרה הוא נזיר בגלל שהוא קבל על עצמו להיות כמו A_{k-1} . אם הותר האדם A_j מנזירותו, כלומר מתברר כי מעולם לא היה נזיר וע"כ A_{j+1} שקיבל עליו להיות כמו A_j גם הוא איננו נזיר, ובאינדוקציה כל אלה שלמטה ממנו מותרים.

8. סדרת הנאסרים בהנאה

הנודר יכול לנדוד בשני אופנים או שהוא אוסר את עצמו או רכושו על אחרים, או שהוא

אוסר על עצמו להנות מאחרים או מחפצים כל שהם. המשנה משתמשת במלה "קונם" כמיצגת את קבלת הנדר.

משנה נדרים פרק ט' ו'

...עד שבא רבי עקיבא ולימד שהנדר שהותר מקצתו הותר כולו. כיצד: אמר קונם שאיני נהנה לכולכם הותר אחד מהן — הותרו כולם. שאיני נהנה לזה ולזה הותר הראשון הותרו כולם, הותר האחרון מותר וכולם אסורין.

כמקרה הראשון היה נדר אחד שהופנה כלפי קבוצות אנשים ולכן אם הנדר היה בטעות כלפי אחד מכולם אזי "הותר מקצתו הותר כולו". את הבטוי "לזה ולזה" מסביר ר' עובדיה מברטנורא (מת 1500): בגין שאסר הראשון עליו בקונם ואמר על השני הרי זה כראשון ועל השלישי הרי זה כשני וכן כולם, הותר הראשון הותרו כולם, שכולם תלויים בו.

בחלק הראשון נאמר "הותר אחד מהם" ובחלק השני נדונו רק המקרים של הראשון והאחרון. מנסח המשנה הניח שכל קורא נכון יסיק את הדין למקרה שהותר האמצעי. יש להניח שאחד הלומדים, הוסיף בשולי הגיליון את הפסקא המתאימה שלמד בכרייתא שהובאה לעיל (מנוזר כ"א ע"א) "הותר האמצעי הימנו ולמעלה אסור הימנו ולמטה מותר" ומעתיק שהשתמש בספר הניח שהערת הלומד היא השלמת השמטה. ולכן אנו מוצאים קטע זה ברוב המשניות המודפסות.

9. סדרת המשקים הטמאים

תוספתא, טבול-יום א' ג'

אחד משקה שנטמא באב הטומאה, ואחד משקה שנטמא בולד הטומאה, הרי זה תחילה לעולם: מטמא חברו, וחברו חברו, אפילו הן מאה.

רמב"ם: טהרה, שאר אבות הטומאה, פרק ז' הלכה ה'

המשקין, אחד משקה שנגע באב הטומאה או שנגע בראשון או שנגע בשני הרי אותו משקה תחילה לטומאה ומטמא את חברו, וחבירו את חברו אפילו הן מאה שאין מונין למשקין. כיצד... וכן אם נגע יין זה בשמן ושמן בחלב, וחלב בדבש, ודבש במים, ומים כיון אחר וכן עד לעולם כולם ראשון לטומאה.

10. הצבת הראשונה

משנה אבות פרק ה משנה ו

עשרה דברים נבראו בערב שבת בין השמשות... ויש אומרים אף צבת בצבת עשויה.

פסחים נד ע"א

תניא: עשרה דברים נבראו בערב שבת בין השמשות... רבי יהודה אומר אף הצבת. הוא היה אומר צבתא בצבתא מתעבדא, וצבתא קמייתא מאן עבד? הא לאי בריה בידי שמים היא! (תרגום חופשי: הוא — רבי יהודה בן המאה השניה — היה נוהג לומר צבת בצבת נעשית ואת הצבת הראשונה מי עשה? בהכרח היא נבראה!) אמר ליה: אפשר יעשנה בדפוס ויקבענה כיוון!

הסבר: הדרך היחידה שבה נפת עושה צבת, היא ע"י החזקתה בצבת אחרת והכאה בפטיש. אילו כל הצבתות היו נעשות בידי אדם היינו מקבלים סדרה אין סופית של עשיית צבתות, דבר הגורר זמן קיום אין סופי של האנושות. מכאן נובע שיש צבת שלא נעשתה בצבת, צבת זו שלא נעשתה בידי אדם נבראה! טיעון זה נדחה, כנראה ע"י רבי נחמיה או אביו שהוזכרו קודם, בטענה שאפשר לעשות צבת בתהליך של יציקה עדינה.

11. שרשרת חברים

כתובות קט ע"ב, ק' ע"א. בבא־בבא כח ע"ב, לח ע"ב לט ע"א ועוד.

חברך חברא אית ליה, וחברא דחברך חברא אית ליה.

נראה שזה היה פתגם נפוץ. ומשמעותו: מערכת החברויות בחברה כה אנו מצויים מהוה גרף קשיר. האומר דבר לחבריו יכול להניח לגבי כל אדם זר, מוכר לו או שאינו מוכר, שסביר שהדבר יגיע אליו.

פתגם זה נולד כנראה מנסיון החיים ונראה לי שאין אמירתו מצביעה על חשיבה באינדוקציה. בדומה לכך כל המקרים בהם מדובר על שרשרת הצאצאים של אדם, או שרשרת אבותיו של אדם אינם יכולים להצביע על חשיבה בדרך האינדוקציה המתמטית. אלא אם כן נלווית אליהם סדרה לא טריוויאלית אחרת, או שהניסוח הוא בדרך האינדוקציה כפי שהדבר בדוגמא 15 מספר יואל.

12. רכושנות ללא גבול.

קהלת רבה ג יב

אמר רב יודן בשם ר' איבו אין אדם יוצא מן העולם וחצי תאותו בידו, אלא אם אית ליה מאה בעי דיתעבדון תרתי מאה, ומאן דאית ליה תרתי מאה בעי דיתעבדון ארבעה.

תרגום: ...אלא אם יש לו מאה רוצה שייעשו שני מאות, ואם יש לו שני מאות רוצה שייעשו ארבעה.

הבאתי מקרה זה רק בפרפראזה לשאר המקרים. אפשר בקלות לנסח את האמרה באינדוקציה הנראית טבעית יותר מניסוח אינדוקטיבי של ניסוח אוקלידס על כמות הראשוניים. אך עדיף לותר על כך ולראותה כמבטאת חוכמת חיים, וראיה מפוקחת של טבע האדם.

13. פירות הפירות

משנה, כתובות פרק ט' א'

הכותב לאשתו דין ודברים אין לי בנכסייך: הרי זה אוכל פירות בחייה ואם מתה יורשה... רבי יהודה אומר לעולם הוא אוכל פירי פירות עד שיכתוב לה דין ודברים אין לו בנכסייך ובפירותיהן ובפרי פירותיהן עד עולם.

בבלי כתובות פ"ג ע"ב (ובדומה לזה תוספתא, כתובות פרק ט' ב')

תנו רבנן (ברייתא): אלו הן פירות ואלו הן פרי פירות: הכניסה לו קרקע ועשתה פירות הרי הן פירות, מכר פירות ולקח מהן קרקע ועשתה פירות הרי הן פרי פירות.

במקרה זה מתואר תהליך היכול להיות ארוך כרצוננו הרלוונטיות של המקרה לנושא הנדון הוא בעיקר בדיון על הבטוי "בפירותיהם ובפרי פירותיהן עד עולם" שבגמרא.

רקע

הסדרי הממון שבין איש לאשתו הם מתקנות החכמים, ורשאי אדם לותר על זכות ממונות המוקנית לו ע"י תקנת חכמים. במקרה זה אין על כן הוכחה באינדוקציה בין הוכחה מפורשת ובין לא מפורשת והענין בדוגמא זו היא בגלל הצד הלשוני: דרך תיאור הסדרה האינסופית (שבא כל אלמנט מוגדר באמצעות קודמו). הגמרא פ"ג ע"ב עומדת על שתי משמעויות היכולות להיות לבטוי "עד עולם", אפשר לפרשו כמתאר משך זמן ואפשר לבארו כמתאר מספר צעדים בסדרה.

14. שרשרת וולדות

ויקרא כ"ז ט' י':

כל אשר יתן ממנו לה' יהיה קדש. לא יחליפנו ולא ימיר אתו טוב ברע, או רע בטוב. ואם המר ימיר בהמה בכמה והיה הוא ותמורתו יהיה קדש.

משנה תמורה פרק ג' משניות א' ב' ג'. פרק ד' משנה א'

אלו קדשים שולדותיהם ותמורותיהן כיוצא בהן: ולד שלמים ותמורתו ולדן, ולד ולדן עד סוף העולם.

גמרא תמורה י"ז ע"ב

כיון דתנא "ולדן וולד ולדן" למה ליה למתני "עד סוף העולם"? ברור לגמרא כי אפשר להסיק באינדוקציה את שאר הסדרה. התוספות, במקום, משוים את הדיון בצורך בבטוי "עד סוף העולם" במקרה זה, לדיון המקביל. לכאורה, שבדוגמא הקודמת — הבעל המתור על זכויותיו הפרי פירות. וכן עומדים על כך שבמקרה הראשון, צרות-צרותיהן עד עולם, לא נדון הנושא כלל. דיון דומה מופיע גם בתוספות בתחילת מסכת יבמות (על המלים: עד סוף העולם).

15. מקרה בו אין להפעיל אינדוקציה

משנה תמורה א' ה'

אין... ולא תמורה עושה תמורה, ולא הולד עושה תמורה.

בבלי תמורה ל"א ע"ב

וכלל הוא דכל קדשי מזבח עושין תמורה? והרי תמורה עצמה דקדשי מזבח ותנן "אין תמורה עושה תמורה"? כי קתני אעיקר זיבחה.

תרגום: וכלל הוא שכל קדשי מזבח עושים תמורה? והרי תמורה עצמה היא קדשי-מזבח ונאמר במשנה "אין תמורה עושה תמורה"? המשנה מכוונת לקרבן המקורי.

כאן לפנינו דוגמא שאמוראים שמו לב לכך שהכלל "כל קדשי מזבח עושין תמורה" צריך היה לגרום להמשכת התהליך: התמורה שגם היא מקדשי מזבח היתה צריכה לעשות תמורה: כלומר אם אדם היה מקדיש בהמה A_1 וממיר אותה ב- A_2 ואת A_2 היה ממיר ב- A_3 , היו כל השלוש צריכות להחשב לקדשי מזבח, ולא רק שתי הראשונות. התירוץ הוא שהכלל הוא רק על האלמנט הראשון בסדרה וממילא אורך הסדרה הוא רק שנים.

רמב"ם פירוש המשניות תמורה א' ה' (תרגום קאפח)

ודע שפסק ההלכה: ממירין וחורין וממירין באותה הבהמה הראשונה עצמה ואפילו המיר בה כמה אלפים זה אחר זה או בבת אחת הכל תמורה.

הרמב"ם מדגיש שבמקרה נדון אי אפשר ליצור סדרות ארוכות: "הראשונה עצמה", "המיר בה". רק בה אך לא בתמורתה וממילא לא בתמורת תמורתה וכו'.

האינדוקציה המתמטית בתוספות

בשתי הדוגמאות שתובאנה להלן מראים התוספות כיצד אפשר לכאורה, בעזרת ארגומנט אינדוקטיבי, להביא דעות שבגמרא לידי אבסורד. התוספות מסבירים בכל אחד מהמקרים מדוע תכונת המעבר אינה מתקימת.

16. שתיית יין ללא סוף

בתורה נאמר: "ואכלת ושבעת וברכת את ה'" ומכאן למדו חכמינו כי האוכל או שותה כמות משמעותית חייב להודות לה'. חכמינו אף קבעו נוסח ברכות מחייב לצורך זה. עבור סעודה הכוללת לחם או מאפה אחר וגם עבור אכילת לחם בלבד קבעו לומר שלש ברכות, מערכת ברכות זו קרויה בלשוננו ברכת המזון. לדעת רבן גמליאל יש לברך ברכת המזון אחרי אכילת כל אחד משבעת המינים שנשתבחה בהם ארצנו (חטה-לחם, שעורה, גפן-ענבים או יין, תאנה, רימון, זית, תמר). שלושה אנשים או יותר האוכלים ביחד צריכים לברך ביחד: אחד מהם מזמן — מזמין — את השאר לברך. יש דעה שברכה בזימון "טעונה כוס" דהיינו המזמן אומר את ברכת המזון כשכוס יין בידו ולאחר הברכות שותים את היין.

ברכות לז ע"א תוספות ד"ה נתן רבן גמליאל רשות לרבי עקיבא

וא"ת לר"ג דאמר ג' ברכות שלמות וס"ל מזמנים על ז' המינים, אי ס"ל דברכה טעונה כוס א"כ יזמנו וא"כ יזמנו לעולם.

הסבר מפורט: ואם תאמר, לפי רבן גמליאל שאמר (שעל פרי משבעת המינים צריך לברך) שלוש ברכות שלמות, והוא סבור ששלשה שאכלו צריכים לזמן גם אם סעודתם כללה רק פרי כל שהוא משבעת המינים אם הוא סבור שברכה טעונה כוס — יש לזמן על היין, אם כן יזמנו ואחר כך יזמנו, לעולם: לאחר הברכות שותים יין שהוא משבעת המינים ועל כן צריכים השלושה לזמן גם על שתיית היין, הזימון השני גם הוא "טעון כוס" שלאחר שתייתה יש לזמן בשלישית וכן לעולם.

הב"ח (בית חדש — הרב יואל סירקש) בהגהותיו במקום מעיר שצריך למחוק מהתוספות את המילים "יזמנו וא"כ" כך שהנוסח יישאר: "א"כ יזמנו לעולם" הב"ח חשב שקרתה כאן טעות מסוג שכחה, של מדפיס שחזר פעמים על המילים "א"כ יזמנו" כך שיצא "אם כן יזמנו ואם כן יזמנו לעולם", הב"ח הקפיד על תקנתו של רבנו תם שלא לתקן נוסחאות כספרים אלא להסתפק בהערות בשולי הספר, וטוב שהקפיד על כך. כי בתוספות רבנו פרץ הנוסח הוא "א"כ יזמנו ואח"כ יזמנו לעולם". ובתוספות רבנו יהודה בן יצחק שירליאן (מת 1224): "כך הקשה ה"ר אלחנן... א"כ יזמנו ויחזרו ויזמנו לעולם" ובגנזי

ראשונים שיטה להר"א אלאשבילי (אבי הריטב"א, ואולי הן של הריטב"א עצמו):
 "...ומזמנים עליו וחוזרים ומברכים על כוס אחר וכן לעולם, וא"כ אין לדבר סוף" נוסחה
 אחרונה זו מיצגת הוכחה מושלמת בדרך האינדוקציה. יש כאן הבחנה ברורה בין ההוכחה
 שלכל i $P(i)$ (קיומה של כוס- i שאותה חייבים לשתות) גורר את $P(i+1)$ לבין המסקנה
 שאמנם לכל i $P(i)$. בנוסחאות האחרות יש שילוב של שני האלמנטים: אם נעבור על
 הטבעיים לפי סדרם אזי לכל i $P(i)$ וגם $P(i)$ גורר $P(i+1)$.

ההוכחה שיש לשתות ללא סוף מופיעה גם בתוספות הרא"ש כאן ובדף נב ע"א,
 ובתוספות המודפסים פסחים ק"ה. רבנו אלחנן שלו מיוחסת השאלה על קיומה לכאורה של
 חובה לשתות אין סוף כוסות ידוע גם כרבי אלחנן הקדוש כי נרצח על קידוש השם, בידי
 הנוצרים בשנת 1184 כחיי אביו הר"י (רבי יצחק) הזקן גדול בעלי התוספות אחרי רבנו תם.

תשובות לבעית אין סוף הכוסות מופיעות בכל אחד מהמקורות שנוכרו.

17. כל הכשר אסור

חולין צה ע"ב

ירך שנתבשל בה גיד הנשה, אם יש בה בנותן טעם, הרי זו אסורה. כיצד משערין
 אותה... אמר שמואל: לא שנו אלא שנתבשל בה, אבל נצלה בה קולף ואוכל עד שמגיע
 לגיד הנשה.

הסבר: גיד הנשה הוא חלק בתוך ירך בהמה האסור באכילה. אם מאכל אסור נתערב
 במאכל מותר, בכמות המשנה את טעמו, המאכל המותר נאסר. המשנה קובעת כי כישול
 יכול לגרום לחלחול משמעותי של נוזלים מהחלק האסור למותר. שמואל אומר שבצליה
 הדין שונה, ואפשר לאכול מהבשר עד מקום גיד הנשה. התוספות מעירים: עד שמגיע לגיד
 — לאו דוקא עד שמגיע לגיד ממש דהא צריך שיניח כדיקליפה. בפסקה הבאה ("אפילו
 מריש אזנו") מסבירים התוספות כי לא בכל מקרה שבו קיימת תופעת החלחול כל הבשר
 נטרף. אלא שיש לאסור רק את החלק שלתוכו חלחל האיסור. הם מוכיחים שלא הנגיעה
 גורמת לאיסור אלא החלחול: "תדע דבכל מקום שאנו אוסרין "כדי קליפה" אמאי (למה)
 אין אותו "כדי קליפה" חוזר ואוסר מה שאצלו (הסמוך לו) ובענין זה יאסר הכל? היינו,
 טעמא (ההסבר) לפי שאין טעם האיסור עובר כלל יותר מ"כדי קליפה"! בהמשך מראים
 התוספות שבדרך זו אפשר היה להוכיח שכל בשר המוכשר ע"י מליחה אסור באכילה.

סדרות אין סופיות בתנ"ך

בדוגמאות מהתלמוד ראינו מספר צורות לבטא את קיומה של סדרה אין סופית. יתכן

אולי לומר שהגמרא שוללת צורת ניסוח אחת, והיא פרוט אין סופי. במשנה נזיר פרק רביעי א' נזכר הבטוי "ואני ואני" לשאלה מדוע נאמר רק פעמיים "ואני ואני" ולא יותר עונה הגמרא (נזיר כ, ע"א) בשאלה רטורית "תנא כי רוכלא ליחשיב ולזיל". (האם התנא כרוכל ייחשב וילך?) אולי אין הכוונה להסביר מדוע לא נאמר במנה "ואני ואני ואני" או ארבע פעמים "ואני", אלא טיעון שהתנא אינו יכול לנהוג כמנהגו של רוכל ההולך ומכריו על מרכולתו בסדרה אין סופית של קריאות: "ואני", "ואני", "ואני"...

הצורה השכיחה לבטוי סדרה אינסופית היא שמוש בבטוי "עד עולם" או "אפילו מאה" המקור לבטויים האלה הוא מהתנ"ך, אם כי הבטוי "עולם" מכוון בכל המקרים שבתנ"ך למשך הזמן שבו מתקיימת הסדרה האין סופית של דורות או בני בנים.

"זה שמי לעולם וזה זכרי לדר דר" (שמות ג' 15).

"ויהודה לעולם תשב וירושלים לדור ודור" (יואל ד' 20).

"אתה ה' לעולם. תשב וכסאך לדור ודור" (איכה ה' 29).

"לדור ודור עד עולם" (תהלים ק"ו 31).

"הנגלות לנו ולבנינו עד עולם" (דברים כ"ט 28).

"לך אתננה ולזרעך עד עולם" (בראשית י"ג 15).

דרך אחרת לבטוי הסדרה האינסופית היא ע"י הצגת תחילתה בלבד: "למען תורא את ה' אלקיך... אתה ובנך ובן בנך" (דברים ו' 2). דומים למקרים אלה הם המקרים שפורטו לעיל "דור דור" "דור ודור" אם נתעלם מהמקבילה הכוללת "עולם".

ענין מיוחד יש במקרה הבא שאפשר לראות בו ניסוח אינדוקטיבי.

18. שרשרת הדורות

יואל א' פסוקים ב' ג':

שמעו זאת הזקנים והאזינו כל יושבי הארץ, ההיתה זאת בימיכם ואם בימי אבותיכם. עליה לבניכם ספרו ובניכם לבניהם וכניהם לדור אחר.

יואל ב' פסוק ב'

יום חשך ואפלה יום ענן וערפל, כשחר פרוש על ההרים, עם רב ועצום, כמוהו לא נהיה מן העולם, ואחריו לא יוסף, עד שני דור ודור.

בשני הקטעים שהובאו חוזר הרעיון שתופעת הארבה הכבד שעליה מנבא יואל תהיה תופעה חד פעמית שמעולם לא היתה ולעולם לא תחזור. בפרק א' ב' "שמעו זאת הזקנים והאזינו כל יושבי הארץ ההיתה זו בימיכם ואם בימי אבותיכם" מונח הרעיון שאילו תופעת

הארבה היחה בעבר כי אז היתה השמועה עליה עוברת לידיעתנו דרך הזקנים שהיו שומעים זאת מאבותיהם. בפסוק ג' מתואר איך תעבור הידיעה על הארבה לדורות הבאים. "עליה לבניהם ספרו ובניהם לבניהם ובניהם לדור אחר". הסיום איננו "ובניהם לבני בניהם" אלא "לדור אחר" בטוי המהווה תיאור כללי ורומז לכך שכל דור k יעביר זאת לדור $k+1$. על זמנו של יואל כותב אבן-עזרא בפתח הספר: "אין לנו דרך לדעת דורו, ולפי הפשט איננו בן שמואל". לפי האינציקלופדיה המקראית זמן הנבואה שהזכרה הוא בין 500 ל-400 לפני הספירה.

סכום

בשני מקרים ראינו ניסוח הוכחות באינדוקציה: בצרת הבת, ובחומש החומש. במקרה צרת הבת מציג רב אשי את ההוכחה האינדוקטיבית כאלטרנטיבה לוגית לדרש הפסוק. אין לראות בכטוי "סברא היא" הצהרה שהאינדוקציה היא דרך הסק לוגית אלא רק הכרזה על שימוש ב"שכל הישר" Common-sense. הדיון בספר הישר של רבנו תם על ההשוואה בין המעבר מהאיבר הראשון לשני לכל מעבר אחר מראה על הבנה של עקרון האינדוקציה. בין אם נניח שהוכחת דין המשנה היא כרב אשי, בין אם נניח שהלמוד מהתורה הוא על צרת הצרה ומכאן והלאה משתמשים באינדוקציה, ובין אם נניח שכל המקרים נלמדים מהתורה, ברור שדין המשנה עצמו מציג מקרים תיאורטיים ולא מקרים מציאותיים. דין צרת הבת הוא הכולט ביותר והמשמעותי ביותר בין הדינים בהם חלוקים בית שמאי ובית הלל, (ראה משניות עדויות ד' ח'). אפשר להניח על כן כי המשנה הנדונה שהיא כבית הלל נוסחה בתקופה סמוכה לתקופת שמאי והלל.

הסברו של התנא רבי יונתן לרברי המשנה ותורת כהנים "עד שימעט הקרן" היא פרשנות הכרחית, ועל כן אפשר לקבוע כי במשנה ובתורת כהנים מופיעה הוכחה באינדוקציה.

הערה

כדי להימנע ממכשול חשוב להדגיש שאין מאמר זה בא לטעון או ליצור רושם כאילו חכמי התלמוד "ידעו הכל". הם עצמם הכירו במגבלות ידיעותיהם: הן בתורה — אגן ה"אחשתרנים בני הרמכים" מי ידעין? (מגילה יח ע"א) (וראה גם "בטלו האשכולות" משנה סוטה ט' ט'), והן בתחומי המדעים — נהירון לי שבילי דשמיא כשבילי נהרדעא לבר מכוכבא דשביט דלא ידענא מאי ניהו! (ברכות נח). תרגום חופשי: מוכרים לי מסלולי השמים (כוכבי הלכת השמש והירח) כרחובות עירי נהרדעא, פרט למסלול כוכב השביט (יש רק אחד!) שאיני יודע מה הוא. יתרה מזו, בנגוד לעקרון המקובל של עובדי עבודה-זרה קבעו חכמים שהם בני-טעות, רבא ביקש מתלמידיו שלא יבטלו את דעתם בפני דעתו

כשהם סבורים שטעה (בכא בתרא קל ע"ב). בענין דרך תנועת השמש והירח על גבי הרקיע אמר רבי שמעון בן יוחאי: הדבר קשה מאד ואי אפשר לכריות לעמוד עליו, אין אנו יודעים אם פורחין הן באויר וכו'" (בראשית רבה פ"ו). חכמינו קבעו כי אין תורה בגויים אך "יש חכמה בגויים תאמין" והשתדלו להרבות דעת מכל מקור אפשרי (פסחים צד ע"ב), ומרובים המקומות בהם יש הערכה לבעל ההגיון עוקר ההרים, ולכל המממש את הנאמר בתורה על התורה: כי היא חכמתכם ובינתכם.

- [1] G. Vacca: Maurolycus, The First Discoverer of the Principle of Mathematical Induction, Bulletin American Mathematical Society 16 (1909), p. 70-73
- [2] Nachum L. Rabinovitch: Rabbi Levi Ben Gershon and the Origins of Mathematical Induction, Archive for History of Exact Sciences, 16 (1969/1970) p. 237—247
- [3] Roshdi Rashdi, L'induction mathématique: al-Karaji, as-Samaw'al, Archive for History of Exact Sciences 9 (1972/73) p. 1-21
- [4] Paul Ernest, Mathematical induction a recurring theme, The Mathematical Gazette 1982 p. 120—125
- [5] Yedegary Mohamad, The use of mathematical induction by Abu Kamil Shuja ibn Aslam (850—890) Isis 69 (1978), no. 247, 259—262
- [6] AMS abstract 80e: 01005