

חישוב הסתברותי במשנה

אלכס קליין

קבלת החלטה במקום ספק

כלי להגיע להגדרות פורמליות או אפילו למושגים מוגדרים בצורה מתמטית של תורת ההסתברות המודרנית, חז"ל השתמשו באותם רעיונות הקיימים מתחת הלבוש המתמטי לשם פתרון בעיות שונות ולשם קבלת החלטות סבירות ומתחייבות ע"פ חוקי ההגיון, למשל אם קיים ספק בנוגע למציאות היכולה להיות A או B, כל אחת בהסתברות מסויימת, כאשר הפעולה הנדרשת תלויה במציאות של A או של B. בכונתי להציג דוגמא אחת בה חז"ל הגיעו למסקנה המתחייבת מחישוב הסתברותי פשוט, כאשר היתרון הבלעדי של תורת ההסתברות הפורמלית הוא היכולת התיאורטית לקבוע קריטריון מדויק וחד-משמעי תחת השערות מסויימות.

המחלוקת בין ר' טרפון לבין ר' עקיבא במעילה

בויקרא ה', ט"ו מובא דינו של המועל: "נפש כי תמעול מעל וחטאה בשגגה מקדשי ה' והביא את אשמו לה' איל תמים מן הצאן בערוך כסף שקלים בשקל הקדש לאשם ואת אשר חטא מן הקדש ישלם ואת חמישיתו יוסף עליו ונתן אותו לכהן והכהן יכפר עליו באיל האשם ונסלח לו". זאת אומרת שהנהנה מחפץ השייך להקדש חייב להביא קרבן אשם, שהוא איל, והוא צריך לשלם סכום כסף השווה לערך מעילתו בתוספת של חומש.

במקרה של ספק מעילה, זאת אומרת אם הוא מסופק אם אמנם מעל או לא, אינו חייב אלא להביא קרבן אשם תלוי. אבל, אם אחר כך התברר בוודאות שהוא אמנם מעל, אז הוא חוזר לדין הרגיל של מעילה, והוא חייב להביא קרבן אשם נוסף. שהוא אשם ודאי, ולשלם את ערך מעילתו עם התוספת של חומש.

ונשאלת השאלה: למי שספק מעל, מה כדאי לו לעשות מבחינה כלכלית? אם הוא מביא אשם תלוי, ובוהו הוא חושב לחסוך את ערך המעילה, קיים החשש שיתברר אח"כ שהוא אמנם מעל בוודאות, ואז יוצא שהוא הוציא אשם תלוי בחנם. מאידך, אין בטחון שיתברר שאמנם מעל בוודאות, ואז אולי כדאי לו להסתכן.

ויש מחלוקת במסכת כריתות (פרק ה' משנה ב') בין ר' עקיבא ור' טרפון בנדון. ר' טרפון הוא בדעה שכדאי, במקרה של ספק, להביא מיד קרבן אשם ולשלם ערך מעילתו, ועל המועל להתנות: "אם ספק מעלתי, הקרבן הזה הוא אשם תלוי והמעילה מתנה להקדש, ואם יתברר אח"כ שודאי מעלתי, הקרבן הוא אשם ודאי, והמעילה מעילה". ובכך, לפי ר' טרפון, הוא חוסך אשם אחד במקרה שיתברר אח"כ שאמנם מעל בודאות.

ר' עקיבא סובר בצדק שלא תמיד כדאי להתנהג בצורה הזאת: "נראים דבריך במעילה מועטת" אם ערך המעילה נמוך, ביחס לערך האשם, אז כדאי לו — אבל "הרי שבא על ידו ספק מעילה במאה מנה לא יפה לו שיביא אשם בשתי סלעים ואף יביא ספק מעילה במאה מנה". אם ערך המעילה גבוה, כדאי לו יותר להביא אשם תלוי בהתחלה, כאשר קיימת אפשרות שאף פעם לא יתברר הספק, ולא יצטרך בסופו של דבר לשלם את ערך מעילתו. והמשנה מסכמת: "הא מודה ר' עקיבא לר' טרפון במעילה מועטת".

מושג התוחלת

בתורת ההסתברות, התוחלת של ניסוי מקרי מסויים הוא הממוצע שהיה מתקבל לו היו חוזרים על אותו ניסוי מספר גדול מאוד של פעמים. למשל, אם היו משחקים את המשחק הבא: מטיילים קוביה פעם אחת: אם מקבלים 6 אז זוכים בפרס של 60 ש"ח, אחרת גובה הפרס הוא 6 שקלים בלבד. כדי לחשב את תוחלת הפרס, מחברים את ערכים השונים של גובה הפרס, כל ערך משוקלל ע"י ההסתברות לקבל אותו ערך. ואז נקבל בדוגמא הנ"ל:

$$E(X) = 60 \times 1/6 + 6 \times 5/6 = 15$$

או באופן יותר כללי, אם קיימות שתי אפשרויות בלבד, X_1 ו- X_2 כל אחת בהסתברות P_1 ו- P_2 בהתאמה:

$$E(X) = X_1 \cdot P_1 + X_2 \cdot P_2$$

לפי הדוגמא הנ"ל, ברור שהזוכה אף פעם לא יקבל בדיוק 15 שקל, כאשר התוחלת אינה למעשה אלא גובה ממוצע של כל הזכויות של האנשים המשחקים את המשחק הנ"ל, אבל משתמשים בנתון הזה כדי לאמוד את "ערך" המשחק, לדעת אם כדאי לשחק בו, או לחשב עד איזה סכום כדאי לשלם כדי להשתתף בו.

במקרה שלנו מתאים שמוש בתוחלת. קיימות שתי אפשרויות, שהספק יהפוך לודאי או שלא, וכל אחד משני המקרים האלה כרוך בהוצאה מסויימת, ואז אפשר לחשב את תוחלת העלות.

חישוב תוחלת ההוצאה

נגדיר:

- a — מחיר האשם
- m — ערך המעילה
- p — הסתברות שהספק יהפוך לודאי
- X — סך הכל הסכום שעל המועל לשלם.

במקרה שהמועל מחליט שלא לשלם את המעילה כל עוד הספק קיים אז X יהיה שווה ל- a בהסתברות $1-p$ ול- $2a + 6m/5$ (א לפני שהתברר הספק, ו- $a + 6m/5$ אחרי) בהסתברות p . ולכן נוכל לחשב את התוחלת:

$$E(X) = a(1-p) + (2a + 6m/5)p$$

$$E(X) = a - ap + 2ap + 6mp/5$$

$$E(X) = a + ap + 6mp/5$$

חישוב התנאי על ערך המעילה

לפי רבי טרפון, כדאי לשלם בכל מקרה $a + 6m/5$ מיד, ור' עקיבא מסכים אתו במקרה ש- m הוא קטן. לפי מה שהסברנו, יהיה כדאי לשלם מיד $a + 6m/5$ במקרה שסכום הזה יהיה פחות מ- $E(X)$. ז.א.

$$a + 6m/5 < E(X)$$

ואנחנו יכולים לחשב עכשיו את ערך הגבולי של m (ערך המעילה) כדי שיהיה כדאי לשלם מיד

$$a + 6m/5 < a + ap + 6mp/5$$

$$6m/5 < ap + 6mp/5$$

$$6m/5 (1-p) < ap$$

$$m < 5ap/6(1-p)$$

אפשר בקלות להעריך את a (ערך האשם) ואת m (ערך המעילה). אמנם הרבה יותר קשה הוא לאמוד את p (ההסתברות שהספק יהפוך לודאי) כאשר אין בסיס במציאות לחישובו המדוייק. המועל עצמו אולי, המכיר היטב את הסיבות למעילתו, יוכל להגיע לערך שיהיה אפשר להסתמך עליו, כך שיוכל לקבל החלטה אופטימלית מבחינה כלכלית. אם נתונים a ו- m נחשב איזה תנאי צריך לקיים p כך שיהיה כדאי לשלם מיד

$$\begin{aligned}
 6(1-p)m &< 5ap \\
 6m - 6pm &< 5ap \\
 6m &< p(5a + 6m) \\
 p &< 6m/(5a + 6m) \quad \text{ולכן:}
 \end{aligned}$$

לשם המחשת הדבר, אם למשל $a = m$, אזי p צריך להיות גדול מ- $6/11$ כדי שיהיה כדאי לשלם מיד את המעילה במלואה. אם m יותר גדול, נניח $2a$ למשל, נוכל להסתפק ב- p השווה ל- $12/17$.

סכום

חז"ל לא הגיעו לאי שיויונים הנ"ל. אמנם הם הגיעו למעשה לאותה תוצאה, על סמך הגיון פשוט, ומסקנתם מתאימה למסקנה המתחייבת מחישובים הסתברותיים, כך שאין שום סתירה בין שני השטחים הנ"ל, ולהיפך התחום ההלכתי יכול להסתמך על התחום המתמטי. במסגרת המאמר הקצר הזה לא דברנו על תורת הספקות של חז"ל, שהרבה יותר קשה להתאימה לתורת ההסתברות, וכנראה מסתמכת על בסיס שונה לחלוטין.