הפשטה מתמטית של הקל וחומר ־
ע"פ ספר "הליכות עולם"

מאיר ברכפלד*

אחת משלש עשרה מדות שהתורה נדרשת בהן לשיטת ר' ישמעאל היא הק"ו. מדה זו נבדלת היא משאר המדות בכח ההגיון הפועל בה:

"והדעת תחייב זה, שאם זה הקל נמצאת בו זאת החומרא, זה החמור כל שכן שתהיה בו אותה החומרא."

במאמר זה המתבסס על נתוח כללי הק"ו המובא בספר הליכות עולם [שער ד' פרק ג'], נציע מודל מתמטי־לוגי לתאור פעולות ההסק ע"י מדה זו. נעיר כי המודל נבנה צעד אחר צעד בהתאם למפורש ב"הליכות עולם". אמנם, קרוב לודאי, שמחבר הספר לא התכוון בניתוחו למודל המוצע, אך נשתדל להראות כי המודל הוא אכן הפשטה מתמטית של הדברים. נעיר גם כי הק"ו פועל בשני כיוונים: להטיל חומרא מהקל על החמור [קל וחומר] ולהטיל קולא מהחמור על הקל [חומר וקל]. אנו נתמקד ללא הגבלת הכלליות בכוון הראשון [קל וחומר] כאשר הכוון השני סימטרי לחלוטין.

נפתח בהגדרות וסימונים:

כאשר A נושא הלכתי, תהי $H(A)$ = קבוצת החומרות של A.

אם $h_i \in H(A)$, נסמן זאת ע"י $h_i(A)$. אחרת, $\sim h_i(A)$

L יסמן את הלמד. $M_1, M_2 \ldots$ יסמנו מלמדים.

d יסמן את הדין אשר ברצונינו להטיל על L.

אם M עניין שיש בו d, נסמן זאת ע"י $d(M)$.

מקרה כללי של ק"ו

כותב בעל "הליכות עולם" [אשר נתייחס עליו בהמשך כ"המחבר"]:

"... אם זה הקל נמצאת בו זאת החומרא, זה החמור לא כל שכן שתהיה בו זאת החומרא"

בסימון מתמטי:

---

* המאמר נערך ע"י אברהם בבקוף, יוסף מרמלשטיין ומשה קופל.

$$\begin{array}{ll} (1) & H(M_1) \subset H(L) \\ (2) & d(M_1) \\ \hline \therefore & d(L) \end{array}$$

נעיר שאם ההכלה ב- (1) אינה ממש, פעולת ההסק אינה ק"ו, אלא "מה מצינו".

פירכות לק"ו

ישנם שני סוגים של פירכות לק"ו: א. פירכא מסופא דדינא ב. פירכא מעיקרא דדינא.

א. פירכא מסופא דדינא.

מנוסחה (1) נובע ש- $(\exists h)(h \in H(L) \setminus H(M_1))$, אבל $\sim(\exists h_1)(h_1 \in H(M_1) \setminus H(L))$.

פירכא מסופא דדינא מראה שהעובדה ש- $h \in H(L)$ אינה סיבה להטיל את d על L, בכך שמראים קיום עניין פלוני M_2 כך ש- $h \in H(M_2)$, ואנו יודעים בברור של- M_2 אין את הדין d. במלים: החומרא h אינה רלוונטית ביחס לקביעה האם להטיל את d על עניין מסויים.

וכך כותב המחבר:

"... ופעמים עושה פירכא אסוף דינא. פירוש, כשאומר פלוני שחמור בכך וכך, אינו דיו שנחמיר עליו וכו'. ופריך: ופלוני יוכיח, שאין אותה חומרא גרמת דבר! ... ואסוף דינא פרכינן מעלמא שאומר: פלוני יוכיח שאין גורמת דבר חומרת הלמד שמכחה אתה בא ללמד עליו לומר: כיון שחמור בכך, דין הוא שיהא חמור בדבר פלוני, שהרי פלוני יש בו אותה חומרא, ואפילו הכי אין בו אותו הדין. אף אתה אל תתמה על זה הלמד אם לא נתן בו זה הדין, ואעפ"י שחמורה באותה חומרא."

בסימון מתמטי: נסמן ב- $IR_+(d)$ את קבוצת החומרות שאינן רלוונטיות ביחס לקביעה האם להטיל את d על עניין פלוני. אזי:

$$IR_+(d) = \{h: (\exists X)(h(X) \land \sim d(X))\}$$

תנאי הכרחי אם כן לקיום ק"ו:

$$(\exists h)(h \in H(L) \setminus H(M) \land h \notin IR_+(d))$$

כלומר, ניסוח יותר מדוייק של נוסחה (1) הוא:

$$(1^*) \qquad H(M) \subset H(L)\backslash IR_+(d)$$

ב. פירכא מעיקרא דדינא.

פירכא מעיקרא דדינא היא סוג יותר שכיח ויותר מורכב של פירכת ק"ו. לפעמים פירכא מעיקרא דדינא מתפתחת לסידרה של טיעונים המפריכים ומקיימים את הק"ו לסירוגין. בהמשך המאמר נבאר את הטיעָנים האלה לפי הסדר.

I: הפרכת הק"ו:

הפרכת ק"ו מעיקרא דדינא היא שלילת הנחה (1) ע"י כך שמראים קיום חומרא במלמד שאינה בלמד. וכך כותב המחבר:

"משיבין על הק"ו אם יש להשיב. וכך המדה: אם יש במלמד חומרא אחת... ואינה בלמד, אפילו יש בלמד כמה חומרות ... שאינם במלמד. וסותרים הק"ו בכך. ואין למדין ממנו ... להחמיר, דאיכא למימר, כמו שיש בו אותה חומרא .. כמו כן זאת. אי נמי, שמא אותה חומרא עדיפא מכל שכנגדרה לגרום אותו דבר. וזוהי פירכא אעיקרא דדינא בכוליה גמרא, דפריך: מה לפלוני שכן חמור בכך וכך, תאמר בזה שאין בו וכו'. פרוש עיקרא דדינא: ממקום שבאת, דהיינו המלמד גופיה יש תשובה ... . כללא דמילתא בכוליה גמרא: אעיקרא דדינא פרכינו מגופיה: מה לפלוני שכן חמור בכך וכך תאמר בזה שאינו חמור בכך וכך. ובלבד שפשוט וידוע שאין אותה חומרא בזה הלמד. דאל"כ, נימא היא גופא תיתי בק"ו, כלומר, היא עצמה, נלמוד בק"ו כמו זאת."

כלומר, הק"ו מופרך כאשר נוסחה (1) לא מתקיימת מכיון ש:

$$(3.1) \qquad (\exists h_1)(h_1 \in H(M_1)\backslash H(L))$$

II: קיום הק"ו:

הנחת הפירכא ב-I היא ש-(3) מעמידה את האפשרות ש- $d(M_1)$ רק בגלל ש- $h_1(M_1)$. קיום הק"ו כאן הוא סתירת אפשרות זאת ע"י כך שמראים שיש עניין M_2 כך ש- $h_1(M_2)$ ~ ובכ"ז $d(M_2)$.

וכך כותב המחבר:

"ופעמים כשפריך אעיקרא דדינא: מה לפלוני שכן וכו'. חוזר הגמרא ומקיים הק"ו ממקום אחר ואומר: פלוני יוכיח שאין אותה חומרא גורמת הדין, שכן פלוני אין בו אותה חמורא, ויש בו אותו הדין. הילכך קל וחומר במקומו עומד."

בסימון מתמטי:

$$(4.1) \qquad (\exists M_2)(\sim h_1(M_2) \wedge d(M_2))$$

ז"א: מציאות החומרא h_1 ב- M_1 אינה גוררת אחריה מציאות d ב- M_1. נאמר אז ש- h_1 אינה רלונטית בקביעה האם M_1 חמור מ- L ביחס ל- d. את קבוצת כל החומרות שאינן רלונטיות בקביעה האם עניין הלכתי חמור מ- L ביחס ל- d נסמן ע"י: $IR_{-}(d,L)$. בהמשך נציג הגדרה רקורסיבית של הקבוצה הנ"ל.

תנאי מספיק אם כן לקיום ק"ו (בהנחה ש- $d(M_1)$):

$$(1^{**}) \qquad H(M_1)\backslash IR_{-}(d,L) \subset H(L)$$

III: פירכא מס 2:

במצב זה הפרכת הק"ו דומה לפירכא ב- I : מראים קיום חומרא h_2 ב- M_2 שאינה בלמד ואולי זאת הסיבה ש- $d(M_2)$. וכיון שכך, M_2 אינה יכולה לשמש כדוגמא לכך ש- $h_1 \in IR_{-}(d,L)$.

וכך כותב המחבר:

"... ואם יש ביוכיח זה שום מעלה שאינה בלמד שלנו, עושין ממנה פירכא: מה לפלוני היוכיח שכן יש בו כך וכך, תאמר במלמד זה שאין בו כך וכך, ולא נלמוד דבר."

בסימון מתמטי:

$$(3.2) \qquad (\exists h_2)(h_2 \in H(M_2)\backslash H(L))$$

IV: קיום הק"ו מערכה ב':

קיום הק"ו בשלב זה דומה לקיום בשלב II: מראים $h_2 \in IR_-(d,L)$ ע"י כך שמצביעים על עניין M_3 כך ש- $\sim h_2(M_3)$ ובכ"ז $d(M_3)$

$$(4.2) \qquad (\exists M_3)(\sim h_2(M_3) \wedge d(M_3))$$

ישנן שתי אפשריות:

i) $M_1 \neq M_3$.

וכותב המחבר:

"ולפעמים כי לא אתי חדא מתרתי, מייתי חדא מתלת."

נוכל במצב זה לחזור ולהפריך הק"ו ע"י:

$$(3.3) \qquad (\exists h_3)(h_3 \in H(M_3) \backslash H(L))$$

ולקיים הק"ו ע"י:

$$(4.3) \qquad (\exists M_4)(\sim h_3(M_4) \wedge d \in M_4)$$

כאשר $M_4 \notin \{M_1, M_2\}$.

ובאופן כללי אם הפרכנו הק"ו ע"י:

$$(3.k) \qquad (\exists h_k)(h_k \in H(M_k) \backslash H(L))$$

נוכל לקיים הק"ו ע"י:

$$(4.k) \qquad (\exists M_{k+1})(\sim h_k(M_{k+1}) \wedge d \in M_{k+1})$$

כאשר $M_{k+1} \notin \{M_1, \ldots, M_{k-1}\}$.

באופן מפתיע, סדרה רקורסיבית זו של פירכות וקיומים [שהיא בעלת פוטנציאל אינסופי] טמונה ב־ (**1). כאשר $IR_{-}(d,L)$ מוגדר ככה:

$$IR_{-}(d,L)=\{h_i:(\exists X)(\sim h_i(X)\ \Lambda\ d(X)\ \Lambda\ [h_j\in H(X)\backslash H(L)\ \rightarrow\ h_j\in IR_{-}(d,L)]\}$$

דוגמא לכך: במס' חולין, פרק כל הבשר [דף קטו:] הגמרא דנה במקור לאיסור הנאה בבשר בחלב:

"... אין לי אלא באכילה. בהנאה מנין? אמרת ק"ו; ומה ערלה שלא נעבדה בה עבירה אסורה בהנאה, בשר בחלב שנעבדה בו עבירה אינו דין שאסור בהנאה?!

(I) מה לערלה שכן לא היתה לה שעת הכושר.

(II) חמץ בפסח יוכיח שהיתה לו שעת הכושר ו־ [בכ"ז] אסור בהנאה.

(III) מה לחמץ בפסח שכן עונש כרת (IV,i) כלאי הכרם יוכיחו שאין עונש כרת, ואסור בהנאה."

ii) $M_1=M_3$: זהו מצב של "וחזר הדין".

וכך כותב המחבר:

"... ואם אותה המעלה לא נמצאת במלמד הראשון, אומר פלוני הראשון יוכיח שאין הדבר תלוי בכך. ובכל דוכתא כשיגיע הגמרא לידי כך אומר: וחזר הדין, לא ראי זה כראי זה, ולא ראי זה כראי זה. הצד השוה וכו'. כלומר: מעתה חזרנו חלילה לכל הפירכות דקא פרכת: מה לפלוני שכן וכו'. פלוני יוכית. מה לפלוני היוכיח שכן וכו'. פלוני הראשון יוכיח, אין לדבר סוף. הילכך, אי לא אתיא חדא מחדא כדבעינן מעיקרא, תיתי השתא חדא מתרתי במה הצד. פירוש: במה מצינו בהצד השווה, והיינו לא ראי זה כראי זה ולא ראי זה כראי זה הצד השוה. כלומר, הואיל ולא ראי זה כראי זה וכו', הילכך יש לך לבקש הצד השוה שבשניהם שגורם אותו הדין ומאותו הצד נלמוד כל הדומה לו."

במקרה ש־ $M_3=M_1$; חוזר הדין, המחבר מתאר מצב של לולאה אינסופית. ב־ M_1 יש חומרא שאינה ב־M_2 וב־ M_2 יש חומרא שאינה ב־ M_1. יוצאים מהלולאה האינסופית

ע"י הכרזת צד השוה. נעיר שמצב של 'וחזר הדין' יכול להתהוות גם אם $M_3 \neq M_1$ אבל $M_4 = M_1$ וכו'.

סימון של הסקת ק"ו בעזרת צד השוה:

$$(1^{***}) \qquad \bigcap_i H(M_i) \subset H(L)$$

$$(2^{***}) \qquad \bigwedge_i d(M_i)$$

$$\therefore \; d(L)$$

נעיר שוב שאם ההכלה ב- (1^{***}) אינה ממש, פעולת ההסק היא "מה מצינו".

דוגמא לכך: במס' קידושין פרק האשה נקנית [דף ה.]:

"חופה קונה מק"ו: מה כסף שאינו גומר קונה, חופה שגומרת אינו דין שתקנה?!

(I) מה לכסף שכן פודין בו הקדשות ומעשר שני

(II) ביאה תוכיח (לא שייך פדיון הקדשות, וביאה קונה)

(III) מה לביאה שכן קונה ביבמה

(IV,ii) כסף יוכיח. וחזר הדין; לא ראי זה כראי זה, ולא ראי זה כראי זה. הצד השוה שבהן שקונין בעלמא וקונין כאן, אף אני אביא חופה שקונה בעלמא וקונה כאן."

V: הפרכת צד השוה:

נניח שהגענו ל- (IV,ii). המחבר דן בשלשה סוגים של פירכות לצד־השוה: א) פירכא סטנדרטית ב) צד החמור ג) כל דהו.

א) פירכא סטנדרטית.

הפרכת צד השוה בצורה הסטנדרטית נעשית ע"י מציאת חומרא משותפת ל- M_1 ו- M_2, שאינה ב- L.

וכך כותב המחבר:

"... ואם נמצא שום מעלה שוה בשניהם שאינה בלמד, עושין ממנה פירכא

לסתור המה־הצד כמו חדא מתרתי כדקאמר בכל דוכתא: מה להצד השוה שבהם שכן יש בהן כך וכך. תאמר בזה שאינו שוה להם בכך."

כלומר (***1) לא מתקיימת מכיון ש:

$$(5) \qquad (\exists h)(h \in (\bigcap_{i} H(M_i) \backslash H(L))$$

ב) צד החמור.

ישנם כמה מקרים חריגים, בהם סותרים צד־השוה בטענת "צד־החמור". ז"א: לא נסיק $d(L)$, כיון שיש ב־ M_1 חומרא שאינה ב־L, וכן ב־M_2 חומרא [אחרת] שאינה ב־L. נוכל לסמן זאת כך:

יהי $h_1 \in H(M_1) \backslash H(L)$ ו־$h_2 \in H(M_2) \backslash H(L)$. נסמן $h = (h_1 \vee h_2)$

אמנם $h_1 \notin H(M_1) \cap H(M_2)$, $h_2 \notin H(M_1) \cap H(M_2)$

אבל:

$$(5^*) \qquad h \in H(M_1) \cap H(M_2) \backslash H(L)$$

לכן h יכול לשמש כפירכא לק"ו כמו ב (5).

דוגמא לכך: בפרק אילו נערות [דף לב.] הגמרא מנסה ללמוד את הכלל: כל היכא דאיכא ממון ומלקות, ממונא משלם, מילקא לא לקי:

"... אלא גמר מתרייהו [חובל בחבירו, ועדים זוממין] מה הצד השוה שבהן דאיכא ממון ומלקות, ממונא משלם, מילקא לא לקי, אף כל היכא דאיכא ממון ומלקות, ממונא משלם, מילקא לא לקי. מה להצד השוה שבהן שכן יש בהן צד־חמור [דהיינו, (*5), עיין בסוגיא וברש"י שם]."

אבל שים לב שקיומם של h_1 ו־ h_2 כנ"ל מובטח היות ואנו נמצאים בשלב של צד השוה; מצב שיתכן רק אחרי מעבר דרך (3.1) ו־(3.2) ?!

וכותב על זה המחבר:

"... ופליאה דעת הכל, דאם באת לחבר החומרות ולא בעינן צד־שוה [חומרא משותפת] אם כן בטלת כל מה הצד השוה שבגמרא. ולא הנחת חיי לכל

מה הצד, שאין לך מה הצד שאין בשניהם חומרות או קולות חלוקות."

המחבר מצטט שני תירוצים "דחוקים", המובאים בתוס' בסוגיא הנ"ל, ד"ה "שכן" בשם ר"י ור"ת, עיין שם.
הרמב"ן מתרץ שדחיית צד־השוה ע"י צד־החמור [(5*)] נעשית רק במקרה שהדין נלמד לכתחילה ע"י "מה־מצינו". ז"א, אם $H(L) = H(M_1) \cap H(M_2)$, סותרים צד־השוה ע"י טענת צד החמור ["... כיון שאין בלמד שום מעלה על המלמדים, וכבר מצינו בכל אחד מהם מעלה מיוחדת על הלמד, אם כן, אין לי ללמוד מהם ליתן זה (d) בלמד."]
ואם הדין נלמד לכתחילה ע"י ק"ו, ז"א $(\exists h)(h \in [H(L) \setminus H(M_1) \cap H(M_2)])$, דוחין הצד השוה רק ע"י חומרא משותפת [(5)].

ג) כל דהו

כל דהו c , הוא איזושהי תכונה שאינה לא קולא ולא חומרא. לפעמים הגמ' דוחה לימוד של צד השוה ע"י מציאת כל דהו משותף ל־ $M_1,M_2,...$ במקום חומרא משותפת:

$$(5^{**}) \qquad (\exists c)(\bigwedge_{1} c(M_i) \ \wedge \ {\sim} c(L))$$

כל זה בנוגע להפרכת צד השוה ע"י כל דהו. אך מה בנוגע להפרכת ק"ו -- שעוד לא הגיע לשלב של צד־השוה -- ע"י כל דהו?

המחבר מסביר שאכן (5**) יכול לתפוס את מקומו של (3.2), אבל (5**) אינו יכול לשמש כפירכא אלטרנטיבית ל־ (3.1) או (3.k) עבור $k \geqslant 3$. המחבר ער לבעיתיות הלוגית שכללים אילו יוצרים.

וכך כותב המחבר:

"... ויש כאן מקום עיון מה טעם חדא מתרתי פרכינן כל דהו ואפי' מקמי דלהדר דינא, וחדא מתלת לא פרכינן כל דהו אלא בתר דהדר דינא, ומקמי הכי לא פרכינן אלא קולא וחומרא, ולכאורה אדרבא, איפכא מסתברא!"

המחבר מתרץ תירוץ מודחק "לפי קוצר דעתי". ומוסיף המחבר:

"ורש"י ז"ל אומר: כך המדות מסורות לנו מסיני".