

על דיוק אריתמטי במשנה

דוד י. סלוצקין*

בהרכה משניות אנו מוצאים שימוש במספרים שלפעמים נראים שרירותיים ולפעמים לא מדוייקים. דומה אבל, שאם נטרח להסביר את השימוש במספרים אלה דווקא, נצליח להבין את דברי התנאים באופן יותר עמוק. במאמר זה נביא שלוש דוגמאות של דיוק מפליא בשימוש במספרים במשנה.

I. אין המשוחות ממצין את המידות.

שנינו במשנה עירובין ד:יא:

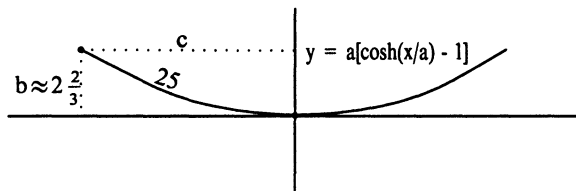
”מי שהחשיך חוץ לתחום אפילו אמה אחת לא יכנס, ר' שמעון אומר: אפילו

חמש עשרה אמות יכנס שאין המשוחות ממצין את המידות מפני הטועין.”

כוונת ר"ש היא שמכיון שהמודרין לא מתחו את החבל עד הסוף, נמצא שאותו מקום שסימנו כאלפיים אמה אינו אלא פחות מזה. ונשאלת השאלה איך הגיע ר"ש למספר חמש עשרה כגודל האי-דיוק של המדידה.

נראה שהמספר הזה אינו שרירותי כלל. וההסבר הוא כך :

מעשה המדידה היה בחבל באורך בדיוק חמישים אמה שהיו מחזיקין בגובה הלב (משנה שם ה:ד) עכשיו אם נבוא לשער כמה לא היו מותחין נמצאת אפשרות אחת בלבד. שהרי כבר בהרפיה מועטת אמצע החבל היה מגיע עד הארץ. ומאידך בוראי לא היו נותנין לחבל לשכב על הארץ ממש. נמצא כמעט בבירור שהיו מרפים עד שאמצע החבל נגע בארץ, לא פחות ולא יותר. וראיה לדבר שזו הדרך היחידה שהיו יכולים להרפות באופן אחיד בכל מדידה ומדידה.



בציור הזה b הוא גובה הלב של המורד ו- c הוא המרחק בין כל אחד מהמודרין והנקודה האמצעית. הפונקציה המגדירה חבל תלוי משני קצותיו היא :

$y = a[\cosh(x/a) - 1]$ כאשר a הוא פרמטר המאפיין את מידת השיפוע של החבל. נמצא

$$a \cdot \cosh(c/a) = b \quad \text{ו} \quad \sinh(c/a) = 25$$

* המאמר הזה נלקט, תורגם ונערך ע"י משה קופל מתוך כתבי ד. י. סלוצקין

מכיון שיש כאן שתי משוואות בלתי תלויות בשלושה נעלמים, מספיק לקבוע אחד מהנעלמים כדי לקבוע את ערכם של שני הנעלמים הנותרים. ידוע שגובה ממוצע של בן אדם עד הכתפיים הוא שלוש אמות (עיר' ד:): אז סביר לשער שגובה הלב הממוצע הוא בקירוב שלוש אמות פחות שני טפחים. מתברר שאם נקח גובה הלב הממוצע כ-2.65 אמות, כלומר: אם נקבע $b = 2.65$, אזי $c \approx 24 \frac{13}{16}$ נמצא שבכל מדידה ומדידה היו חסרים כמעט בדיוק $24 \frac{13}{16} - 2 = 50$ אמות = 375. מכיון שהיו מודדין ארבעים פעמים כדי להגיע לאלפיים אמות, נמצא שבסך הכל היו חסרים $375 * 40 = 15$ אמות, כדברי ר' שמעון (כמוכן איני טוען שר' שמעון עשה חישוב כזה. הרי לאותה תוצאה אפשר להגיע ע"י מדידה בשטח).

II. המניח איסר למעשר שני

שנינו במשנה מעשר שני פ"ד מ"ח :

"המניח איסר של מעשר שני אוכל עליו אחד עשר באיסר ואחד ממאה באיסר. בית שמאי אומרים הכל עשרה. בית הלל אומרים בודאי אחד עשר ובדמאי עשרה".

המפרשים דחקו לפרש משנה זו עד כדי כך שהכסף משנה סיכם שפירושו (ופירוש דברי שמואל בירושלמי שם) יהיה מונח עד שיבוא אליהו. נראה שבכל זאת אפשר קצת לבאר דברי המשנה ע"פ דברי הקדמונים ובפרט הר"ש ובעל תפארת ישראל.

בירושלמי שם מבואר שב"ש במשנתנו סוברים כשיטת ר' אליעזר בתוספתא שם פ"ג הט"ז: "ראה אחד שהפריש מעשר שני נאמן על הראשון". ועפ"ז נראה לפרש ש "המניח איסר למעשר שני" מדובר במקרה שאחד קנה אוכל מעם הארץ לאחר שראה שהע"ה הפריש מעשר שני בשווי של איסר. עכשיו המשנה דנה עד כמה אוכל אפשר לפטור ממעשר שני ע"י שוה איסר זה שכבר הופרש.

התנא קמא אומר: "אחד עשר באיסר ואחד ממאה באיסר". הפיסוק הנכון בשיטה זו הוא "אחד עשר ב (איסר ואחד ממאה באיסר)".

כלומר $(1 + \frac{1}{100}) * 11$, דהיינו ע"פ חוק הפילוג $\frac{11}{100}$ שהוא בקירוב $\frac{11}{9}$ (וכן פירש הר"ש שהכוונה ל- $\frac{11}{9}$, וכבר תמחו עליו כל המפרשים ובפרט בעל התוספות יום טוב שאין לשון המשנה הולם פירוש זה. אבל בעזרת חוק הפילוג דבריו נהירין). ועכשיו נראה לפרש בפשטות שמתוך $\frac{11}{9}$ איסרין של אוכל $\frac{10}{9}$ שיופרשו למעשר ראשון פטורין ממעשר שני והאיסר של עם הארץ מספיק בדיוק לעשרה איסרין הנשארים. אולם לפי ב"ש הסוברים כר"א שעם הארץ שהפריש מעשר שני נאמן גם על מעשר ראשון, אנחנו צריכים להניח לחומרא שהעני הפריש מעשר ראשון.

לכן אין כאן 10/9 הפטורים ממעשר שני וממילא אין האיסר פוטר אלא עשרה איסרין של אוכל בסך הכל. בית הלל מחלקין בין המקרה של דמאי שקיים חשש אמיתי שכבר הופרש מעשר ראשון שבו הדין כב"ש, לבין המקרה שלא קיים חשש כזה שבו הדין כת"ק. (אלא שנקטו בלשון "אחד עשר" מפני קיצור הלשון).

ועכשיו נוכל לבאר דבריו הסתומים של שמואל בירושלמי שם :

"לא מצייא תנייה. אין יסיב חד לעשרה, צריך למיסב חדא למאת. אין יסיב חדא למאת, צריך למיסב חדא לאלף. אין יסיב חדא לאלף, צריך למיסב חדא לעשרת אלפים"

. כוונתו של שמואל היא שמשנתנו לא דייק שהרי 11/100 אינו אלא 1/9 בקירוב. כרי לדייק, כלומר לבטא 1/9 במונחים של חזקות של עשירית, $1/10 + 1/100 = 11/100$, אינו מספיק. מה שצריך הוא $1/10 + 1/100 + 1/1000 + 1/10000 \dots$ שהוא מתכנס ל-1/9.

משנתנו היא מקרה של פונקציה הופכית - כלומר, ידוע כמה רוצים להפריש והבעיה למצוא מכמה להפריש. מקרה דומה נמצא בירושלמי פ"ד ה"ו (וגם שם נדחקו המפרשים לפרשו) : ... מי שיש לו כלכלה והוא מבקש לעשרה נוטל שני תישועין ותשוע של תשוע (כלומר $1/81 + 2/9$ שהוא 19/81) שהן עשר מעשר ותשוע מעשר שני. ויאמר תשוע עשרה!? (כלומר 19/100, ולמה נקט בלשון מלבר 19/81) א"ר זעירא: דברי חכמים וחידותיהם (יש חוכמה בניסוח התוספתא שהרי המספר 19/81 מאפשר החישוב הבא). הרוצה להכניס מאה תאנים מתוקנות לתוך ביתו (כלומר: הרוצה שאחרי הפרשת מעשר ראשון ומעשר שני יישאר לו מאה תאנים) הרי זה נוטל על כל תאנה ותאנה שני תישועין ותישוע של תישוע (צריך להוסיף על הסכום שהוא רוצה בסוף 19/81 של הסכום ההוא; כלומר אם הוא רוצה בסוף y תאנים הוא צריך להתחיל אם x כך ש $y = x - 19/100x$ ומזה ש $x = y + 19/81y$) שהן עשרים ושלוש תאנים ארבע [תישועין] אחד תישוע של תישוע (כלומר: אם $y = 100$ אזי $x = 123 \frac{37}{81}$; ואכן אם נחשב $100 * 19/81$ נמצא שהוא בריוק 23 37/81).

III. לשון הבאי

שנינו בחולין ד:

"אמר ר' יצחק בר נחמני אמר שמואל: בשלושה מקומות דברו חכמים לשון הבאי, אלו הן: תפוח גפן ופרוכת.

תפוח - הא דאמרן [במשנה תמיד ב:ב: תפוח היה באמצע המזבח פעמים היה עליו כשלוש מאות כור].

גפן - רתנן [במשנה מידות ג:ח] גפן של זהב היתה עומדת על פתחו של היכל... וכל מי שהיה מתגרב גרגיר או אשכול מביא ותולה בה... מעשה היה ונמנו עליה שלוש מאות כהנים לפנותה.

*[הפירוש הזה נמצא גם בספר זהב הארץ לר' חזקוני מלאכי זל - מ.ק.]

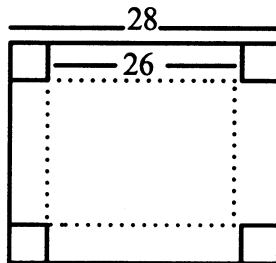
פרוכת - דתן [במשנה שקלים ח:ה] "פרוכת... ארכה ארבעים באמה ורוחבה עשרים באמה... ושלוש מאות כהנים מטבילין בה".

מעניין שבכל אחד מהמקרים האלה המספר שמופיע הוא 300. נראה שלמרות "שדברו חכמים בלשון הבאי" המספר 300 שבחרו כדי להביע את "ההבאי" אינו שרירותי כלל וכלל.

בעניין פרוכת כבר כתב הגר"א (עיין בתפארת ישראל בשקלים שם) שהמספר 300 הוא כמונח מסויים המספר המקסימלי של כהנים שהיו יכולים להטביל את הפרוכת. והנה החשבון: הפרוכת רוחבה עשרים אמה ואורכה ארבעים אמה כך שהיקפה היה $20 + 40 + 20 + 40 = 120$ אמות. מכיון שאמה של כלים חמישה טפחים (כלים יז"י) יוצא שהיקף הפרוכת היה 600 טפחים, כלומר בדיוק מספיק ל-300 כהנים להחזיק בה בשתי ידיים.

מן הראוי לנסות ליישם את הגישה הזאת של הגר"א גם לגבי שני המקרים הנותרים. אנחנו נעשה זאת עבור המקרה של תפוח. התפוח היה ערימה של דשן שהצטבר על המזבח. נחשב כמה דשן המזבח היה יכול להכיל.

לפי המשנה במידות ג:א השטח המוגדר ע"י קרני המזבח היה 26 x אמה 26 כלומר 676 אמות מר' (ראה ציור).



בהנחה שגובה הדשן לא עלה על גובה קרני המזבח דהיינו אמה אחת (ע' סוכה מג.) יוצא תכולה מקסימלית של 676 אמות מק'. עכשיו נחשב כמה כור יש ב- 676 אמות. ידוע ש- 3 אמות מק' = שיעור מקוה = 40 סאה (עיר' ד:) וגם שכור = 30 סאה. יוצא ש- 676 אמות מק' = 9013.3 סאה = 300.4 כור. כפתור ופרח !