# העיר הקרובה בסוגית העגלה הערופה

עלי מרצבך, בוריס סינגר

**הצגת הבעיה:**

"ויצאו זקניך ושפטיך ומדדו אל הערים אשר סביבת החלל. והיה העיר הקרובה אל החלל...וגו'" (דברים פרק כ"א, פסוקים ב' ו־ ג').

הפעולה הראשונה במעשה עגלה ערופה היא המדידה ואומרת הגמרא במסכת בבא בתרא (דף כג' ב'): "רוב וקרוב, הולכין אחר הרוב". כלומר אין העיר הקרובה מביאה עגלה ערופה אלא בזמן שמנין העם שבה כמו מנין העיר הרחוקה ממנה, אבל אם היו אלו שברחוקה מרובים על אנשי הקרובה ממנה הולכים אחר הרוב, והמרובים מביאים העגלה" (מדברי הרמב"ם, הלכות רוצח, פרק ט', ה' ו').

ולכן יוצא מזה, שבארץ ישראל העיר הגדולה ביותר תביא את העגלה ללא קשר למקום הימצאות החלל !

ניתן אולי להבין את הרמב"ם באופן הבא : כשמוציאים חלל מסתכלים אך ורק על שתי הערים הקרובות ביותר, ורק אז הולכים אחר הרוב. אבל לעולם לא מסתכלים על כל הערים ביחד. פירוש זה נראה קרוב מאוד לפשט המילים של הרמב"ם (ולא של הגמרא) "כמנין העיר הרחוקה ממנה"... ולכן יש רק עיר אחת שהיא רחוקה.

אולם פירוש זה אינו נראה מתאים להגיון המציאות וחלוקה כזאת מובילה למקרים בהם אם החלל נמצא קרוב מאוד מעיר בינונית, לא נביא את העגלה ממנה. אבל אם הוא נמצא רחוק יותר מהעיר הזאת אז כן נביא את העגלה ממנה! נביא בהמשך בשפה מתמטית פתרון זה.

בנוסף (למרות שזה לא מופיע בגמרא שלנו אלא בסוגית מציאת אפרוח בין שובכים) ישנו גם מושג הלכתי של "קורבא דמוכרח" כלומר, אם החלל נמצא קרוב מאוד לעיר מסוימת, אפילו אם עיר זו היא קטנה, משם יביאו את העגלה. קורבא דמוכרח מתבטא לגבי מספר הלכות. למשל כותב הרא"ם בחידושיו על רש"י "לפיכך אם היה החלל מוטל סמוך לעיר שאין ספק בו שהיא היותר קרובה אל החלל אין צריך שם מדידה" (הכוונה לפי בעל משנה־למלך, שאין צורך במדידה לערים האחרות כי ברור מהי העיר הקרובה. אבל לעיר הקרובה נשאר החיוב למדוד).

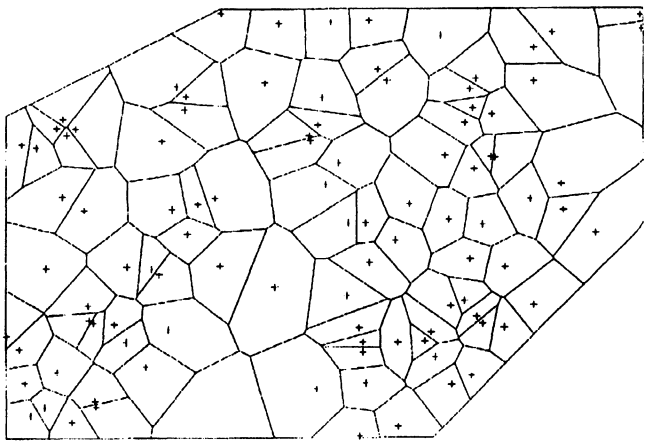
מתעוררת איפוא השאלה, האם ניתן לצייר מפה של ארץ ישראל שתציין את האזורים

השונים, כך שנדע מראש שאם נמצא חלל באזור מסוים נביא את העגלה מהעיר המתאימה לאיזור זה ?

אמנם אומרת המשנה במסכת סוטה "משרבו הרוצחים בטלה עגלה ערופה" אבל אין ספק שעקרון מצוה זו יחזור כשיתמעטו הרוצחים.

<u>הצעות לפתרון</u> :

אם כל הערים שבארץ ישראל שוות בגודלן, אין קושי לחלק את המפה לאזורי השפעה (ראה ציור 1). חלוקה זו נקראת במתמטיקה חלוקת דיריכלה והיא מוגדרת להיות חלוקה של מפה הנקבעת על ידי מספר סופי של נקודות כך שלכל נקודה מתאימה האיזור של המפה של כל הנקודות הקרובות יותר לנקודה הנתונה מאשר לנקודות האחרות.



ציור מס' 1 : הנקודות + הן הערים השונות והקוים מהווים חלוקת דיריכלה.

הנה ההגדרה המדויקת : נסמן ב - $E$ את המפה ו - $P_1,\dots, P_n$ נקודות קבועות ושונות השייכות ל - $E$. האיזור של $P_k$ מוגדר להיות הקבוצה

$$T_k = \{x : x\in E : d(x, P_k) < d(x,P_m) ,m\neq k \text{לכל}\}$$

כאשר $d(x , P_k)$ מבטא המרחק בין הנקודה $x$ לנקודה $P_k$.
כדי לצייר באופן מפורש את האזורים $T_n ,\dots, T_1$, מעבירים לכל זוג נקודות $P_i ,P_j$ את החוצה האמצעי שלהם הקובע שני חצאי מישורים. האיזור $T_i$ של הנקודה $P_i$ הוא החיתוך של כל חצאי מישורים אלו המכילים את $P_i$. ברור כי אזורים אלו הם פוליגונים קמורים. כאשר יש מספר גדול של נקודות $P_n ,\dots,P_1$, ציור האזורים נהיה די קשה וקיימות מספר שיטות

לחישוב האזורים בעזרת המחשב (עיין [2]).

הבעיה הקשה יותר היא חלוקת המפה לאזורים כאשר הערים אינן כולן שוות בגודלן.

מתוך עיון בפוסקים לא ברור מהו קורבא דמוכרח ולא מצאנו שום התיחסות לבעית חלוקת הארץ לפי אזורי השפעה.

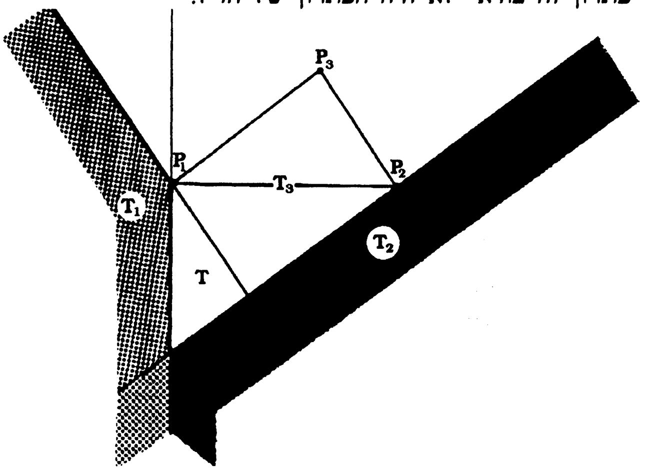
נתחיל בנסיון לפתרון המוביל לסתירה פנימית. אם לזוג ערים $P_i$, $P_j$, העיר $P_i$ קטנה יותר מהעיר $P_j$, נעביר קו ישר דרך $P_i$ הניצב לקטע המחבר את הערים $P_i$ ו־ $P_j$. חצי המישור $T_{ji}$ המכיל את $P_j$ יהיה אזור השפעה של העיר $P_j$ ביחס לעיר $P_i$, והחצי המישור $T_{ij}$ יהיה אזור השפעה של העיר $P_i$ ביחס לעיר $P_j$. נניח עתה לשם פשטות שיש רק שלוש ערים לפי הסדר $P_1 < P_2 < P_3$ (ציור 2)

אזור ההשפעה של $P_1$ הוא הקבוצה $T_{13} \cap T_{12} = T_1$

אזור ההשפעה של $P_2$ הוא הקבוצה $T_{23} \cap T_{21} = T_2$

אזור ההשפעה של $P_3$ הוא הקבוצה $T_{32} \cap T_{31} = T_3$

אולם אזורים אלו אינם מכסים את כל המפה ואם החלל נמצא במשולש $T_{32} \cap T_{21} \cap T_{13} = T$, לא ניתן להחליט על איזו עיר להטיל את האחריות של הבאת העגלה. ואכן בין $P_1$ ל־ $P_2$ האחריות היא ל־ $P_2$ ובין $P_2$ ל־ $P_3$ האחריות היא ל־ $P_3$ אך בין $P_3$ ל־ $P_1$ האחריות היא ל־ $P_1$ ! דבר זה סותר את הטרנזיטיביות של יחס הסדר ולכן פתרון זה בודאי לא היה הפתרון של חז"ל.

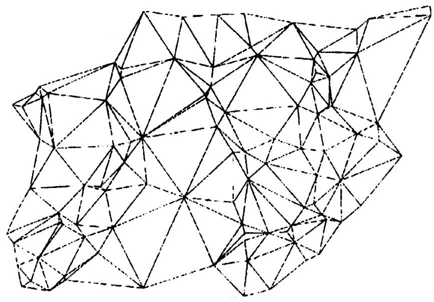



ציור מס' 2 : יש כאן שלוש ערים : $P_1 < P_2 < P_3$. אם החלל נמצא במשולש T, לא ברור מאיזה עיר להביא את העגלה.

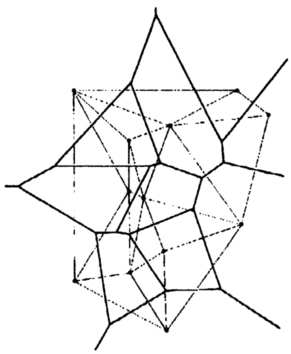
נביא כאן ארבעה פתרונות אפשריים לחלוקת ארץ ישראל לאזורי השפעה. ארבעתם מבוססים על דברי חז"ל בנושא זה למרות שלא מצאנו בחז"ל אף התיחסות מושלמת לבעיה זו.

## פתרון המשולשים :

נבנה שוב את חלוקת דיריכלה, ואז נחבר את כל הערים הנמצאות במצולעים שכנים. ניתן להוכיח שמקבלים באופן כזה חלוקת המפה למשולשים. כשמוצאים חלל, בודקים באיזה משולש הוא נמצא ואז מביאים את העגלה מהעיר הגדולה מבין שלוש הערים המהוות את קדקדי המשולש המכיל את החלל. אם שתיים או שלוש ערים מתוכן שוות בגודלן אז משתמשים בשיטת חוצי האמצעים (כלומר, חלוקת דיריכלה) אבל רק בהתיחס לאותן שתים או שלוש הערים מהמשולש (ראה ציורים 3 ו־4).



ציור מס' 3 : חלוקת המפה למשולשים. הקדקודים הם הערים.



ציור מס' 4 : בציור זה, מופיעה חלוקת דיריכלה בקוים עבים וחלוקה לפי משולשים בקוים דקים.

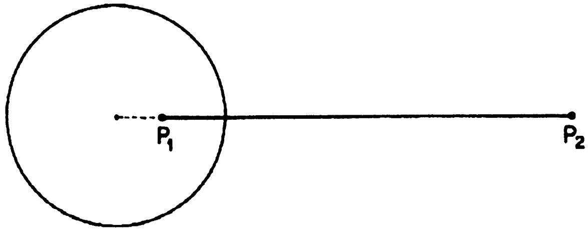
שיטה זו, שהיא מאוד הגיונית בפני עצמה, מבטלת את השפעת הערים הרחוקות מאוד מחד, אבל, מאידך, מדגישה היטב את הכלל "רוב וקרוב, הולכין אחר הרוב". "הקורבא דמוכרח" מצטמצם כנראה לארבע אמות סביב העיר הקטנה.

## פתרון המעגלים :

נניח בשלב ראשון שיש רק שתי ערים $P_1$ ו - $P_2$.
ניתן לקבוע מערכת צירים כך שכל נקודה במפה ניתנת לקביעה באופן חד־ ערכי, ונסמן אזי בזוג המספרים $(x_1,y_1)$ העיר $P_1$ וזוג המספרים$(x_2,y_2)$ עבור העיר $P_2$.
נסמן ב - $a_1$ את מספר התושבים בעיר $P_1$ וב־$a_2$ את מספר התושבים בעיר $P_2$ (אין ברצוני כאן לטפל בסוגית מספר התושבים הנדונה היטב בפוסקים, האם מדובר במשלמי מסי העיר או בתושבים הדרים בעיר לפחות 12 חודשים). הגבול בין איזור ההשפעה $T_1$ של $P_1$ לבין איזור ההשפעה $T_2$ של העיר $P_2$ הוא אוסף הנקודות $(x, y)$ שיחס מרחקם לערים $P_1$ ו - $P_2$ שווה ליחס האוכלוסיות. כלומר : הגבול הוא אוסף הנקודות $(x, y)$ המקיימות את השויון הבא :

$$a_2^2\,[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2] = a_1^2[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2]$$

רואים מיד שאם שתי הערים שוות בגודלן $(a_1 = a_2)$ אזי שויון זה מצטמצם לשויון פשוט יותר המבטא את החוצה האמצעי.
אולם אם $(a_1 < a_2)$ למשל, אזי שויון הנ"ל מבטא מעגל המכיל בתוכו את העיר $P_1$. כלומר $T_1$ : יהיה החלק הפנימי של המעגל ו- $T_2$ את החלק החיצוני שלו (ראה ציור 5).

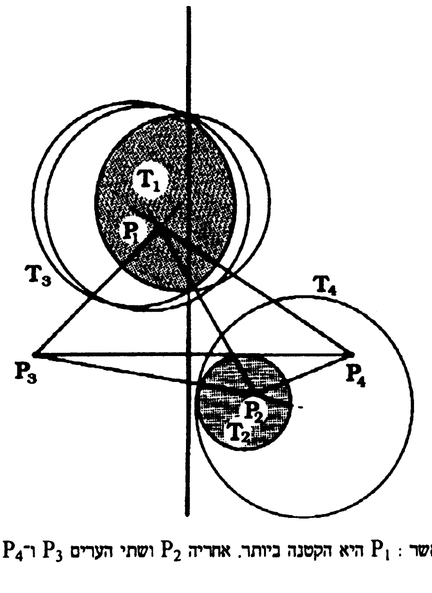



ציור מס' 5 : שתי ערים $P_1 < P_2$.

נחזור עתה למקרה הכללי עם n ערים $P_1,...,P_n$ ונסמן ב- $a_1,...,a_n$ את מספר התושבים בהתאמה. כל זוג ערים $P_i = (x_i,y_i)$ ו $P_j = (x_j,y_j)$ קובע איזורי השפעה $T_{ij}$ ו- $T_{ji}$ כאשר הגבול הוא אוסף הנקודות $(x, y)$ המקיימים את השויון :

$$a_j^2[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2] = a_i^2[(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2]$$

ואז נסמן $T_i = \bigcap_{j \neq i} T_{ij}$ לכל $i = 1,...,n$




ציור מס' 6 : בציור זה ישנן 4 ערים כאשר : $P_1$ היא הקטנה ביותר. אחריה $P_2$ ושתי הערים $P_3$ ו־$P_4$ הן הגדולות ביותר ושוות בגודלן.

ניתן להוכיח (עיין [4]) כי האזורים $T_1,..,T_n$ מכסים את כל המפה :
$\bigcup_i T_i = E$ ולכן הם מהווים חלוקה טבעית עבור הערים $P_1,.., P_n$ (ציור 6). שיטת חלוקה זו מתאימה גם כן היטב למאמרי חז"ל. היא לוקחת בחשבון את הקורבא דמוכרח, אך, ערים גדולות משפיעות הרבה גם אם נמצאות במרחק רב מן החלל.

<u>פתרון ההיפרבולות</u> :

הרעיון בשיטה זו הוא להתחשב בהפרש המרחקים (במקום ביחס המרחקים). הגבול בין שני אזורי השפעה יורכב מהנקודות מהן הפרש המרחקים לשתי ערים יהיה המספר הקבוע המחלק את הקטע בין שתי הערים בהתאם ליחס אוכלוסיות. כלומר הגבול בין שתי הערים $P_i$ ו - $P_j$ בעלי אוכלוסיות $a_i$ ו - $a_j$ בהתאמה מאופיין על ידי המשוואה :

$$d((x,y),P_i) - d((x,y),P_j) = \frac{a_i - a_j}{a_i + a_j} d(P_i,P_j)$$

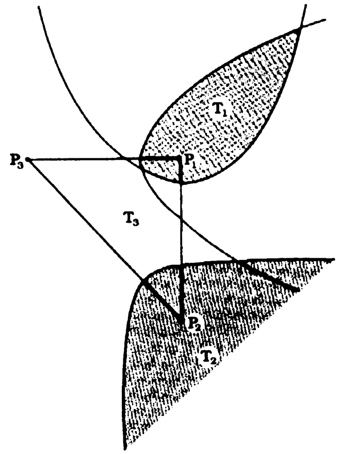
שוב אם $a_i = a_j$ מקבלים את האנך האמצעי. לעומת זאת, אם $a_i \neq a_j$ מקבלים היפרבולה, ולכן האזור $T_{ij}$ יהיה החלק הפנימי או החיצוני של ההיפרבולה, המכיל את הנקודה $P_i$
נגדיר כמו קודם $T_i' = \bigcap_{i \neq j} T_{ij}$
האזורים $T_1',..,T_n'$ אינם מכסים את כל המפה בדרך כלל :

$$E \neq \bigcup_{i=1}^{n} T_i'$$

ולכן יש לעבות אותם באופן הבא :
מסתכלים בכל הערים בעלות אוכלוסיה מירבית (זה יכול להיות עיר אחת או כמה ערים) ומציירים עבור ערים אלו את חלוקת דיריכלה שלהן (אם מדובר בעיר בודדת, החלוקה היא בעצם כל המפה). ואז נוסיף לאיזור השפעה של ערים אלו, את החלק הלא מכוסה מתוך איזור ההשפעה של חלוקת דיריכלה זו. באופן יותר מפורש. נניח כי $P_1,...,P_k$ הן הערים השוות והגדולות ביותר (כמובן $k \leqslant n$) ונסמן ב - $S_1,..., S_k$ את אזורי ההשפעה שלהן בהתאמה ביחס לחלוקת דיריכלה של $P_1,...,P_k$. ואז איזורי ההשפעה הסופיים של הערים יהיו עבור $i = 1,...,k$

$$T_i = T_i' \cup (S_i \cap (E \backslash \bigcup_j T_j'))$$

וכאשר $i = k+1,..,n$, איזור ההשפעה של העיר $P_i$ יהיה $T_i = T_i'$ (ציור 7).




ציור מס' 7 : שלוש ערים כאשר $P_1$ היא הקטנה ביותר, אחריה $P_2$ ו - $P_3$ היא העיר הגדולה.

<u>פתרון שתי הערים הקרובות (הרמב"ם) :</u>

תהיינה $P_1,P_2,..,P_n$ הערים השונות של ארץ ישראל.
לכל $i \neq j$, נסמן ב־ $T_{ij}$ החצי המישור המכיל את העיר $P_i$ ושגבולו הוא חוצה האמצעי של הקטע $P_iP_j$.

ואז נסמן :
$$S_{ij} = \bigcap_{k\neq j} T_{ik} \cap \bigcap_{k\neq i} T_{jk}$$

נשים לב כי $S_{ij} = S_{ji}$ וזהו בדיוק האזור כך ששתי הערים הקרובות ביותר לכל נקודה באיזור זה הן $P_i$ ו־$P_j$.

נסמן עתה :

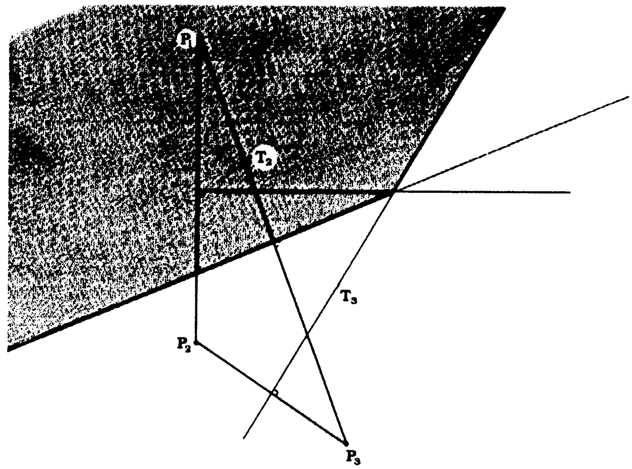
$$V_{ij} = \begin{cases} \phi & P_i < P_j \text{ כאשר} \\ T_{ij} & P_i = P_j \text{ כאשר} \\ E & P_i > P_j \text{ כאשר} \end{cases}$$

אזי אזור ההשפעה של העיר $P_i$ נתון על ידי: $T_i = \bigcup_{j\neq i}(S_{ij} \cap V_{ij})$

(ראה ציור 8).

לכאורה פתרון זה הוא פשוט ומתאים ללשונו של הרמב"ם. הבעיה היא לגבי כמעט כל עיר

בינונית, כל סביבתה שייכת לאזור השפעה של עיר אחרת למרות שאם החלל נמצא רחוק יותר, אז מאותה עיר בינונית נביא את העגלה.




ציור מס' 8 : שלוש ערים כאשר $P_1$ היא הקטנה ביותר. אחריה $P_2$ ו־$P_3$ היא העיר הגדולה. השטח הכהה $T_2$ הוא איזור ההשפעה של $P_2$ והשטח הלבן $T_3$ הוא איזור ההשפעה של $P_3$.

## מסקנות והערות :

לכל אחד מפתרונות אלו יש סברה המתאימה לרוח הלכות עגלה ערופה ולהבנת הסוגיה ולכן הפוסקים הם שיכריעו בין ארבע שיטות אלו, או יציעו שיטה חדשה המתאימה יותר לאילוצי ההלכה.

במאמר קצר זה, לא התיחסנו במכוון למספר שאלות הקרובות לנושא זה (למרות שכל אחת מהן ראויה לדיון בפני עצמה).

א. ישנה מחלוקת בין הפוסקים אם מביאים את העגלה רק מהערים שיש בהן בית דין או שמביאים מכל עיר ועיר (עיין [1]).

ב. אם החלל נמצא סמוך לכביש, בו עוברים הרבה אנשים, הדיון בגמרא הוא שונה לחלוטין.

ג. כאשר מדובר במרחק בין ערים או בין החלל לערים הקרובות, ניתן למדוד לפי קו אוירי, או לפי קו פני השטח, או לפי דרכי הגישה. יכולים להיות על המפה אתרים שנראים קרובים מאוד אבל מופרדים על ידי הר למשל כך שמבחינת ההליכה ביניהם המרחק הוא רב (עיין [3]).

ד. גבולות ארץ ישראל, וכן שינויים אפילו קטנים באוכלוסית עיר מסוימת, יכולים לשנות לגמרי את אזורי ההשפעה $T_1,\ldots,T_n$ שהצענו במאמר זה.

ה. לשם פשטות, התיחסנו לעיר כנקודה אחת, ולא נכנסנו לבעית תחום העיר ונקודת המדידה.

ספרות :

[1] לתמצית לימוד סוגית עגלה ערופה, נעזרנו בחוברת:
"פרשת עגלה ערופה", לימוד סוגיות התורה על פי המקורות, ערוך בידי הרב יהודה קופרמן, 1962.

[2] תוכנית מחשב לחישוב וציור חלוקת דיריכלה:
P. J. Green and R. Sibson, Computing Dirichlet Tessellations in the plane - The computer journal Vol. 21, p. 168-173 (1978).

[3] לחישוב דרך אמיתית בין שתי ערים, עיין:
ניתוח פיזור אתרים ארכיאולוגיים באמצעות מחשב, ר. דנקוביץ. חיבור לשם קבלת תואר מוסמך, אוניברסיטת בר־אילן, תשמ"ח (בהנחיית ע. מרצבך).

[4] להוכחות מתמטיות, וכן להכללות שונות עיין :
E. Merzbach and B. Singer : How to construct a partition where preference sets are given. Preprint, 1991.