

הערות לסוגיית הערך המספרי של π בספרות התלמודית והפרשנית

שמעון בולג

רבות נכתב על היחס המספרי שבין היקף המעגל לקוטרו כפי שהוא מופיע בספרות התלמודית - החל מתקופת הראשונים ועד לתקופה האחרונה.¹ מטרתנו בדיונים שלפנינו הנה, להציג חלק מן הדיונים הרבים של רבותינו בהקשר לנושא של π ולעורר עיון מעמיק יותר בסוגיות אלה. נקדים ונציין כבר בראשית דברינו שני סיכומים הלכתיים מעניינים: הערך "היקף", וסיכום משלים בנושא קרוב - בערך "אלכסון" שבאנציקלופדיה התלמודית.²

כמקור לדיונים משמשת המשנה בסוף הפרק הראשון של מס' ערובין.³ עיון ראשוני מראה, כי המשנה נוקטת בקירוב, שהרי קוטרו של מעגל בהיקף של שלשה טפחים הוא קצת פחות מטפח ולא טפח כפי שמשמע מן המשנה.⁴ על כך כבר עמד הרמב"ם בפרושו למשנה זו.⁵ נראה שכוונתו של הרמב"ם לציין, כי היחס המספרי שבין היקף המעגל וקוטרו - יחס שאנו מסמנים כיום באות היוונית π ⁶ לא ניתן לחישוב בדיוק מוחלט. עובדה זו נובעת מכך, שהמספר π איננו מספר רציונלי, הניתן להכתב כשבר של שני מספרים שלמים.⁷ בשנת 1882 הוכיח Lindemann ש- π , לא רק שאיננו מספר רציונלי, אלא אף לא מספר אלגבראי⁸ ומשניין משתיין למספרים הטורנסצנדנטליים.

הגמרא שואלת על מקורה של משנתנו - ומסתמכת, על פי דברי רבי יוחנן, על הנאמר במלכים א' ז' כ"ז. והוה המקור לקירוב המקובל בהלכה, שהיחס שבין היקף המעגל לקוטרו הנו (לעניני הלכה) 1:3 מכאן משתרעות סוגיות שונות הדנות בנושא זה. נציין כאן רק אחדות מביניהן⁹:

א. סוגיית החלון, בריש פרק החלון, במס' עירובין (ע"ה).¹⁰

ב. סוגיית סוכה העשויה ככבשן, במס' סוכה (ח.י.).¹¹

ג. סוגיית אילנא דעולא, במס' בבא-בתרא (כ"ז).¹²

ד. סוגיית עמוד שהוא מוטל באויר, במשנה אהלות פי"ב מ"ו.¹³

אם תחילה עסקנו בקירוב המשחמע מלשון המשנה, הרי שהגמרא הפנתה אותנו לנ"ך, בהצביעה על קושי דומה המתגלה בפסוק עצמו: בהנחה ששפת הים היתה עגולה וקוטרו עשר אמות, איך ייתכן שהקפו שלושים אמות? אלא שככל הנראה מדובר בקירוב, ובקירוב זה גם השתמשו חז"ל במשנה.

עיון בדברי רבותינו ז"ל מלמד, כי הם עמדו היטב על הקושי שבדברי הפסוק, שהרי למעשה הקירוב הנו לא רק בציון מספר שלם במקום מספר מקורב טוב יותר, אלא בציון העשיריה השלמה בלבד - 30 אמות - במקום קרוב ל- $31 \frac{1}{2}$; הפרש שכוודאי היה ידוע. האם לא היה פשוט יותר לציין $31 \frac{1}{2}$ אמה, או לכל הפחות 31 אמה במקום 30? חז"ל הבינו, כי בציון הערך של 30 במקום 31 מרזמו הפסוק לעניינים פנימיים יותר שחלקם נזכרים במדרש.¹⁴ ראשונים כמו רלב"ג ואברבנאל מעירים, שהקו של 30 באמה לא נמדד היה מבחורין אלא מבפנים (ראה עירובין י"ד);¹⁵ אחרים מסתפקים בציון העובדה כי מדובר בקירוב גרידא,¹⁶ וגם בתקופתנו הוצעו דרכים שונות ע"מ ליישב את הקושי שבלשון הפסוק.¹⁷

מענין לציין כי כבר בתקופות קדומות נוצל הקירוב המספרי ל- π כפי שהוא משתמע מן הפסוק, לשם ניגוח והתקפה על הנ"ך ועל מסורת חז"ל.¹⁸

בפסוק הנ"ל ישנו "קרי וכתוב". קרי: "ו-קרי" והכתיב: "ו-קוה".¹⁹ המסורה גם מפנה לשני פסוקים נוספים בהם מופיע אותו "קרי וכתוב": בירמיהו ל"א ל"ה ובזכריה א' ט"ז. אולם בפסוק המקביל בדברי הימים (דהיי"ב ד' ב') לא מופיע ה-"קרי וכתוב".

הרב מתחיה מונק הפנה את תשומת הלב לכך, שהיחס המספרי שבין ה-"קרי" ל-"כתוב" קרוב להפליא ליחס שבין 3 ל- π ואף הציע להסביר בכך את לשון הכתוב^{20, 21}. לאחרונה נטען כאילו גילוי זה מקורו בדברי הגר"א מוילנא, אולם ללא ציון מקור כלשהו לביסוס טענה זו.²² הרב מונק בעצמו ניסה להסביר את אי הופעתו של ה-"קרי וכתוב" בפסוק המקביל בדה"י, אלא שהניח מקום לעיון נוסף בדבר.²³ כמו"כ ניסה להסביר את ה-"קרי וכתוב" שבשני הפסוקים האחרים.

ההבטים ההנדסיים הנובעים מן הנושא נתנו מקום לדיונים מענינים, שעל אחדים מהם נצביע בקצרה בדברינו להלן:

(א) מדוע בכלל נדרשה הגמרא למצוא מקור תנכ"י למשנה, ועוד בלשון של מנא הני מילי?²⁴ הרי מדובר בכלל מתמטי מקורב שכל אחד יכול למצוא בעצמו ושלבטח היה ידוע?²⁵

(ב) דיונים הלכתיים והנדסיים נגזרים.

(ג) האם בספרות התלמודית והפרשנית ישנה התייחסות לקירוב טוב יותר ל- π ?

(ד) ההמחשה ההנדסית שדברי התוספות במס' עירובין נ"ו: ד"ה כמה מרובע, בענין ההשוואה שבין הריבוע למעגל.

א. הלימוד של כלל הנדסי מפסוק שבתנ"ך

שאלה זו כבר עורר אותה הרא"ש בשו"ת וכן בתוספותיו לעירובין.²⁶ תשובתו היא, שכוונת הש"ס בשאלו מנה"מ הנה "... מנין לקחו חכמים ליתן גבול למדה לדבר אחד אע"פ שאינו מכוון, אלא שהדבר קרוב להיות מכוון ומייתי ראיה דקרא נמי קעביד הכי...", ובכך מסתמכין על הפסוק, תשובה דומה נתנה ע"י המהר"ל מפראג בתירושי גור אריה לערובין שם.²⁷ בתקשר לשאלת הרא"ש בדבר הצורך ללימוד מפסוק על דבר שלכאורה המציאות מלמדת עליו "...וכי אין הדבר נראה לעינים נקח דבר עגול ונמדוד הקפו ורחבו?", מפנה ר' יוסף ענגיל לדברי הירושלמי²⁸ המקשה "ויברקה ו!": לכאורה משמע, שבדיון על נושא הניתן לברור על ידי בדיקה במציאות, יש אכן לבצע את הבדיקה. מאידך אפשר להעיר מדברי הירושלמי כלאים פ"ד הל' ד' את שאלת ר' אימי לגבי הלימוד של אופן נטיעת כרם מדרכי הנטיעה של הכנענים הקדומים: ר' אימי בעי, ולמידין מן הכנעניים? משאלה זו משמע כאילו שאין ללמוד ולהשליך על דיני תורה ממה שנהוג אצל אומות העולם.²⁹ יתכן ששאלה זו מבוססת על ההכרה שלהלכה דפוסי חשיבה ופסיקה שאינן בהכרח מבוססים על ההגיון או על הכרחינו אנו את המציאות. דוגמאות לחשיבה זו אפשר למצוא בהל' טריפה (בענין מהותן של הטריפות) או בהלכות שכנים לענין ההרחקה המינימלית שבין שני בתים.³⁰

ב. דיונים הלכתיים והנדסיים נגזרים

גוכיר כאן שתי סוגיות. הראשונה עוסקת בגודל של נקב בקרום הגלגלת לענין טריפה. ראה י"ד ט"י ל' בש"ך ס"ק ג' ו'. כרתי ס"ק ת' ופלטי ס"ק ד'. עה"ש שם סע' י"ג. כמו"כ נזכיר הסוגיות הקשורות לכלל של "המרובע יתר על העגול רביע" (אהלות פי"ב מ"ו). סוגיא שניה הנה אופן חישוב הקיבולת של מקוואות עגולות (מקוה הנבנה בצורה של גליל או חצי כדור) או ביציות (אליפסיות). שאלה זו הצמיחה עוד במאה ה-14 סדרה של תשובות ארוכות של ר' שמעון בן צמח.³¹ בתשובותיו מציע רשב"ץ דרך מקורית של התרת בעיה הנדסית מיוחדת אשר נדונה שוב כעבור כ-400 שנה באחד מספרי הלימוד הקלסיים על בעיות לא-אלמנטריות של הנדסת המישור והמרחב.³² הדיון ההנדסי אודות מקוואות עגולות חוזר שוב במאה ה-18 בס' מונה מספר הנ"ל.³³

ג. הכרת קירובים טובים יותר ל- π .

בעלי תוספת, ראב"ע וראשונים נוספים מפנים לברייתא של מ"ט מידות שבה נמצא ערך מדוייק יותר ל- π .³⁴ רבות נכתב אודות ברייתא זו, על הקשר בינה לבין הברייתא דמלאכת המשכן ועל הנסיון לזהותה עם הברייתא המכונה בשם "משנת המידות".³⁵ אם נקבל את הצעתו של ר' ח. הורוביץ הרי שמדובר בחלק מן התוספתא למס' מידות³⁶ או לפי דעתו של גנדז בחלק מן הברייתא של מלאכת המשכן. בברייתא זו אנו מוצאים מספר פסקאות העשויות להטיל אור על שאלתינו.

אנו לומדים שם בהקשר לנאמר בגמ' בעירובין: "... הרי הוא אומר ויעש את הים מוצק עשר כאמה משפתו אל שפתו עגול סביב ... מה תלמוד לומר וקו שלשים באמה וגומ' ? לפי שאמדו בני ארץ בעגולה שהסביבה מחזקת שלש פעמים ושביע בחוט, יצא מהם שביע אחד בעביו של ים לשתי שפחות ויותר שם ל' אמה יסוב אותו סביב..."³⁷ ³⁸

מענינת העובדה שר' יוחנן, שהנו בעל השמועה במס' ערובין בהבאת הסימוכין מס' מלכים, הנו גם בעל השמועה בסוגיית סוכה העשויה ככבשן שבמס' סוכה. סוגיא זו בעיון ראשון קשה להולמה מבחינה מתמטית, אולם כבר העיר הרשב"ץ על כך, שאם נשתמש בערכים מדוייקים יותר של π ושל $\sqrt{2}$ הרי שאו דברי ר' יוחנן מסוכרים בדיוק נפלא.³⁹ תופעה דומה אנו רואים גם בסוגיא נוספת שבה שוב ר' יוחנן הנו בעל השמועה - בריש פ' החלוץ⁴⁰ וכן בסוגיית אילנא דעולא במס' בבא בתרא.¹⁰

מדוע איפא קבעו תו"ל בחשבונות הלכתיים שיעור מקורב בלבד ל- π ?⁴¹ גם על כך עמדו ראשונים ואחרונים. כמעט כלשון זהה התבטאו בעל ספר החינוך וראב"ח הנשיא, תוך ציון שהכלל המקורב שבמשנה מקובל רק באותם המקרים שבהם השימוש בערך מקורב מביא לידי תומרא.⁴² דעה שונה במקצת אנו מוצאים בדברי הרשב"ץ. הוא קובע כי במקרים ומדובר בהפרשים קטנים אוי נקטינן שאפילו לקולא לא דק. כדוגמה הוא מביא את הסוגיות במס' שבת ומס' אהלות.⁴³ חידוש זה של הרשב"ץ מאפשר יישובן של כמה וכמה סוגיות. ראה גם יומא ל"א: "... והא איכא האיך משהו? - כיון דלא הואי אמתא - לא השיב לה".

ר' אברהם אבן עזרא, מזכיר בס' השם את הרעות השונות אודות הערכים המדוייקים יותר של π .⁴⁴ בכמה מקומות נוספים בחיבוריו נמצא דיון הנדסי הקשור לסגולותיהם של המספרים 5 ו-10, דיון המסתמך בין היתר גם על היחס שבין העיגול לבין משולש החסום בו בצורה

מיוחדת. דבריו בענין זה הצמיחו שורה של דיונים ופרשנויות הנדסיות שהורות החל מן המאה ה-14 ועד כמעט לתקופתינו אנו.⁴⁵

אולם גם בדורות מאוחרים יותר עמדו חכמי ישראל על ערכים מדוייקים יותר של π ובדבריהם אף משתקפים דיונים שהתנהלו באותו זמן בעולם המדעי הנכרי הסובב.

ר' יוסף שלמה דלמדיגו הרופא (יש"ר) מקנדיא, מי שהיה מבין תלמידיו של גליליאו, עומד על כך בספרו גבורות ה', ומביא שם את הקירוב הלודולפיאני בדיוק של 19 ספרות.⁴⁶ גם בספרו המרכזי "אלים" הוא נדרש לנושא, ומצטט שם את הערך השברוני של $355/113$ שנתגלה מתדוש באירופה במאה ה-16.⁴⁷ עליו ככל הנראה כבר ידעו הסינים במאה החמישית לסה"נ.⁴⁸ ערך זה גם מצוטט בס' כוס הישועות (שגם הוא חובר באותה תקופה) בסוגיית אילנא דעולא.¹²

באותה תקופה גם מתאר בעל שו"ת חוט השני⁴⁹ שיטה לחישוב אורך היקפו של המעגל בכל דיוק. זאת על ידי קירובו באמצעות מצולע משוכלל חסום עם מספר צלעות הולך וגדל.

ד. דיון בדרכי בעלי התוספות.

בעלי התוספות מביאים הבהרה הנדסית להמחשת כלל (מקורב) המקשר בין היקף ושטח הריבוע לבין אלה של המעגל החסום.⁵⁰ כציכור נשמע לפעמים כאילו בעלי התוספות רוצים להוכיח נוסחה לחישוב .. אולם דבר זה אינו מדויק, שכן מי שמעיין הטיב בדבריהם יווכח שכוונת הדברים להמחיש את אופן החישוב של השטח (S) של מעגל, כאשר ידועים ההיקף (u) והרדיוס (r). ואת בהסתמך על הנוסחה האלמנטרית $S = r(\frac{u}{2})$.⁵¹ אין לשיטה המוצגת בדברי תוס' קשר ישיר למידת הדיוק של π , שהרי היא נכונה עקרונית כשלעצמה לכל קירוב ל- π ; אולם היא הצמיחה כמה דיונים מעניינים.⁵² בעלי התוס' ממלאים את שטח המעגל בחוטים ברוב אחיד, וחותכים את המעגל לאורך רדיוס עד למרכז. לאחר פריסה, יישור והרכבה מתדוש מתקבל מן החוטים מלבן שאורכו הנו מחצית ההיקף $\frac{u}{2}$, ורוחבו r . שטחו, השווה לשטח המעגל, אכן הנו $r(\frac{u}{2}) = \pi r^2$. בעל חוות יאיר שואל בדבר אפשרות יישום השיטה המוצגת לחישוב שטחם של מצולעים (משוכללים) נוספים כגון הריבוע והמשושה. הוא מעיר על כך שמתקבלות תוצאות שונות אם נחתוך ונפרוס את המצולעים הנ"ל פעם מנקודת קרקוד ופעם מנקודת האמצע של אחת הצלעות.⁵³ התאמת השיטה במחכונתה זו למעגל דווקא, נעוצה בעקמומיות הקבועה ($\frac{1}{r}$) של המעגל.

ברצוני לציין נושא הנדסי הקשור ל- π , אשר למיטב יריעתי איננו מופיע בספרות התלמודית: בניה גיאומטרית מקורבת של קו ישר באורך הקו המעגל, בהנחן קו באורך הקוטר. במשך כל הדורות היו נסיונות מנסיונות שונים להגיע לידי בגיה מדוייקת ככל האפשר⁵⁴, אולם כנראה שבעיה זו אשר אין לה השלכה ישירה על נושא תלמודי, איננה משתקפת בספרות התלמודית.⁵⁵

ברצוני להזכיר עוד "קוריוז" קטן. כבר הזכרנו לעיל שהנושא של π נדון גם בספרות הפרשנית הנוצרית.¹⁸ בראשית המאה ה-18 לסה"נ הופיע בלטינית חיבור נוסף העוסק בנושא שלנו, ובו מאמר על ים של שלמה. שוב נדון הנושא של אורך היקף הים וכן המשך הסוגיא בסמ' עירובין העוסקת בקיבולת של הים. הספר עצמו מלא ציטוטים עבריים. בסוף הדיון הנ"ל מופיעה בעברית מטובלת באידיש-גרמנית, תשובה (בעילום שם) מאת אחד מחכמי העיר פרנקפורט היהודיים בהסבר הסוגיא. המחבר הנוצרי בעצמו מציין כי פנה אל בית הדין של פרנקפורט

בבקשה לבאר לו את הנושא, ואכן קיבל את התשובה המבוקשת כשהיא כתובה בעברית. אולם כנראה שאח"כ לא הצליח המחבר להעתיק את התשובה ללא שגיאות.⁵⁶

הערות:

1. הנושא נדון בהרחבה בספרי המתמטיקה העבריים שתוכרו בדורות שעברו. ראה בולג, ש.; ספרי מתמטיקה ותכונה.. תורה ומדע, אייר תשמ"ו ע' 52-40. להלן רשימה תלקית מאוד של מספר מקורות מעניינים, בנוסף לאלה שיוזכרו בהמשך;
שוראקי, סעדיה; מונה מספר (רמח גן) 1973 שער ח' פ"ג ע' 156 - 153
- Belaga, S.E.; On the Rabbinical Exegesis of an Enhanced Biblical Value of π ; Proc. of the 17th Congress of the Canadian Society of History and Philosophy of Mathematics, Kingston, May 1991.
- Feldman, W.M.; Rabbinical Mathematics & Astronomy, N.Y. 1965: pp 22-26.
- Halberstadt, S.; Die Kreisberechnung in Bibel & Talmud, Jeschurun Vol. 7, 1920: pp 563-567
- Marcus, A.; Der Chassidismus, Pleschen 1901, pp 120-121
- Read, C.; Did the Hebrews us 3 as a value for π ? ; School Science & Mathematics 1964: Vol. 64, pp 765-766
- Stevensohn, P.; More on the Hebrew's use of π School Science & Mathematics 1965: Vol. 65, pp 454
- Zuckerman, B.; Das Mathematische im Talmud, Breslau 1875 ; pp 22-30
- כותב שורות אלה עובר על הכנת ביבליאוגרפיה כוללת לכל הנושאים הקשורים לדיונים על π בספרות היהודית. ברצוני להעיר בנוקדה זו שרבים מן המאמרים שהתפרסמו בספרות המדעית התרכזו כמעט בלעדית בכביעה של ישוב לשון המקרא כפי מלכים. זאת במטרה להביא לידי יישוב "הסתירה" בין המדע לבין לשון המקרא. מעטים ביותר המאמרים הדנים ב- π כפי שהוא נדון בספרות התלמודית המורחבת. כמעט ואין התייחסות לאחדות תושבע"פ ותושב"כ לדיונים של רבוחינו ו"ל בנושא.
2. אנציקלופדיה תלמודית כרך ה' ע' תקכ"ז - תקל"ח וכרך ב' ע' ח' - י"א
3. עירובין פ"א מ"ה (בבלי ערובין יג:). ... כל שיש בהיקפו שלשה טפחים יש בו רוחב טפה. ראה שם בראשונים במקום, בתו"ט ומפרשי וביתר מפרשי המשנה והגמרא.
4. ראה בהקשר זה חושב מחשבות לר' עמנואל חי ריקי (אמסטרדם, 1727, פרק י"ד) הודן בהכדל שבין אופן הלימוד של שני הכללים המקורבים עבור הקפו של מעגל ולאורך אלכסונו של הריבוע - $\sqrt{2}$. ביחס למידת הדיוק של דברי בעל תפארת ישראל בפירושו למשנה בעירובין ראה מהרש"ק א.; שגיאות מי יבין, שנה בשנה, תשכ"ז ע' 265-261.
5. "... צריך אתה לדעת שיחס קוטר העיגול להקפו בלתי ידוע, ואי אפשר לדבר עליו לעולם בדיוק, ואין זה חסרון מצדנו כמו שחושבים הסכלים, אלא שדבר זה מצד טבעו בלתי נודע ואין במציאותו שיודע... וכיון שזה לא יושג לגמרי אלא בקירוב תפשו הם בחשבון הגדול ואמרו כל שיש בהיקפו שלשה טפחים יש בו רחב טפה והסתפקו בזה בכל המידות שהוצרכו להן בכל התורה". (מהר"ר הרב י. קפאח, י"ם תשכ"ג). ועיין בית דוד המפנה לפיה"מ לפ"ב מ"ה ששם הרמב"ם מדבר על תכונה דומה של $\sqrt{5000}$. שני המספרים הנם אי-רציונליים.
6. הסימן π לציון המספר 3.14159... הונהג בשנת 1706 ע"י Jones William. ראה: Cajory, F.; A History of Mathematics, 2nd ed. N.Y. 1919, pp 8-15.
בין היתר מעיר Cajory שם כי John Wallis סימן במ"ם סופית עברית "ם" (הדומה לריבוע) את היחס $(4/\pi)$. השווה : המרובע יתר על העגול רביעי (אהלות פ"ב מ"ו).
7. ההוכחה על כך ש π הנו מספר אי-רציונלי, נתנה על ידי Lambert בשנת 1772. האם לרמב"ם היתה הוכחה על כך או שמא היתה זו השערה ? על כך בע"ה במקום ובזמן אחר.

8. מספר x נקרא מספר אלגבראי אם הוא פתרון של משוואה $\sum a_i x^i = 0$ בעלת מקדמים a_i שלמים. כבר לקראת סוף המאה ה-18 שיערו Euler ו-Legendre ש- π אינו מספר אלגבראי אולם לא הוכיחו זאת. הוכחתו של Lindemann באה רק לאחר שבשנת 1873 הצליח Hermite להוכיח כי המספר e הנו מספר טרנסצנדנטי. בדבר התפתחות הידיעות אודות המספר π ראה למשל אצל

Beutel, E.; Die Quadratur des Kreises, Leipzig 1913

Schubert, H.; Die Quadratur des Zirkels., Hamburg 1889

ובצורה עממית יותר בספרו של Beckman להלן בהערה 13.

9. הדיון במספר π חוזר עוד בסוגיות רבות. ביניהן בסוגיית הכוורת במס' שבת ח. ראה רבנו חננאל, רש"י וראשונים; מס' ב"ב י"ד; בדיון על ההיקף של ספר תורה והנחתו בארון. ראה רש"י שם וגם בפני שלמה לר' ש. גנצפריד ל"ב שם, המביא הסבר הנדסי ארוך (ואלקווא 1846) [הנני מודה לידידי הרב י. שחור שליט"א על שהפנה את תשומת לבי למקור זה] או בשו"ת כח שור לר' יצחק שור, קאלאמעא, 1888 ח"א סי' ל"ו. לאחרונה הוזכר נושא זה גם במאמרו של א. הלוי "היחס של מסורת ישראל למדע ולמחקר" מדע כ"ב 1978 3-4; ע' 161-164.

10. ראה ירושלמי וראשונים על אתר ר"ן, ריטב"א מאירי בבית הבחירה ובחיידושים, מפרשי הרמב"ם להל' עירובין פ"ג הל"ב; הקדמה לס' איל משולש להגר"א, (וילנא והורודנא, 1834); פירושו של ר' אלכסנדר בער מהמבורג בפ"י אור נוגה לס' השם לראב"ע דף י"ב. (מהר" פורדא, 1843); גליא מסכת לר' דוד מנאוהארדאק, (וילנא, 1845), חלק השו"ת סי' ג'; נחל הערבים לר' משה בהר"י מלומזא (ורשה, 1867) לסוגיא שם; קובץ יגדיל חזרה קוני' ז' (אודיסה, 1882) סי' צ"ה ע' 310; סוד העיבור לר' יצחק בארב, (דרוהובוביטש, 1897) ע' 18; מנחת זכרון לר' וואלף בער שף, (קראקא, 1894) ועוד. בסוגיית החלון יש לנו לכאורה מקרה של לקולא לא דק. דן בכך ר' דוד פריזנהויזן (כליל התשבון, ברלין 1797, פ"ה סע' 59) המעיר שהרמב"ם - כמו בדיון של סוכה עגולה - לא ציין שיעור מספרי מוחלט להיקף. השווה גם דיונו של π בסע' 57. מקרה דומה של לקולא לא דק יש לכאורה במבט ראשון גם באהלות פ"ב מ"ו אולם אכמ"ל.

11. ראה בולג, ש. ; סוכה העשויה ככבשן, תורה ומדע כרך ז' חוב' 1 תשל"ז, ע' 47-50.

12. ראה כוס הישועות שם וכן בולג, ש. ; עיון חשבוני בסוגיית אילנא דעולא (ב"ב כ"ו/כ"ז) - קובץ חדושי תורה ופרפראות לחכמה, חוב' א', בית ספר גבוה לטכנולוגיה י"ם; אייר תשר"מ, ע' 95 - 90. לפי המובא שם גם בסוגיא זו הפרש לקולא בסדר גודל של מאיות האמה.

13. ראה בפיה"מ לרמב"ם שם, (במהדורות הרפוס הישנות הושמט הציור בהלכה המקבילה במשנה תורה. ראה במהד' משנה תורה לרב קפאח במקום), במפרשי המשנה, במאמרו של הרב מונק, (ראה להלן בהערה 20) ובשו"ת מהרי"ט ח"ב סי' ר'.

14. ראה במדבר רבה פ"ג סי' יד ... בא שלמה והוסיף ים א' למלאכת המקדש לטבול בו הכהנים כמה דתימא (מלכים א' ז') ויעש את הים מוצק עשר באמה משפתו אל שפתו וגו' וכנגד אותן שלשים אמה שהיה קו הים שעשה שלמה סביב הוסיף על משקל הקערה שלשים שקלים ... וראה מדרש תדשא פ"ב (מובא בילקוט שמעוני שם סי' קפ"ה): "ויעש את הים מוצק (מ"א ז' כ"ג) זה העולם שהוא מוצק שנאמר בצקת עפר למוצק (איוב ל"ח ל"ח) ואמר חזקים כראי מוצק (איוב ל"ז י"ח). עשר באמה משפתו - אילו עשר ספירות בלימה שעליהם העולם עומד. עגול סביב, שהרקיע עגול. וחמש באמה קומתו, כנגד מהלך חמש מאות שנה שבין הארץ לרקיע. וקו שלשים באמה, כנגד שלשים יום שבכל חודש וחודש וכנגד עשרה דברות ועשרה מאמרות ועשר ספירות בלימה. יסוב אותו סביב, שהעולם עומד בזכות אותן י' דברות ובי' מאמרות נברא וספירתן עשרה.

ראה גם סי' יצירה בפ"א מ"א ומ"ב: בשלשים ושתיים נתיבות פליאות חכמה חקק י' ה' צבקות וכו' ובפ"י הגר"א שם : כמו שמפורש במשנה ב' עשר ספירות וכו' ועשרים ושתיים. והם במספר הקו הסובב לאלכסון עשר ונחלק לעשר וכ"ב לפי שמחלק העשר אל האלכסון לג' אמות וז' כפולות, ולשבע ההיקף הוא כ"ב $[7 \times \pi = 22]$ ולג' ההיקף עשר. (בקירונו) [היינו רוחב העיגול נקרא אלכסון וכל שיש ברחבו עשר יש בהקיפו ל"ב כמ"ש הרמב"ם (פי' מהרמ"ש שם)].

15. גם אם נניח שהמדירה היתה מכפנים עדיין השיעור מקורב בלבד. ראה על כך בכלי יקר לר"ש לאניאדו, (ויניציה 1603) שם. ראה בענין זה גם הערתו של ר' חיים ראביד מיקבוץ מרחביה לסוגיא זו (מרחבי יצחק, מרחביה 1973).

16. כך גם טובר ר' חיים וייטאל: "... וכבר ידע מ"ש ד"ל כל שיש בהקפו ג' טפחים יש ברוחבו טפת, ואמנם לא עמדו ד"ל על דקדוק החשבון לגמרי רק בקירוב כמ"ש התוס' שם, אבל השיעור האמיתי הוא ד' חלקים מכ"ב (ספר התכונה לרח"ו, ירושלים תשכ"ו, פ"ה ע' ל"ה). ראה גם שו"ת הרמ"א סי' ק"ו. לעצם הקידוח למספר שלם, השווה יומא לא: והא איכא האיך משהו כיון דלא הואי אמתא - לא חשיב לה.
17. Fink, E.; Zur Geschichte der Zahl π , JQR 1903: Vol. 15 pp 522-525
 Fink, E.; Apologetisches, Festschrift zum 75. Jubilaeum d. Realschule... Frankfurt a.M. 1928: pp 59 - 62
 (תרגום לעברית: תורה ומדע כרך י"א אייר תשמ"ו ע' 22-32)
- לוי, א.; באור חדש למלכים א' ד' כ"ג, ההד כרך י', 1935, ע' כ"ב-כ"ג. לוי מציג לפרש כי בריקת טיב היעגול נעשתה על ידי התאמה של משושה משוכלל מתוטי מדידה בתוך חלל הים. פרשנים אחרים כבר העירו שאורך ההיקף של משושה משוכלל בסוף ס' מבוא התלמוד לר' ישראל ד"ר ראבינאוויטץ (ווילנא, תרנ"ד; ע' 177) ובס' ארץ חיים לר' חיים סתהון (צפת, 1899, ע' 5), המסביר שם בין היתר את הסוגיא המקבילה של סוכה העשויה בכבשן.
18. ראה למשל: Beckman, P.; A History of π , Boston 1974: pp 14-15
 ראה שרבוך, א.; מיספר ושמו π - 100 שנה להשיפת סרצופו האמיתי, מדע כ"ו 6, 1982, ע' 298-300: "... ברור שאין לראות במיאור זה יותר מקוריה מענין. ... על אף נסיונו הנואש [ההדגשה שלי - ש.ב.] של מחבר משנת המידות מן המאה השנייה לספירה, נחמיה, "להציל את התופעה" [ההדגשה במקור] המתוארת שנית ברה"י ב' ד' ב', בסיפור מנסה נחמיה ליחס את 30-האמות להיקף פנימי של 'הים המוצק', המתחבל, כביכול, לאחר החסרת עוביו, כל שההיקף התיצוני אמנם מתאים לערך של 'צמי-הארצות' [ההדגשה במקור] $(3\frac{1}{2})$, אותו ידע הטיב... על טיבו של הנסיון וערכו המוסרי ניתן לעמוד בנקל, אם רק שמים לב לעובדה, שעוביו של המבנה מוזכר בפירוש בעור שלשה סטוקים: 'ועוביו טפח ושפתו...'
- גם בדורות קודמים היו ערים להתקפות מסוג זה:
- בספרו J.J. Schmidt על רבריו של Spinoza המתקיף במילים קשות את המקרא. Schmidt מציין שם שלכתבי הקודש תפקיד געלה יותר מאשר ללמד דקויות מתמטיות או דברים הניתנים לחקירה על ידי מאמץ טבעי, ומסכם שברור שהגיון נקט בערך מקורב בלבד.
- ראה גם:
- Reyher, S.; Mathesis Mosaica, Frankfurt a.M. 1679, pp 703-723
 Sturm, Ch.; De Mari Aeneo Tractati, Nurenberg 1713, pp 18-19
19. ראה בבלי גדרים לו: אמר רבי יצחק: מקרא סופרים, ועיטור סופרים, וקריין ולא כתיבן, וכתיבן ולא קריין - הלכה למשה מסיני. ראה בענין זה בשו"ת הרשב"י חלק ג ס"י תקצ"ד (אלף כ:). "תשובה, חדע כי כל מה שאתה רואה שהשנויים הכל הלכה למשה מסיני. והכי גרסינן כפ' אין בין המורה א"ר יצחק ... וא"ת איך יהיה ה"מ מה שנאמר ברות או בשאר מגלות או בתהלים שאמרו דוד וכיוצא בהם. וי"ל דקיל"ן רהכל ניתן בסני אפילו דקדוק שעתידי תלמיד ותיק לתדש הכל נאמר למשה בסניני..."
20. מאמרו של הרב מונק הופיעו בשתי מהדורות (סיני כרך נ"א תשכ"ב, ע' 227218; ובהדורם בתשכ"ח כרך כ"ז ע' 115-33), וכן בשנת השל"ו כשכפול פנימי בכבית ספר גבוה לטכנולוגיה ביים (כתוספת כמה סעיפים אשר לא ראו אור). כוזמו ראיתי שהמחבר אסף כבר מקורות רבים לנושא, גם כאלה המובאים בדיונו כאן. ביחס לעצם פירוש ה-קרי"כ באמצעות גימטריא השווה גם: כשר, א.; למאמר "שלוש בעיות הנדסיות" סיני, כרך 52 תשכ"ג; ע' צ"ב - צ"ד.
21. $106/111 \sim 3/\pi \sim 0.9549$
22. Posamentier, A. & Gordan N.; An Astounding Relevation on the History of π , The Mathematics Teacher, January 1984 pp 52 & 47
 הנסיון ליחס את ההערה הזאת לגוי"א איננו חדש. אולם לא ידוע לי כל מקור על כך. יתכן כמובן שיימצא רמז כזה בכתבי היד של הגוי"א שטרם ראו אור. ראה עליות אליהו (ווילנא, 1874) חלק עליות קיר.

כששמעתי לראשונה על דבריו של הרב מונק מפי ד"ר פ. פורכהיימר בניו יורק, הוא הוהיר אותי מפני שמועות כאלה, וסיפר לי שכפי מיטב ידיעתו - מתוך הכרות אישית את המחבר - לא הסתמך הלה על הגר"א. אישור על כך גם קיבלתי ממשפחת המחבר המנוח. משונה שבמאמר זה לא צויין כל מקור לדברי הגר"א. מדוע לא התייחסו הכותבים ל- "קרי וכתיב": הזכרתי את הענין של שיוך הפרוש לגר"א בהרצאה בניו-יורק בחורף תשמ"מ במסגרת ה-S.J.O.A., הייתכן שמשם יצאה אי-ההבנה?

23. לא ידוע לי הסבר ברור על אי-הופעת קרי וכתיב בזה"י, ודומני שאין בכך משום פגם אם נודה שישנם כתנ"ך תופעות וניסוחים שאין אנו עומדים עליהם לע"ע. בכל מקרה יש להזהר מהשערות תמוהות שאין להם אחיזה בדברי חז"ל, דוגמת ההשערה כאילו

"the author of the Chronicles (traditionally identified with the Scribe Ezra) was much more preoccupied with... rebuilding the temple and preserving the spirit of Torah, than with the "correct" value of π hidden in the descriptions of the sacred objects in the First temple; still, Ezra has faithfully reproduced these dimensions in his book." (Belaga, S.E.; On the Rabbinical Exegesis of an Enhanced Biblical Value of π . Proc. of the 17th Congress of the Canadian Society of History and Philosophy of Mathematics, Kingston, May 91.)"

ראה בהקשר זה סנהדרין כ"א: ראויה עזרא שתנתן תורה על ידו לישראל, אלמלא קודמו משה, וכן אדר"ן פל"ד לענין זהירותו של עזרא הסופר בהעתקה ובכתיבה של הטקסט בחזרה.

24. ראה בהקשר זה יד מלאכי כללי המ"ם ס' תפ"ב שעפ"י דבריו שם היה יותר ראוי לנקוט בלשון של מגלן. כמו"כ ראה פחד יצחק למפרנטי (ליורנו 1750, ערך מנה"מ קל"ה): "מנה"מ או מנ"ל לא שייך למימר אלא בדברים שיש להם עיקר מן התורה..." וביתר המקומות שאליהן הוא מפנה שם, כמו"כ ראה בכללי שמואל לר"ש סיריליאו (ויניציה, 1622), ס' שכ"ח. (מקורו בהליכות אלי שער ב' ח.)

25. ערך זה היה מקובל בקירוב ראשוני בחברות רבות כמו בבבל וברומי. בסוף המאה ה-19 היה נסיון נפל לקבוע כערך רשמי במדינת אינדיאנה שבאר"ב ערך שגוי עבור π (ראה Beckman. pp 174 - 177. op.cit.).

26. שו"ת רבינו אשר כלל שני ס' י"ט ותוס' הרא"ש לערוכין י"ג ד"ה כל שיש בהקפו. דבריו אלה של הרא"ש מצוטטים גם בתשב"ץ ח"א ס' קס"ה בשם תוספות סתם. מתוך השוואת המקורות נראה שהכוונה לחוס' הרא"ש הני"ל. בזמנו הפנה אותי לדברי הרא"ש בתוספותיו אחד מתלמידיו הראשונים במח' להוראת המדעים - מר יוסף וילנברג נ"י.

27. "... לכן שיערו ג' פעם ותו לא צריך לדקדק בחצי או בשביעית ולפיכך מקשה מנה"מ שמה יש לדקדק מה שאפשר לדקדק ומנ"ל לומר ג' פעמים ומייתי קרא דכן מוכח הכתוב דאין משערין רק בשלשה פעמים ותו לא צריך..."

28. בגליוני הש"ס שם. ע' ירושלמי כלאים פ"א ה' ב', ירושלמי חלה פ"א ה' א' ובמקביל ירוש' פסחים פ"ב ה' ד'; כמו"כ ע' ירושלמי תרומות פ"ג ה' א' ר' בנימין בר לוי בעי דבר שאפשר לך לעמוד עליו חכמים חולקין עליו ? מכאן, שהנושא הנדון קשור למה שמקובל, שלא תתכן בש"ס מחלוקת על דבר שמציאות.

29. ע"י שם בדברי בעל פני משה; במראה הפנים שם מעיר בעל פ"מ בעצמו על כך שבענין זה של לימוד מן הכנענים ישנה כנראה מח' בין הירושלמי לבין הבבלי, כפי שמתשמע לכאורה מסוגיא דומה במס' שבת פ"ה. בענין יניקת מינים שונים זה מזה. כך גם נראה מדברי הר"ן בשבת שם המסביר את שאלת הגמרא שם וקים להו לרבנן דחמשא בשיחא לא ינקי מהרדי ומנלן דהא דקים להו רבנן (דחמשא בשיחא) מילתא היא ? דאמר ר' חייא בר אבא א"ר יוחנן וכו'. ומסביר הר"ן שם : "... פ"י דחמשה בשיחא לא ינקי מהרדי, דאי מקרא לא ילפינן אלא חמשה גרעינין אבל לא משתמע מיניה אי בערוגה גדולה אי בקטנה, ומהרדינן מילתא היא, כלומר מילתא היא למסמך עלה לפי שהם חקרו ודרשו מעובדי ארמה חמשה גרעינין בכמה לא ינקי מהרדי והם השיבו בששה על ששה והם עמדו על דבריהם דאמר ר' שמואל בר נחמני א"ר יוחנן וכו'."

30. ראה גם בדברי התשב"ץ בתשובה הנזכרת בח"א ס' קס"ה: "... או שקבלתן כך היתה ללכת ע"פ דרכים אלו ואע"פ שיש בהם קירוב דהא שיעורין הלכה למשה מסיני הם כדאיתא ... ושמה כך נמסרה להם הלכה שיתנהגו על עיקרים אלו אע"פ שיש בהם קירוב כאילו הם מדוקדקים ויש סמך בזה מים שעשה שלמה שהלך בו הכתוב על דרך קירוב כמו שביארתי וזהו אחד משני דברים שאפשר לומר בזה ..."

גישה דומה אנו מוצאים גם בדברי רבנו הרא"ש בתשובותיו (כלל נ"ה סי' ט') בדיון על הבדלים שבין התורה לפילוסופיה:

"כי חכמת הפילוסופיא וחכמת התורה והמשפטים אינן על דרך אחת. כי חכמת התורה היא קבלה למשה מסיני, והחכם ידרוש בה במדות שנתנה לידרש בהם, ומדמה מילתא למילתא; אע"פ שאין הרברים נמשכים אחר חכמת הטבע, אנו הולכין על פי הקבלה. אבל חכמת הפילוסופיא היא טבעית, וחכמים גדולים היו והעמידו כל דבר על טבעו, ומרוב חכמתם העמיקו שחתו והוצרכו לכפור בתורת משה, לפי שאין כל התורה טבעית, אלא קבלה. ועל זה נאמר: תמים היה עם ה' וגו'; כלומר: אפילו יצא לך הרבר חוץ מן הטבע, אל תהרהר על הקבלה, אלא בתמימות התהלך לפניו..."

ראה גם שו"ת מהרי"ל סי' ס"ו בענין ההרחקה שבין חלונותיהם של שכנים, שחכמים קבעו את שיעוריהם עפ"י אמות מידה מסוימות, אע"פ שייחכנו מצבים שהיו מצדיקים שיעור אחר.

31. ראה תשב"ץ ח"א סי' קכ"ט וסי' קס"ג - קס"ו.

Ginsburg, Y.; An Unknown Mathematician of the 14th Century, 1942 Vol 1 Scripta Mathematica, pp 60-62.

32. Hirsch, M.; Sammlung geometrischer Aufgaben 2. Teil, Berlin 1807: pp 291-222

ספרו זה של מאיר הירש (שאליו מפנה גינזבורג ללא ציון פרטים) וספריו האחרים שמשו במשך כמעט מאה שנה כספרי למוד קלסיים.

33. ראה לעיל הערה 1) ושם בשער הערכין פ"ב בע' 158 - 156 אולם ללא הפניה לתשב"ץ.

34. על מנת להקל על הקורא אנו מפנים כאן למאמרו של שגנו שבו יש הפנייה למרבית המקורות העוסקים בברייתא זו:

Gandz, S. The Mishnat Ha Middot ... and the Geometry of Muhammad ibn Musa Al-Khowarizmi, Proceedings of the American Academy for Jewish Research, Vol.4 1933; [reprinted in Gandz, S; Studies in Hebrew Astronomy and Mathematics; N.Y. 1970, pp 259-400.] (ההפניות הן ממהדורה זו)

35. ראה רש"י סוכה ח. ותוס' ב"ב כ"ז. והשווה ראב"ע בס' יסוד מורא (הוצאת צילום י"ם תשל"ו) ע' ב': "... ועוד אם לא ידע חכמת המדות לא ידע ראיות המדות בעירובין גם ארבעים ותשע מדות של ר' נתן...".

36. הורו"ח ת.מ. הלוי, חוספתא עתיקתא (מתחלקה ראשונה), פפר"מ 1889, ע' 7-11.

37. שם פ"ה סע' ד'. וראה שם גם פ"ב סע' ג' ופ"ה סע' ג'. השווה גם דבריו של ראב"ח הנשיא בחיבור המשיחה והתשבורת, סע' 196-191 בע' 111-118 (ראה להלן הע' 42 בסוף).

38. אין כאן המקום להכנס לדיון באשר לזהותם של "בני ארץ" המזכירים כאן, אולם השווה בענין זה בכלי שבת פ"ה. בנוגע לזהותם של "יושבי הארץ" (בראשית ל"ו כ').

39. ע' תשב"ץ ח"א סי' קס"ה: "... אבל לפי האמת אין בדבריו [של ר"י] עורף מורגש שהרי באמתא בריבועא יש יותר מאמתא ותרי חומשי באלכסונוא, וברוחב טפת יש היקף יותר מג' טפחים ובוה יתקורבו דברי ר' יוחנן אל האמת קירוב נפלא ... ויבואו דברי ר' יוחנן מכוונים כדעת ההנדיסים..."

40. על הסבר דברי יוחנן שם נעמוד בע"ה בהודמנות אחרת.

41. כך קובע הרמב"ם בהל' טומאת מת פ"ב ה"ח: "... זה שהצריכו עשרים וארבעה טפחים על העיקרין שסומכים עליהן חכמים בתשב"ץ כל המשפטים, שכל שיש בהיקפו שלשה יש בו רוחב טפה, וכל טפה על טפה ברבוע יש באלכסונו טפה ושני חומשין ...". שונה במקצת ניסוחו בהל' סוכה פ"ד הל"ז: "... סוכה עגולה אם יש בהקיפה כרי לרבע בה שבעה טפחים על שבעה טפחים אף על פי שאין לה זוויות הרי זו כשרה." ואיננו מציין שיעור לקירוב, אולם אכמ"ל.

42. ראה ס' החינוך מצוה רנ"ח מידות ומשקלות :

"... ומכל אלה צריכין אנו להזהר הרבה במדידו' הקרקעות עם זה כי הכללים שכללו חז"ל בענין החשבון כגון ... וכן כל שיש בהקיפו ג"ט יש בו רוחב טפה ... וכיוצא בכללים אלו שלא אמרו"ל על הכוון הגמור כ"א בקרוב ולכן אל תסמוך בוה בחלוקת הרברים בין בני אדם."

ואל תממה היאך יכתבו בלתי מכוון והם אנשי אמת אשר אלקים נצב בעדתם כי הם לא יצטרכו אל החשבונות כ"א בחשבון תחומי שבת או בוריעת הכלאים ונטיעתם וכיוצא באלו הדברים ובוה מה שלא כיונו

בו מביא אותנו לירי חומרא ואינו מזיק לשום אדם בממונו ואעפ"כ העידו כרוב מקומות אלו שאין החשבון מדקדק שם שאמרו בכ"מ ומקום כפי הראוי בו היינו דלא דק ולחומרא לא דק ונמצ' בזה שהודיעונו מ"מ שלא נחלה בהם מיעוט ההשגח' ויריעה בדבר מכל הדברים."

ברות דומה גם כותב רב"ח הנשיא בהקדמה לספרו "חיבור המשיחה והתשבורת" (הוצאה ראשונה מב"י, ברלין, 1913, ע' 5): "וכן חשבון אשר חשבו בעורף המרובע על המעוגל והמעוגל על המרובע... לא נצרכו אליו אלא בתחום שבת או בוריעת הכלאים ונטיעתן וכל דבר שהקירוב הזה אשר בחשבוננו מביא לירי חומרא בכל המצות האלו, לא לירי קולא, ואינו מזיק לשום אדם בממונו, ועוד שהם מעידים כרוב המקומות שאינן מדקדין ואומרין כמו שאמרו "היינו דלא דק ולחומרא לא דק" כל מקום כפי הראוי לו. וכן לקראת הסוף (ע' 111 סעי' 191) "... והלא הוא רואה רבותינו ז"ל אינם סומכין על החשבון הזה באלכסון המרובע במקום שהוא מביא לירי קולא בשום מצוה, אבל הם מצוים במקום שהוא לחשוב את האלכסון עד סוף דקדוק בו..." ראה גם בס' חושב מחשבות פרק י"ט והלאה [וכן במד' שניה שנדפסה בס' באזרת אליהו (ליורנו, 1762) קדוש' מי נדה" פ"ו והלאה].

43. ראה תשכ"ץ בתשובה הנוכרת בח"א סי קס"ה: "... אבל הנראה מבריהם הוא בכל אלו המקומות וגבי חלון עגול בפרק חלון (ע"א). וגבי כוורת במס' שבת (ת). שהם סומכים על עיקריהם בזה ועושים אותם שורש מונח ויחד שלא תמוט ולא חששו לאותו הרקדוק שמדקדיקים בו חכמי יון ולא יחושו אם מביא לירי חומרא או לירי קולא כמו שהוכחתי ...

מה נקרא לענין זה דבר "פורתא" או דבר "בלתי מורגש" ? אין כאן המקום להכנס לדיון זה אולם מתוך עיין בסוגיות הרלוונטיות נוכל לקבל אומדן מענין.

44. ראה ס' השם לראב"ע (פיודרא, 1834 י"א). לענין הרעות השונות על השיעור המדוייק של π : יש מחלוקת גדולה בין חכמי האומות במדת העגול כי בטלמיס אימר כי הקו הסובב הוא מן האלכסון שלשה כמותו וח' חלקים מס' באחד... וחכמי המדות אומרים אם האלכסון ד' יהיה הקו הסובב כ"ב וחכמי הורו אומרים ...

45. ראה סיכומים חלקיים בענין זה אצל צרפתי, ג.ב.ע.; מונחי המתמטיקה בספרות המדעית העברית..., י"ם 1969; ע' 152 - 155; פ"י מקור חיים לר"ש צרצה לרב"ע ראב"ע לשמרת ג' י"ד (מרגליות טובה, אמשטרדם 1722) דיוניהם המתמטיים של ר' ברוך לעוויגשטיין בככורי הלמודיות (וורשה, תרכ"ג; סדק א') ושל הרב ע.הילדסהיימר שהתפרסמו בהוספה המדעית לעתון Der Israelit בשנת 1890. בשל ההיקף הגדול של החומר אי אפשר להאריך כאן יותר.

46. ראה גבורות ה' (אמשטרדם, 1629) מדרגה ב' (מהר" אוריטה, 1867, ע' 259) ש- " מי שרוצה לדקדק יוכל ליקח הערך שמצא להילפוס מקולין [Ludolph Van Ceulen].
 $3.14159265358979323847 < \pi < 3.14159265358979323847$

ואלו הם דקדוקים בלי חועלת, ואולי כל ימיו כלה המתבר הנוכח בהמצאתו עד שצוה בשעת מיתתו שיניחנה על מצבתו, וכן תמצאנו בעיר לוגדונוס בטורוס [Leyden] בבית התסילה על האבן שברצפה, וכמעט נפסדו האותיות שעל האבן חרותות אבל כפי הלימודים זכרו נצת באמת וגור דולק תמיר ותוא לא מת."

47. ראה "אליס" (אמשטרדם, 1629), (מהר" אוריטה, 1866, ע' 72): "ואחר שלא נדע האמת, החלוטי, ראוי לבחור בדרך היותר קצרה ובוררה ולא להאריך כדי לדקדק כחוש השערה. וכן בכיור של ים שלמה לא דקדק המקרא [מלכים א' כ"ג: ד'] באמרו שההיקף היה ג"פ באלכסון, ואם ארכימדיס ידע לקרב יותר באמרו שהוא כמו 7 אל 22 או לדעת אחרים 113 אל 355 איך לא ידע זה שלמה בתכמתו או בצלאל באומנתו. אלא שלא חששו לדקדוק זה למיעוט תועלתו."

48. Mikami, Y.: The Development of Mathematics in China and Japan, N.Y. 1920 p.50

באירופה נחלה הערך כנראה ע"י Metius או Valentin Otto בראשית המאה ה-16.

49. ראה שו"ת חוט השני (פפא"מ 1699) סו"ס צ"ו. דרך זו היתה ידועה אצל ההודים במאה ה-5 לסה"נ, ומבוטסת על הגנסתה של אורך הצלע של מצולע משוכלל חסום:

$$S_{2n} = \sqrt{(2R^2 - R\sqrt{(4R^2 - S_n^2)})}$$

50. ראה גם סוכה ת. תור"ה כמה מרובע. ראה גם בהערותיו של בעל ישועה בישראל לס' צורת הארץ לראב"ח הנשיא (אופיבאך 1720) שער ראשון הערה ס' (ג'); עומק הלכה לר"י קופלמן (קראקא, 1699) כפי' למס' סוכה ת. עיין גם בסוף הקדמת העורך לס' איל משולש לגר"א מוילנא (וילנא והורודנא, 1834). ר' דוד ניטו מסביר את דברי תוס' בדיונו על ידיעות חז"ל בחכמות, וכותב שם שחז"ל גם הכירו הוכחות למשפטים של התנסות יום-יומית. ראה כוורי שני, ויכוח רביעי סי' ס"ב - ס"ד (מהד' ורשה 1884).
51. מקורה של ההמחשה אצל ראב"ח הנשיא בחיבור המשיחה והתשבורת. ראה שם ע' 60 סע' 95 : ואחר שידענו הקו הסובב והקוטר אנו יודעים שתשבורת כל העגולה שהיא מחצית הקוטר במחצית הקו הסובב, והאות על התשבורת הוה ידענו אם תפתח שטח העגול מצד אחד ותישר כל הקוים הסובבים מקו החיצוני עד המרכז יתפשטו המקיפים שטח העגול ויחזרו לקוים ישרים מתמעטים והולכים עד שתחזורים אל נקודה אחת והיא נקודת המרכז ובוה נולדה לנו צורת המשולש. ותשבורת המשולש כבר ביארנו... ראה גם אצל Cohn, B. Das mathematische Handbuch des Abraham Savasorda; Monatschrift, Vol. 62 pp 186-194.
52. אפשר להמחיש את מידת הדיוק של ההמחשה על ידי חישוב שטח העיגול כערך גבולי של סדרת n שטחים חלקיים, כפונקציה של עובי החוטמים (R/n) . כך יתקבל גם אומדן מענין לשגיאה ε כפונקציה של עובי החוטמים: $\varepsilon = (\pi R^2/n)$! גם אינטגרל פשוט מראה את דיוקה של השיטה. בהקשר זה נכתב לפני זמן מה מאמר מענין:
- Roberti, J.; Interdimensional Relationships, Mathematics Teacher, Feb. 88 pp 96-100.
53. ראה שו"ת חוות יאיר סי' קע"ב. למיטב ידיעתי, מובאת התשובה לשאלתו לראשונה בס' נצח ישראל לר' ישראל בן משה מזאמוטש (פפד"א, 1741) בקונטרס אחרון לספר, בהוספות לעירובין נ"ו. התשובה בכך שבפריסת הריבוע או המשושה מקודקוד למרכז מקבלים (לאחר הרכבת המשולשים החלקיים) לא מלבן כמו במעגל כי אם מקבילית. נוסחת השטח עבור מקבילית איננה רוחב כפול אורך כי אם גובה כפול אורך. כך גם במקרה זה מתקבלת שוב תוצאה נכונה. מענין שבעל חוות יאיר שעסק רבות בחשבונות לא ציין עובדה זו.
54. ראה סיכום היסטורי מענין של הנסיונות השונים אצל:
- Schubert, H.; Die Quadratur des Zirkels in berufenen & unberufenen Koepfen; Hamburg 1889.
55. אנו כן מוצאים דיון בבעיית בניה הגנדסית קרובה : בניית מעגל ששטחו שוה לריבוע נתון. ראה שו"ת חוות יאיר סי' קע"ב ד"ה אבג"ד ובס' בכורי הלמודיות הנ"ל ע' 32.
56. Mel, C. Antiquarius Sacer..., Frankfurt a.M. 1719 pp 42-44.