"כל שיש בהיקפו"

בועז צבאן ודוד גרבר

מבוא

במאמר זה נעסוק בנושא המעגל והעיגול כפי שהם באים לידי ביטוי בתלמוד הבבלי ובמפרשיו, בנושאים "סוכה", "חלון שבין שתי חצרות" ו"מקוה". מטרתו העיקרית של המאמר היא לספק לקורא ידע רחב בנושא הנדון, בגישה נאיבית-אינטואיטיבית, אך תוך בקרה מתמטית. המאמר משלים את החסר במאמרים שנכתבו עד כה בנושא זה, בהיותו מפרט גם ובעיקר סות הפן המתמטי. המאמר דן בקצרה ברעיונות רבים הקשורים לנושא זה, ולכן יכול לשמש כנקודת פתיחה ללימוד הנושא. הפירוט המתמטי מאפשר שילוב חלקים ממנו בהוראה בבתי־הספר, תוך כדי מתן מוטיבאציה והדגמת השימושים שיש לידע הנרכש בחיי היומיום. כמו כן, יכול המאמר לשמש קוראים וכותבי מאמרים כהפניה, כאשר נראה שאין הפירוט המתמטי מעניין המאמר.[1] נשתדל להיות קרובים ככל האפשר לדיונים התלמודיים, ולהבין את ההגיון שמאחוריהם בעזרת הכלים שיש בידינו כיום. בראשית כל נושא נציג את הסוגיה התלמודית, ובה יובאו הטענות, שיוכחו בדיון המתמטי. בחלקו האחרון של המאמר נציג הוכחה מתמטית פורמאלית של הכלל "כמה מרובע יתר על העיגול - רביע" בעזרת האנליזה המתקדמת וברוח ההוכחה המפורסמת שמובאת בתוספות. ההוכחה יכולה לשמש מוטיבאציה ללימוד נושא האינטגרציה בשינוי משתנים של האנליזה המתקדמת.

שיעורים מדויקים

בכמה מקומות בגמרא[2] מובאים הכללים "כל שיש בהיקפו שלשה טפחים, יש בו רוחב טפח" ו"כל אמתא בריבועא, אמתא ותרי חומשי באלכסונא". מהכלל הראשון יוצא, שהיחס בין היקף עיגול לקוטרו הוא 3, ומהכלל השני יוצא שהיחס בין אורך צלע ריבוע לאלכסונו הוא 1.4 $(1\frac{2}{5}=)$. במתמטיקה מקובל[3] שהיחס בין היקף עיגול לקוטרו הוא $\pi = 3.14159...$ ושהיחס בין צלע הריבוע לאלכסונו הוא $\sqrt{2} = 1.41421...$. מכאן רואים, שעל פי ההבנה הפשוטה, השיעורים שנקבו בגמרא הם מקורבים ואינם מדויקים מבחינת המתמטיקה.[4] יש דעות[5] האומרות, שאפשר להתייחס אל השיעורים המקורבים כאל השיעורים המדויקים, ואין צורך לחשוש לשיעורים המתמטיים. מאידך, יש דעות[6] האומרות שיש לחשוש לשיעורים המתמטיים, ולכן יש להוסיף על השיעורים הנקובים. יש כמה נימוקים לשיטה הראשונה:

- המספר π הוא אירציונלי (אי אפשר לבטאו כמנה של שלמים, ולא משנה עד כמה ננסה לדייק). לכן, אפילו אם חז"ל ידעו את השיעור המדויק, הם לא יכלו לבטאו, ולכן סמכו על השיעורים המקורבים, כפי שאפשר ללמוד מהתנ"ך [מלכים א, ז, כ"ג]. גם $\sqrt{2}$ הוא אירציונלי, ולכן יש להסתפק בשיעור מקורב.[7]

- כהמשך לרעיון הקודם, יתכן ששיעורים מקורבים אלו הם הלכה למשה מסיני, ולכן אפשר לסמוך עליהם כעל שיעורי תורה.[8]
- קשה לצמצם את ההבדל בין השיעורים המדויקים לשיעורים המקורבים, ולכן נראה שאם יצור אדם מבנה ע"פ שיעורים מקורבים אלו, מסתמא יקיים המבנה את התנאים הדרושים גם עבור השיעורים המדויקים.[9]
- "וניתנה ההלכה לחשוב בקירוב, שלא ניתנו המצוות אלא לצרף הבריות ולדקדק בצוואותיו יתברך, לקבלת מלכותו יתברך, וגם לקיום חכמת התורה הכלולה בכל דיני המצווה ולסוד הפנימיות, ולכל הני (= אלו) אינו מפסיד אם גבולי הצמצום יהיו בקירוב, כדי שיוכלו לקיים מצוות המעשיות אף חלושי הדעת".[10]

נותר, איפוא, לבדוק את איכות הקירוב. הקירוב ל π הוא

$$\frac{3}{\pi} = \frac{3}{3.141592...} = 0.954929...$$

כלומר סטייה של כ 4.5%. הקירוב ל $\sqrt{2}$ הוא

$$\frac{1\frac{2}{5}}{\sqrt{2}} = \frac{1.4}{1.414213...} = 0.989949...$$

כלומר סטייה של כ 1%.

נקודה מעניינת למחשבה: אנו רואים שהקירוב ל $\sqrt{2}$ טוב בהרבה מהקירוב ל π. מאידך, הקירוב ל $\sqrt{2}$, בניגוד לקירוב ל π, אינו נלמד מהתנ"ך. הרב מתתיהו הכהן מונק ב ⟦9⟧ מציע הסבר, שלפיו שני הקירובים נלמדים מכלים שהיו בבית המקדש, שם שרתה השכינה ולמולה התבטלו תחושת הזמן והמקום.[11] בכך הוסבר הניגוד השני. לפתרון הניגוד הראשון, טוען הרב מונק כי אף ערך קרוב לערך המתמטי של π נמצא באותו פסוק שממנו נלמד הקירוב [מלכים א, ז, כ"ג]. לגבי הים שעשה שלמה כתוב: "עשר באמה משפתו עד שפתו עגול ... וקו(ה) שלשים באמה יסוב אותו סביב". על ה"ה" היתרה במלה "וקוה" דרשו, שכפי שגימטריא של "קוה" מתייחסת לגימטריא של "קו", כך מתייחס π ל 3. במלים אחרות:

$$\frac{\text{קוה}}{\text{קו}} \approx \frac{\pi}{3} \Rightarrow \pi \approx 3 \times \frac{\text{קוה}}{\text{קו}} = 3 \times \frac{111}{106} = 3\,\frac{15}{106} = 3.141509...$$

כאשר במתמטיקה $\pi = 3.141592...$(!).[12] רעיון נוסף טמון ב"ה" יתרה זו: תוספת ה"ה" (קוה - כתיב) מרמזת על מה שאנו רואים בעין - π מתמטי. אך המלה ללא ה"ה" (הקרי) מרמזת לנו על השיעור שבו אנו צריכים לנהוג לפי ההלכה (גזרת הכתוב) - π מקורב.

נקודה מעניינת נוספת היא, שהפסוק בתנ"ך מוסר לנו את היקפו של עיגול שרחבו 10 אמות. בשום אופן אי אפשר לומר כי הפסוק "עיגל" את התוצאה, שכן אם "נעגל" את $10 \times \pi = 31.415...$ למספר שלם, נקבל 31, ולא 30 (שהוא הערך הנתון). מכאן, שהערך בפסוק מלמדנו שהקירוב 3 אינו תוצאה של "חוסר נוחיות/ידע".

נשאלת השאלה, מדוע בפסוק המקביל לפסוק הנ"ל [דברי הימים ב, ד, ב] לא מופיעים הקרי והכתיב (כתוב "וקו שלשים באמה"). התשובה לשאלה זאת פשוטה, שאין טעם לחזור על רמז שכבר הופיע קודם לכן. כל ייתור במקרא מטרתו ללמד דבר נוסף, ולכן אין כאן

מקום לחזרה. ואכן במקומות הנוספים בתנ"ך,[13] שבהם מופיעה מסורת קרי וכתיב זהה, העניין שונה וודאי בא ללמדנו דבר אחר.

במאמר זה בחרנו לנקוט בגישה, שאין לחשוש לשיעורים המתמטיים. כדי למנוע בעיות של חוסר עקביות, הפתרון הפשוט ביותר הוא המודעות לעובדה, שאנו עוסקים בקירובים.[14] נראה כי אין סתירות בגמרא הנובעות מהנחה זו.

1. אקסיומות ומשפטי יסוד

בפרק זה נבנה את הבסיס הדרוש לנו להבנת הסוגיות המתיחסות לנושא המעגל והעיגול. נעשה זאת בצורה הדרגתית: החל באקסיומות ובהגדרות הבסיסיות, וכלה במשפטים המופיעים בסוגיות שבהן נדון בהמשך. בשלב זה אנו מניחים ידיעה של תורת ה"תשבורת" (כפל, חילוק וכד') עם התכונות הבסיסיות הנלוות.

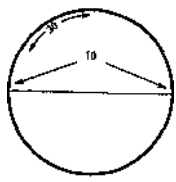
נתחיל במקום שראוי להתחיל בו: ספר הספרים. במלכים א, פרק ז, מופיע הפסוק (פסוק כ"ג), שיוביל אותנו אל האקסיומה החשובה ביותר בנושא:

ויעש את הים מוצק, עשר באמה משפתו עד שפתו עגול סביב,
וחמש באמה קומתו, וקו שלשים באמה יסוב אותו סביב.

ננסח זאת פורמאלית:

1.1 *אקסיומה* (ים של שלמה). היקף (קו) עיגול, שקוטרו (רחבו) עשר יחידות, הוא שלשים יחידות.

ובציור:



כדי שנוכל להכליל זאת, עלינו להשתמש במוסכמה (שעבורנו תהיה אקסיומה) נוספת, שהיתה ידועה לחכמי הגמרא. *מוסכמה* זאת עוסקת בפרופורציות. לפני ניסוחה, נגדיר את ההגדרה הבאה:

1.2 הגדרה. ***עיגולים דומים*** הם עיגולים, שהיחס בין היקפיהם שווה ליחס בין קוטריהם, בהתאמה.[15]

כעת קל לנסח את האקסיומה:

1.3 אקסיומה (דמיון עיגולים). כל העיגולים דומים.

ברצוננו לגזור משפט, שיהיה שקול לאקסיומה "ים של שלמה" (*1.1*), אך יהיה נוח יותר לשימושים ישומיים (ואכן חכמי הגמרא מרבים להשתמש בו בסוגיות שנדון בהן בהמשך).

1.4 הגדרה. ***עיגול יחידה*** הוא עיגול, שקוטרו (רחבו) הוא יחידה אחת.[16]

1.5 תוצאה (משפט עיגול היחידה). היקף עיגול הוא שלש יחידות אם ורק אם הוא עיגול יחידה.[17]

<u>הוכחה:</u> יהי נתון עיגול, שהיקפו שלש יחידות. נסמן את קוטרו באות d. מאקסיומת דמיון העיגולים (1.3), עיגול זה דומה לעיגול המתואר בים של שלמה (אקסיומה 1.1). לכן,

$$\frac{10}{d} = \frac{30}{3} = 10 \Rightarrow d = \frac{10}{10} = 1$$

כלומר קוטר העיגול הוא 1, או במלים אחרות, זהו עיגול היחידה. נשאיר לקורא את ההוכחה, שהיקף עיגול היחידה הוא שלש יחידות (ההוכחה דומה) □

למעשה, צירוף אקסיומות 1.1 ו 1.3 שקול לצירוף אקסיומה 1.3 ותוצאה 1.5. בהוכחה הנ"ל ראינו, שתוצאה 1.5 נובעת מאקסיומות 1.1 ו 1.3. באופן דומה, קל לראות שאקסיומה 1.1 נובעת מהצירוף של אקסיומה 1.3 ותוצאה 1.5. כמובן, אין צורך להוכיח את קיומה של אקסיומה 1.3, שכן היא מופיעה בשני הצירופים.

אמנם קל לראות, כי שילוב שתי האקסיומות שקול לנוסחה המתמטית $p = \pi d = 2\pi r$, אולם מטרתנו שונה:

1.6 הערה. יש להבין את אקסיומה 1.3 ואת תוצאה 1.5 בצורה הבאה: בהנתן קוטר עיגול, דמיונו לקוטר עיגול היחידה, שהוא 1, קובע את דמיון היקפו להיקף עיגול היחידה, שהוא 3. פעולה הפוכה תתבצע בהנתן ההיקף (כשברצוננו למצוא את הקוטר). בצורת החשיבה הזאת, כל שיש לזכור הוא את גדלי עיגול היחידה (היקף וקוטר), ואת העובדה, שכל העיגולים האחרים דומים לו.

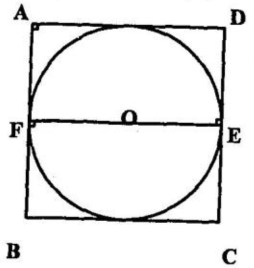
1.7 הערה. מעתה ואילך, אם לא נאמר במפורש אחרת, אנו מניחים $\pi = 3$.

1.8 הערה. בהמשך נשתמש בשיטה הקצרנית הבאה. כדי לקבל היקף עיגול בעל קוטר נתון d, נאמר $p = \pi d = 3d$, כאשר מבחינה פורמאלית, כוונתנו היא:

א. לפי אקסיומת דמיון העיגולים (1.3), העיגול הנתון דומה לעיגול היחידה.
ב. קוטר העיגול הנתון גדול פי d מקוטר עיגול היחידה (שהוא 1).
ג. היקף עיגול היחידה הוא 3, לכן היקף העיגול הנתון הוא $\pi d = 3d$.

למעשה, גם הביטוי $3d$ (או πd) אינו אלא "סמל" למספר, שהוא גדול פי שלשה מ d (ואין הכוונה לחישוב טכני $3 \times d$, אלא למציאת המספר מתוך ידיעתו).

1.9 משפט. היקף עיגול חסום בריבוע קטן ברבע מהיקף הריבוע.



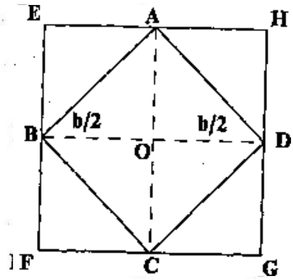
הוכחה: נראה לעין, שאורך צלע הריבוע החוסם שווה לרוחב העיגול (ראה ציור), שנסמנו d. לכן, היקף הריבוע הוא $d + d + d + d = 4d$, ואילו היקף העיגול הוא $\pi d = 3d$, ולכן היקף העיגול קטן ברבע מהיקף הריבוע.□

הצדקה מתמטית: יהי נתון עיגול, שמרכזו O, וריבוע $ABCD$ החוסם אותו. נסמן את קוטר העיגול ב d. נחבר את מרכז העיגול O עם נקודת ההשקה E. $DC \perp OE$ (המשיק מאונך לרדיוס), וכן $DC || AB$ (תכונת הריבוע).

$\therefore OE \perp AB$. לכן, המשך הקטע OE חותך את AB . נסמן את נקודת החיתוך ב F. מתקיים: $EF \perp AB$, וכן $AD \perp AB$ (מתכונות הריבוע). $\therefore AD || EF$. כמו כן, $AB || DC$ (מתכונות הריבוע). $\therefore AFED$ מקבילית. FE קוטר, שכן $AB \perp FO$. $\therefore AD = FE = d$, כלומר אורך צלע הריבוע הוא d.□

1.10 הגדרה. ***שטח***[18] ***מלבן*** (ובפרט ריבוע) הוא המספר המתקבל על ידי הכפלת אורך המלבן ברחבו.

1.11 משפט. היחס בין אורך אלכסונו של ריבוע לאורך צלעו הוא $1\frac{2}{5}$ בקירוב.



הוכחה: יהי נתון ריבוע. נחסום אותו בריבוע אחר, כך שקודקודי הריבוע יהיו במרכזי הצלעות של הריבוע החוסם (ראה ציור). אלכסוני הריבוע החסום מחלקים אותו לארבעה משולשים, ויחד עם צלעותיו אנו מקבלים חלוקה של הריבוע החוסם לשמונה משולשים שוים בשטחם. לכן, שטח הריבוע החיצוני כפול משטח הריבוע הפנימי. במלים אחרות, $b^2 = 2a^2$, כאשר a אורך צלע הריבוע החסום ו b אורך צלע הריבוע החוסם. לכן, $2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$, ומכאן $\frac{b}{a} \approx 1\frac{2}{5}$. □

הצדקה מתמטית: יהי נתון ריבוע $ABCD$. נסמן את אורך צלעו ב a, ואת אורך אלכסונו ב b. נחסום את הריבוע בריבוע אחר, בצורה הבאה: נעביר מקודקודיו ישרים, המקבילים

לאלכסוניו, ואת נקודות חיתוכם[19] נסמן $EFGH$ (ראה ציור). מדרך הבניה, $EF||AC$, וכן $AC||HG$ $\therefore$ $EF||HG$. באותו אופן, $EH||FG$. בפרט, $EBDH$ וכן $BFGD$ מקבילית. $\therefore$ $FG = BD = b$, $EH = BD = b$. באותו אופן, $EF = b = HG$.

$$\therefore EH = FG = EF = HG = b$$

$AC \perp BD$ (תכונת אלכסוני הריבוע); $EF||AC$ וכן $BD||FG$ (מהבניה). $\therefore$ $EF \perp FG$. $\therefore$ $EFGH$ מקבילית, צלעותיה שוות (ל b), ושתיים מהן מאונכות.[20]

$\therefore$ $EFGH$ ריבוע, ואורך צלעותיו b.

מכאן ההמשך פשוט: לפי הגדרה 1.10, $S_{EFGH} = b \times b = b^2$ וכן $S_{ABCD} = a \times a = a^2$.

משיקולי הקבלה, ומשום שאלכסוני ריבוע חוצים זה את זה, $AODH$ ריבוע (צלעו $\frac{1}{2}b$). היות שאלכסון של ריבוע חוצה את שטחו,

$$\begin{cases} S_{AOD} = \frac{1}{2}S_{AODH} \\ S_{ABO} = \frac{1}{2}S_{AEBO} \\ S_{OBC} = \frac{1}{2}S_{OBFC} \\ S_{OCD} = \frac{1}{2}S_{OCGD} \end{cases}$$

נסכום:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}S_{EFGH}$$

כלומר $a^2 = \frac{1}{2}b^2$, או $(\frac{b}{a})^2 = 2$. ולכן $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$.

$\sqrt{2}$ אינו רציונלי, ויש לבחור קירוב. ודאי $1 < \frac{b}{a} < 2$. לכן עלינו למצוא מספר מהצורה $1 + x$ כאשר x שבר פשוט ובו בזמן הוא קירוב טוב לתוצאה. נזכור, שעל הביטוי להיות נוח לשימוש בכתיבה ובעל פה, ולכן לא נבחר שבר כגון $\frac{1}{10}$, שכן הוא נקרא בשם המסורבל "חצי חומש". האפשרויות המתאימות הן (את הקירוב נכתוב בצורה עשרונית):

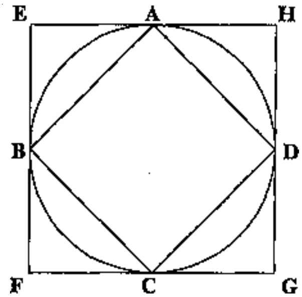
x	$\frac{1}{2}$ (פלגא)	$\frac{2}{5}$ (תרי חומשי)	$\frac{1}{3}$ (תילתא)	$\frac{1}{4}$ (ריבעא)	$\frac{1}{5}$ (חומשא)
$(1+x)^2$	2.25	**1.96**	1.77...	1.5625	1.44

$x < \frac{1}{2}$ יתרחק עוד יותר מהערך הרצוי (דרוש $(1+x)^2 \approx 2$). לאור התוצאות הנ"ל, אין הרבה אפשרויות לבחור... □

1.12 אקסיומה. שטחו של עיגול החסום בתוך ריבוע קטן ברבע משטח הריבוע.[21]

הוכחה מתמטית: ראה נספח (ההוכחה מסתמכת על טענות מתמטיות מורכבות).

1.13 משפט. שטחו של עיגול החוסם ריבוע גדול בחצי משטח הריבוע.



הוכחה: יהי נתון ריבוע $ABCD$. נחסום את הריבוע בעיגול, ואת העיגול – בריבוע $EFGH$. כפי שראינו[22] בהוכחת משפט 1.11, $S_{EFGH} = 2S_{ABCD}$. לפי אקסיומה 1.12,

$$S_O = \frac{3}{4}S_{EFGH} = \frac{3}{4} \times 2S_{ABCD} = \frac{3}{2}S_{ABCD} = S_{ABCD} + \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

.□

2. סוכה עגולה

נושא זה מובא במסכת סוכה דף ז ע"ב – דף ח ע"ב.[23] הסוגיה דנה לפי דעת רבי, שכאשר הסוכה ריבועית, שיעורה המינימלי הוא ארבע אמות על ארבע אמות.[24] הבעיה מתעוררת כאשר רוצים לבנות סוכה עגולה. בברייתא מובאת דעת אחרים: סוכה כזו פסולה (משום שאין לה זויות, ואנו צריכים סוכה עם זויות – סוכה ריבועית).[25] רבי יוחנן (שהוא אמורא) אומר: סוכה זו כשרה רק "אם יש בהיקפה כדי לישב בה כ"ד בני אדם".[26]

הגמרא מניחה שמקום מושבו של אדם הוא אמה על אמה.[27]

מקשה הגמרא: לפי הכלל "כל שיש בהיקפו שלשה טפחים, יש בו רוחב טפח", סוכה שיש ברחבה ארבע אמות (השיעור המינימלי), יש בהיקפה 12 אמות, שהן מקום מושבם של 12 אנשים, ובודאי לא 24 אנשים!

עונה הגמרא: ההנחה שדי בסוכה עגולה שקוטרה ארבע אמות אינה נכונה, כי רבי דרש סוכה ריבועית שמידותיה הן ארבע אמות על ארבע אמות (והיקפה, כמובן, גדול מ 12 אמות).

מקשה הגמרא: אף על פי כן, היקף ריבוע יתר על היקף עיגול ברבע, ולכן היקף הסוכה שדרש רבי הוא 16 אמות, ולא 24 אמות.

עונה הגמרא: ההצעה שהעלנו מדברת בסוכה עגולה בהיקף 16 אמות, אולם דרוש שאפשר יהיה להכניס ריבוע של ארבע אמות על ארבע אמות לשטח סוכה זו (שהרי רבי דרש שגודל

הסוכה יהיה לפחות ארבע אמות, ובצורת ריבוע). ואילו בסוכה שהיקפה 16 אמות אי אפשר להכניס ריבוע כזה, שכן פינות הריבוע יצאו מהעיגול!

מוסיפה הגמרא להקשות: אפילו אם נדרוש שלשטח הסוכה יכנס ריבוע של ארבע אמות על ארבע אמות, היקף הסוכה יהיה 17 אמות פחות חומש, ולא 24 אמות.

הגמרא מנסה לתרץ, שרבי יוחנן לא דייק בלשונו,[28] אך דוחה נסיון זה בכך, שאת הטענה "לא דייק" אומרים כאשר ההפרש הוא קטן, אך כאשר ההפרש הוא גדול (כמו כאן, שההפרש הוא 7 אמות וחומש) אין אומרים את הטענה "לא דייק".

מנסה מר קשישא לתרץ: התבססנו על הטענה, שמקום מושבו של אדם הוא אמה על אמה, אך אם נשנה הנחה זו ונאמר שמקום מושבם של שלשה אנשים הוא שתי אמות, נקבל כי היקף הסוכה הדרוש הוא 16 אמות.

דנה הגמרא: השיעור שדרשנו הוא 17 אמות פחות חומש, ואילו השיעור שמר קשישא נותן הוא פחות משיעור זה!

דוחה הגמרא: לפי שיטת מר קשישא, רבי יוחנן לא דייק בדבריו, אך את הטענה "לא דייק" אומרים רק כאשר אי הדיוק הוא "לחומרא", דהיינו: השיעור המוצע הוא גדול מהשיעור המינימלי הדרוש. אך כאשר אי הדיוק הוא "לקולא" (שיעור קטן יותר מהדרוש), כמו במקרה זה, לא אומרים "לא דייק".

מתרץ רב אסי: ההנחה המקורית, שמקום מושבו של אדם הוא אמה על אמה, נכונה (ולא כפי שטען מר קשישא).

מדוע, איפוא, אמר רבי יוחנן 24 אמות ולא 17 אמות פחות חומש? מכיון שרבי יוחנן לא החשיב את מקום מושבם של האנשים כחלק משטח הסוכה. היקף העיגול החיצוני הוא 24 אמות, ומכאן יוצא שהיקף העיגול הפנימי הוא 18 אמות, וזהו בקירוב השיעור שאותו רצינו (17 אמות פחות חומש).[29]

מציעה הגמרא תירוץ נוסף: רבי יוחנן סובר כשיטת דייני דקיסרי,[30] שאומרים שהיקף עיגול החסום בריבוע, קטן ברבע מהיקף הריבוע החוסם והיקף עיגול החוסם ריבוע, גדול בחצי מהיקף הריבוע, ולכן אם היקף הריבוע החסום הוא 16 אמות (היקף ריבוע בעל צלע של ארבע אמות) - היקף העיגול החוסם אותו הוא 24 אמות - כפי שרבי יוחנן אמר.

הגמרא דוחה תירוץ זה, משום שהיקף עיגול החוסם ריבוע אינו גדול בחצי מהיקף הריבוע החסום.

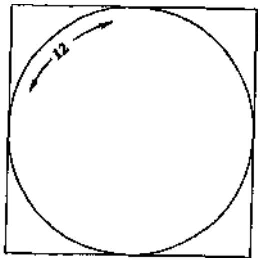
סוכה עגולה - ניסוח מתמטי

2.1 **טענה.** *היקף עיגול, שמימדיו 4 יח'×4 יח' (קוטרו 4 יח'), הוא 12 יח'.*

<u>הוכחה:</u> לפי הערה 1.8, היקף העיגול הוא $d = 3 \times 4 = 12$.

2.2 **תוצאה.** היקף סוכה עגולה, שמימדיה 4 אמות × 4 אמות (קוטרה 4 אמות), הוא 12 אמות.

2.3 טענה. היקף ריבוע, שמימדיו 4 יח' × 4 יח', הוא 16 יח'.



הוכחה: אפשר להוכיח זאת ישירות (לפי סכום אורכי הצלעות), אך נוכיח זאת בדרך הגמרא. לפי הערה 2.1, היקף העיגול החסום בריבוע הנדון (ראה ציור) הוא 12 יח'. נסמן את היקף הריבוע באות c . לפי משפט 1.9, $\frac{3}{4}c = 12$, או במלים, c הוא המספר שאם נוריד ממנו רבע, נקבל את המספר 12. לכן, $c = 16$. $\square$

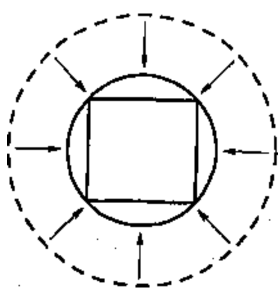
בפרט, היקף סוכת רבי (הריבועית) הוא 16 אמות, ומכאן:

2.4 תוצאה. היקף סוכה עגולה, שהיקפה זהה להיקף סוכת רבי, הוא 16 אמות.

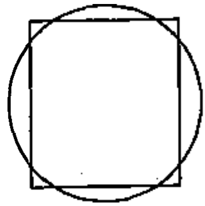
2.5 טענה. אם נכניס ריבוע שמימדיו 4 יח' × 4 יח' לתוך עיגול שהיקפו 16 יח', יצאו פינות הריבוע מהעיגול.

הוכחה: ראשית, נשים לב שבמהלך הגמרא מופיעה הטענה מיד לאחר ההצעה של עיגול בהיקף 16 יח', ולפני חישוב אלכסון הריבוע. לכן, מדובר בטיעון אלמנטארי שאינו דורש חישובים ונובע אך ורק מידיעת היקף העיגול.

נניח - על דרך השלילה - שהפינות אינן יוצאות. אפשר להניח (על ידי הקטנת העיגול), שהעיגול חוסם את הריבוע (בכך אנו רק מקטינים את היקפו):



אורך כל קשת גדול מאורך המיתר הנשען עליה, ולכן היקף העיגול (סכום אורכי הקשתות) גדול מהיקף הריבוע, שהוא 16 יח', בסתירה לנתון שהיקף העיגול 16 יח'. לכן, אם היקף העיגול 16 יח', אין הוא יכול להכיל את הריבוע, והפינות יוצאות:



$\square$.

2.6 תוצאה. אם נכניס סוכה ריבועית, שמימדיה 4 אמות × 4 אמות (סוכת רבי) לתוך סוכה עגולה, שהיקפה 16 אמות, יצאו פינות הסוכה הריבועית מתוך הסוכה העגולה.

2.7 טענה. היקף עיגול, החוסם ריבוע שמימדיו 4 יח' × 4 יח', הוא $\frac{1}{5}-17$ יח'.

<u>הוכחה:</u> לפי משפט 1.11 (וראה ציור שם), $BD=1\frac{2}{5}\times 4=5\frac{3}{5}$ (אלכסון הריבוע). $\angle BCD=90^0$ (זוית הריבוע). $\therefore BD$ קוטר העיגול (זוית היקפית בת 90^o נשענת על הקוטר). לפי הערה 1.8, $p=\pi d=3\times 5\frac{3}{5}=16\frac{4}{5}=17-\frac{1}{5}$. $\square$

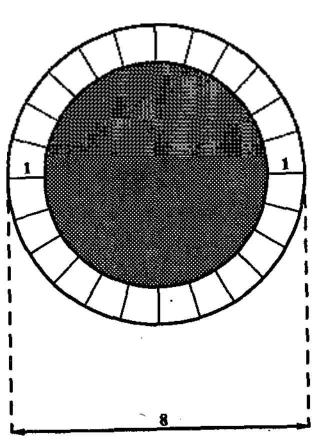
2.8 תוצאה. היקף סוכה עגולה, החוסמת את סוכת רבי, הוא $\frac{1}{5}-17$ אמות.

כמובן, תוצאה זו רחוקה מאד מדרישת רבי יוחנן (24 אמות, בהנחה שמקום מושבו של אדם הוא אמה). אם נניח שמקום מושבם של שלשה אנשים הוא 2 אמות (כפי שטוען מר קשישא), יהיה היקף סוכת רבי יוחנן $24\times\frac{2}{3}=16$ אמות, שאמנם הוא קרוב יותר לתוצאה 2.8, אך בעייתי משום שהוא קטן מהתוצאה (וכאשר אין מדייקים יש להחמיר ולא להקל).

טענתו של מר קשישא, אף על פי שנדחתה על ידי הגמרא, מעניקה לנו כיוון חשיבה מעניין: לטענת מר קשישא, אין הכרח להניח, שמקום מושבו של אדם הוא דוקא אמה. לפי זה, אם נאמר שמקום מושבם של 7 אנשים הוא 10 אמות, נקבל $24\times\frac{7}{10}=17-\frac{1}{5}$.[31]

על כל פנים, הגמרא אינה מקבלת את הטענה שרבי יוחנן לא דייק, משום שאי הדיוק במקרה זה הוא לקולא.

רב אסי מציע הסבר אחר, לפי ההנחה המקורית שמקום מושבו של אדם הוא אמה על אמה. סוכתו נראית כך:



היקף העיגול החיצוני הוא 24 אמות, והטבעת מציינת את השטח שתופסים 24 האנשים שדרש רבי יוחנן (כל מקטע מציין שטח שתופס איש אחד). העיגול הפנימי הוא היקפה של הסוכה הכשרה (רבי יוחנן לא החשיב את מקום האנשים כחלק משטח הסוכה הכשרה).

2.9 **טענה.** היקף סוכת רב אסי (העיגול הפנימי) הוא 18 אמות.

__הוכחה:__ קוטר העיגול החיצוני d מקיים $24 = 3 \times d$, לכן $d = 8$. כיון שרחבו של אדם הוא אמה, עובי הטבעת הוא אמה, ולכן קוטר העיגול הפנימי d' מקיים $8 = d = 1 + d' + 1$. $\therefore d' = 6$. היקף העיגול הפנימי p' מקיים $p = \pi d' = 3 \times 6 = 18$.$\square$

2.10 **הערה.** לפי הסבר רב אסי, אנו רואים שמקום מושבו של אדם אינו אמה עגולה, ואף לא בדיוק ריבועית, אלא צורה הדומה לריבוע כבציור. למעשה, מקום מושבו של אדם בפני עצמו הוא אמה ריבועית, אך כאשר יושבים האנשים במעגל, טבעי הוא שיצטמצמו היכן שצפוף, ויתרחבו היכן שיש מקום בריווח, כבציור. לפיכך נקט רבי יוחנן בדרישה 24 "בני אדם" ולא "אמות ריבועיות/עגולות". יתר על כן, אם נבדוק מתמטית נראה, שאדם תופס למעשה פחות מאמה רבועה בצורת ישיבה זאת.

__הוכחה:__ לפי אקסיומה 1.12, שטח העיגול החיצוני הוא $\frac{\pi}{4} d^2 = \frac{3}{4} \times 8^2 = 48$ אמות רבועות, ושטחו של העיגול הפנימי הוא $\frac{\pi}{4} d'^2 = \frac{3}{4} \times 6^2 = 27$ אמות רבועות. לכן, שטח הטבעת הוא $48 - 27 = 21$ אמות רבועות, כלומר כל אדם תופס $\frac{21}{24} = \frac{7}{8}$ אמות רבועות.$\square$

הגמרא מציעה הסבר נוסף, שרבי יוחנן הסתמך על הכלל של דייני דקיסרי, שלפיו היקף עיגול החוסם ריבוע גדול בחצי מהיקף הריבוע. לכן, כדי לחסום את סוכת רבי (4 אמות × 4 אמות), שהיקפה 16 אמות (תוצאה 2.4), דרוש עיגול שהיקפו p מקיים $p = 16 + \frac{1}{2} \times 16 = 24$. לפי תוצאה 2.8, ההנחה הזאת מוטעית. לכן דוחה הגמרא את ההסבר.

2.11 **הערה.** אפשר לפתור את הבעיות המתעוררות במהלך הגמרא, אם נבין את דרישת רבי יוחנן בצורה הבאה: בהיקפה = בתוך היקפה, כלומר בשטחה.[32] גם הכללים של דייני דקיסרי מתייחסים לשטח.

__הוכחה:__ לפי הגדרה 1.10, שטחה של סוכת רבי הוא, $16 = 4 \times 4$ אמות רבועות. לפי הכלל של דייני דקיסרי, שטח העיגול החוסם את סוכת רבי גדול בחצי משטח סוכת רבי, ולכן שווה ל $16 + \frac{1}{2} \times 16 = 24$ אמות רבועות, כפי שדורש רבי יוחנן. הכללים של דייני דקיסרי, אם נפרשם ככללים המתייחסים לשטח, מקבילים לאקסיומה 1.12 ולמשפט 1.13.[33]

3. חלון עגול

בעניין עירוב חצרות, מבחינים בין חצרות נפרדות לבין חצרות שאפשר לצרפן. חלון שבין שתי חצרות יכול לצרף את החצרות. שנינו במשנה (עירובין דף ע"ו ע"א) שחלון ריבועי הראוי לצרף שתי חצרות הוא בגודל ארבעה טפחים על ארבעה טפחים לפחות וגם צריך להיות בתוך עשרה טפחים לקרקע.

רבי יוחנן פוסק שכאשר החלון עגול, "צריך שיהא בהיקפו עשרים וארבעה טפחים ושנים ומשהו מהן בתוך עשרה, שאם ירבענו נמצא משהו בתוך י'".

מקשה הגמרא: לפי הכלל "כל שיש בהיקפו שלשה טפחים, יש בו רוחב טפח", נקבל שאם אנו רוצים רוחב ארבעה טפחים בחלון - מספיק שיהיו בהיקפו 12 טפחים ולא 24 טפחים.

עונה הגמרא: מה שהעמדנו בחלון עגול שרוחבו ארבעה טפחים - זה לא מספיק, כי המשנה דרשה חלון ריבועי בעל צלע של ארבעה טפחים, והיקף ריבוע כזה גדול מ 12 טפחים.

מקשה הגמרא: אם צריך שההיקף יהיה כהיקף הריבוע, אזי ההיקף הדרוש הוא 16 טפחים, ולא 24 טפחים.

עונה הגמרא: מה שדרוש במקרה זה הוא שיכנס לשטח החלון העגול ריבוע בגודל של ארבעה טפחים על ארבעה טפחים, ולא יתכן להכניס לחלון בהיקף 16 טפחים ריבוע כזה, בגלל פינות הריבוע - שיצאו מהעיגול.

מקשה הגמרא: גם אם נדרוש שיכנס ריבוע בגודל זה לתוך שטח החלון, עדיין ההיקף המינימלי הדרוש הוא 17 טפחים פחות חומש ולא 24 טפחים.

מתרצת הגמרא: רבי יוחנן סבר כדייני דקיסרי הסוברים שבהיקף ריבוע החוסם עיגול יש רבע יתר על היקף העיגול, והיקף עיגול החוסם ריבוע - יתר על היקף הריבוע בחצי (מהיקף הריבוע), ולכן אם היקף הריבוע הוא 16 טפחים (כהיקף ריבוע בעל צלע של ארבעה טפחים) - היקף העיגול החוסם אותו הוא 24 טפחים.[34]

חלון עגול - ניסוח מתמטי

את הרקע הדרוש להסבר המתמטי הכנו זה מכבר, וכל שנותר לנו הוא לתת את הניסוח המתמטי של הטענות, ולראות שכל דיון הגמרא הוא תוצאה ישירה של הכלים שפיתחנו.

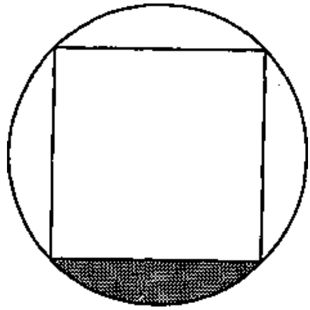
3.1 *משפט.*

א. היקף חלון עגול שמימדיו 4 טפחים × 4 טפחים (קוטרו 4 טפחים) הוא 12 טפחים.
ב. היקף חלון עגול, שהיקפו זהה להיקף החלון הריבועי הכשר, הוא 16 טפחים.
ג. אי אפשר להכניס את החלון הריבועי לתוך חלון עגול שהיקפו 16 טפחים, מבלי שיצאו הפינות אל מחוץ לחלון העגול.
ד. היקף חלון עגול החוסם את החלון הריבועי הכשר הוא $17-\frac{1}{5}$ טפחים.

<u>הוכחה:</u> תוצאה ישירה מטענות 2.1, 2.3, 2.5 ו 2.7. □

3.2 *הערה.* כמו בהערה 2.11 בסוכה עגולה, כך גם כאן אפשר להסביר את דברי רבי יוחנן וכן את שיטת דייני דקיסרי על ידי הבנתם כמוסבים על שטח. גם הדרישה הנוספת של רבי יוחנן - "ושנים ומשהו מהן בתוך עשרה" - מובנת על פי הסבר זה.

<u>הוכחה:</u> ראה 2.11 לגבי הדרישה הראשונה של רבי יוחנן ולגבי הכללים של דייני דקיסרי. לגבי הדרישה השניה, נתבונן בציור:



לפי דרישת רבי יוחנן, שטח העיגול הוא 24 טפחים רבועים. שטח הריבוע הוא $16 = 4 \times 4$ טפחים רבועים. לכן, סכום השטחים הכלואים בין כל מיתר לקשת המתאימה הוא $8 = 16 - 24$ טפחים רבועים. משיקולי סימטריה, השטח מתחלק בשוה בין ארבע הגזרות, ולכן השטח הכלוא בין הצלע התחתונה של החלון הריבועי לקשת התחתונה של החלון העגול הוא 2 טפחים רבועים. מכאן יובנו דברי רבי יוחנן: אם נדרוש ש"שנים ומשהו" מהטפחים הרבועים המהוים את שטח החלון יהיו בתוך גובה 10 טפחים מהקרקע, יצא שהחלון הריבועי יהיה אף הוא בתוך 10 טפחים מהקרקע.[35] □

3.3 הערה ביבליוגרפית. רעיון זה של פירוש הסוגיות לפי השטח מופיע ב ⟦12⟧, מבלי לציין מקור (ובלי הצדקה לשונית). הרעיון מפותח בהרחבה ב"גליא מסכת" ⟦ז⟧ (גם שם בלי מקור). העמדת דברי דייני דקיסרי כעוסקים בשטח נמצאת ב"בית הבחירה" למאירי (הן על הגמרא בסוכה דף ח ע"א, והן על הגמרא בעירובין דף ע"ו). בהערות על המאירי במהדורת מ. הרשלר, עמ' רצ"ג הערה 3 כתב המהדיר: "הרב בעל המאור תמה על דייני דקיסרי איך אפשר שיטעו כל כך, ונתפלפל בזה עם החכם רבי יהודה אבן-תיבון, עד שהעלו תוך משא ומתן שלהן לזכות דייני דקיסרי שלא להרחיקם בטעות גדול". מכאן שהעמדה זאת של הכללים היתה ידועה להרב בעל המאור ולרבי יהודה אבן-תיבון. למעשה, הרעיון הופיע הרבה לפני כן ב"חיבור המשיחה והתשבורת" לראב"ח[36] (ראה פרטים נוספים בנספח), שנכתב בראשית המאה הי"א. הסבר דברי רבי יוחנן אינו מופיע שם. ההצדקה הלשונית[37] להסבר מופיעה בפירוש "עבודת עבודה" על "עבודת הקודש" לרשב"א ⟦ט⟧.

בהערות של הרב צבי הירש יפה במהדורת "מקיצי נרדמים", שנדפסה בברלין 1913, עמ' 125-123 מובא גילגולו של הסבר זה: המקור הראשון הידוע הוא תשובתו של הרי"ף, שנכתבה בערבית ותרגומה לעברית (על ידי אברהם הלוי אבקרט) נמצא בספר "תמים דעים" להראב"ד סימן רכ"ג,[38] ושם מבוארים גם דברי רבי יוחנן בעירובין כפי שהבאנו לעיל (ועם אותה הוכחה). ראב"ח מפרש את הכלל "כמה מרובע יתר על העיגול - רביע" בשטח, משום שהוא מביאו ככלל מתמטי, אולם התוספות - שמפרשים את דברי הגמרא, ואין כוונתם ללמדנו את חכמת השיעור - צריכים היו להביא פירוש זה דוקא בכלל של דייני דקיסרי "עיגולא מגו ריבועא ריבעא", שכן מקור הכלל הקודם הוא במשנה אהלות, פרק י"ב משנה ו, שם מדובר על ההיקף ולא על השטח. מכאן רמז לכך שהתוספות לקחו את פירושם מראב"ח, או מהעתק של דבריו שהתגלגל לידם. על כל פנים, בעלי התוספות מביאים פירושם בשם "ויש מפרשים".[39]
כמו כן ידוע, שראב"ח שהה בצרפת בשנת 1123, ושספרו נכתב (כפי שניתן ללמוד מהקדמת

המחבר ומחתימתו) עבור חכמי צרפת. לא יפלא הדבר, איפוא, שדברי ראב״ח הגיעו לבעלי התוספות.

תשובת הרי״ף לא היתה ידועה לבעלי התוספות משום שנכתבה ערבית, ולכן לא ראו את הרעיון שאפשר להסביר את דברי רבי יוחנן (לענין סוכה עגולה וחלון עגול) כמוסבים על שטח. לכן פירשו שרבי יוחנן מדבר על הקו המקיף.

תשובה מקורית מספק הרב יפה, שאלה מדוע דוקא דייני דקיסרי הבינו את דברי רבי יוחנן כך: בעיר קיסרי ובישיבה שם השתמשו במלה ״בהיקפו״ בהוראה על השטח המוקף, בניגוד לשאר המקומות, שהשתמשו במלה זאת כפי הוראתה במשנה - על אורך הקו המקיף. רבי יוחנן, שלמד תורתו בקיסרי בבית מדרשו של רבי הושעיה רבו,[40] סיגל לו את דרכי הלשון אשר בקיסרי.[41] לכן רק רבנן דקיסרי, אשר ידעו את דרכי הלשון אשר במקומם, ידעו לברר את כוונת רבי יוחנן האמיתית שבאמרו ״בהיקפו״, כוונתו אל השטח, ונמצאו דבריו נכונים וצודקים.

4. מקוה עגול

בכמה מקומות[42] דנה הגמרא בשיעורו המינימלי של מקוה טהרה. שיעור זה לומדת הגמרא מהפסוק ׳ורחץ במים את כל בשרו׳[43]... מים שכל גופו עולה בהן, וכמה הן? אמה על אמה ברום שלש אמות.[44] כלומר נפח המים[45] להכשר מקוה הוא שלש אמות מעוקבות.[46]

דיון נוסף שממנו אפשר ללמוד על דרך הניתוח המתמטי בגמרא מובא בסוגיה העוסקת במציאת צורת הים שעשה שלמה.[47] תני רבי חייא: ים שעשה שלמה היה מחזיק מאה וחמשים מקוה טהרה.[48] מכאן שנפחו צריך להיות $450 (= 3 \times 150)$ אמות מעוקבות. כמו כן ידוע ש״עשר באמה רחבו ... וחמש באמה קומתו״ (מלכים א, ז כ״ג). על סמך מידע זה מבררת הגמרא את צורת הים שעשה שלמה.

מקשה הגמרא: אם נאמר שצורת הים שעשה שלמה היא תיבה (בסיס ריבועי שאורך צלעו 10 אמות), נקבל שנפחו הוא 500 אמות מעוקבות, בניגוד לדברי רבי חייא.

מציעה הגמרא: צורת הים שעשה שלמה היא גליל (בסיס עגול בקוטר 10 אמות).

דוחה הגמרא: לפי הכלל ״כמה מרובע יתר על העיגול - רביע״, יוצא שנפח הים במקרה זה הוא 375 אמות מעוקבות.

מסיק רמי בר יחזקאל: הים לא היה כולו תיבה, ולא כולו גליל, אלא 3 האמות התחתונות היו בצורת תיבה, ושתי העליונות - בצורת גליל. במקרה זה נפח הים הוא אכן 450 אמות מעוקבות.

בעקבות הקביעה שנפח מקוה כשר הוא 3 אמות מעוקבות, מתמודד בעל התשב״ץ[49] עם השאלה, מהם השיעורים המינימליים של מקוה עגול (בצורת גליל). בעל התשב״ץ מעלה שלש אפשרויות[50]:

1. קוטר בסיסו אמה וגובהו ארבע אמות.
2. קוטר בסיסו קטן במקצת משבעה טפחים וגובהו שלש אמות.
3. קוטר בסיסו שתי אמות וגובהו אמה אחת.[51]

כמו כן, ישנם דיונים בראשונים[52] על חישובי נפחים של צורות מקוה מיוחדות: כדור וכדור קטום. החישובים יובאו בדיון המתמטי.

מקוה עגול - ניסוח מתמטי

מציאת צורת הים שעשה שלמה

אסטרטגיה: ידוע שנפח הים שעשה שלמה היה 450 אמות מעוקבות, וכן שגובהו היה 5 אמות, ורחבו 10 אמות. נבדוק את התיאור הפשוט ביותר (תיבה). נראה שהתוצאה גדולה מהדרוש. נבדוק את המקרה הקיצוני לצד האחר - גליל. נראה שנפח הגליל קטן מהדרוש. לכן, יהיה עלינו למצוא את מקרה הבינים, שבו מתקבלת התוצאה הדרושה.

4.1 הגדרה. ***נפח*** של תיבה ושל גליל הוא המספר המתקבל מהכפלת שטח הבסיס שלהם בגובהם.

4.2 טענה. נפחה של תיבה, שמימדי בסיסה 10 אמות $\times$ 10 אמות, וגובהה 5 אמות, הוא 500 אמות מעוקבות.

<u>הוכחה:</u> שטח הבסיס הוא $10 \times 10 = 100$ אמות רבועות (הגדרה 1.10), ולכן לפי הגדרה 4.1, נפחה הוא $100 \times 5 = 500$ אמות מעוקבות.□

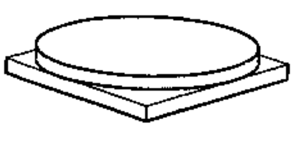
4.3 מסקנה. הים של שלמה לא היה בנוי בצורת תיבה. יתר על כן, נפח תיבה במימדים הדרושים גדול מהדרוש.

4.4 טענה. נפחו של גליל, שקוטר בסיסו 10 אמות וגובהו 5 אמות, הוא 375 אמות מעוקבות.

<u>הוכחה:</u> בסיס הגליל הוא העיגול החסום בריבוע שהוא בסיס התיבה מהמשפט הקודם. לכן לפי אקסיומה 1.12, קטן ברבע מ 100 אמות רבועות, כלומר שוה ל 75 אמות רבועות. לכן מהגדרה 4.1, נפח הגליל הוא $75 \times 5 = 375$ אמות רבועות.□

4.5 מסקנה. הים של שלמה לא היה בנוי בצורת גליל; נפח גליל במימדים הדרושים קטן מהדרוש.

4.6 טענה. נפח צורה גאומטרית בגובה 5 אמות, ששלש אמותיה התחתונות הן תיבה ברוחב 10 אמות, ושתי אמותיה העליונות הן גליל ברוחב 10 אמות, הוא 450 אמות מעוקבות.



<u>הוכחה:</u> נפח צורה זאת שוה לסכום נפחי התיבה והגליל שמרכיבים אותה. כפי שראינו בשתי ההוכחות הקודמות, שטח בסיס התיבה הוא 100 אמות רבועות, ושטח בסיס הגליל הוא 75 אמות רבועות. לכן, נפח התיבה הוא $100 \times 3 = 300$ אמות מעוקבות, ונפח הגליל הוא $75 \times 2 = 150$ אמות מעוקבות. לכן, נפח הצורה הוא $300 + 150 = 450$ אמות מעוקבות.□

4.7 מסקנה. צורת הים של שלמה היתה כמתואר ב 4.6.[53]

שיעורי מקוה גלילי כשר

4.8 הערה. בסעיף זה וכן בסעיף הבא, לא נפרט את המשפטים וההגדרות שאנו מסתמכים עליהם. אנו מניחים שהקורא הספיק לרכוש עד כה את המיומנות הדרושה להבנת ההוכחה ולידיעת המשפטים וההגדרות שאנו מסתמכים עליהם.

4.9 טענה. נפחו של גליל, שקוטרו אמה וגובהו 4 אמות, הוא 3 אמות מעוקבות.

הוכחה: שטח ריבוע שאורך צלעו אמה הוא אמה רבועה. לכן, שטח עיגול שרחבו אמה הוא $\frac{3}{4}$ אמה רבועה, ולכן נפח הגליל הוא $\frac{3}{4} \times 4 = 3$ אמות מעוקבות.□

4.10 טענה. נפחו של גליל, שקוטרו $\sqrt{\frac{4}{3}}$ אמות[54] וגובהו 3 אמות, הוא 3 אמות מעוקבות.

הוכחה: כמו קודם, שטח ריבוע ברוחב כזה הוא $\sqrt{\frac{4}{3}}^2 = \frac{4}{3}$ אמות רבועות, ולכן שטח העיגול הוא $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$ אמה רבועה, ומכאן שנפח הגליל הוא $1 \times 3 = 3$ אמות מעוקבות.□

4.11 טענה. נפחו של גליל, שקוטרו שתי אמות וגובהו אמה, הוא 3 אמות מעוקבות.

הוכחה: $3 = 1 \times \left(\frac{3}{4} \times (2 \times 2)\right)$.□

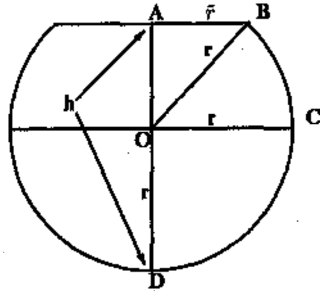
שיטות לחישוב גדלים שונים

בסעיף זה נשתמש, בחלק מההוכחות, בטענות מתמטיות מורכבות. הקורא שאינו בקי בנושאים הדרושים יוכל להסתפק בהבנת הטענות.

מטרתנו כעת היא מציאת נוסחה, שתאפשר לנו לחשב את נפחו של כלי, שצורתו כדור קטום. לשם כך, עלינו למצוא את קוטרו של הכלי.

4.12 טענה. קוטרו של כדור קטום, שגובהו h ומחוג פתחו $\tilde{r}$, נתון על ידי הנוסחה $d = 2r = h + \frac{\tilde{r}^2}{h}$.[55]

הוכחה: נתבונן בחתך הכלי:



מהציור ברור, ש $OB = OC = OD = r$ (מחוגים של העיגול), וכן $AB = \tilde{r}$, $AD = h$. לכן, $AO = AD - OD = h - r$. ממשפט פיתגורס עבור משולש ABO,

$$r^2 = OB^2 = AO^2 + AB^2 = (h-r)^2 + \tilde{r}^2 = h^2 - 2hr + r^2 + \tilde{r}^2 \Rightarrow 2hr = h^2 + \tilde{r}^2$$

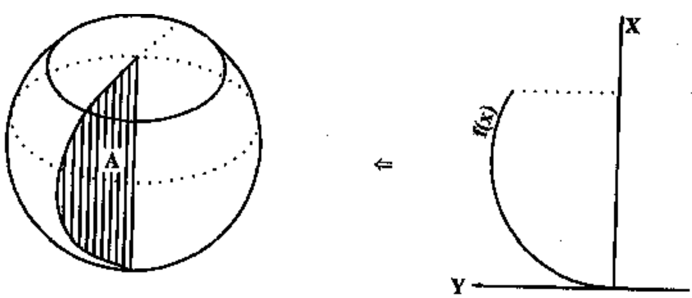
חלוקת שני האגפים ב h תיתן את הדרוש.$\square$

4.13 טענה. נפח כלי בצורת כדור קטום, שגובהו h ומחוגו r, הוא $\frac{2}{3}\pi r^2 h$ בקירוב.[56]
להוכחת הטענה, נשתמש במשפט מהאנליזה המתקדמת, לחישוב מדוייק של נפח המקוה.

4.14 משפט. נפחו של גוף, המתואר על ידי סיבוב גרף המשואה $y = f(x)$ סביב קטע $[a,b]$ על ציר ה x , שוה ל

$$\int_a^b \pi y^2 dx$$

במקרה שלנו, הגוף מתואר על ידי המשואה $y = \sqrt{r^2 - (x-r)^2} = \sqrt{2xr - x^2}$, בקטע $[0,h]$.



(נשים לב, שאם נסובב את הגרף, שמשוואתו נתונה, סביב ציר ה x, נקבל בדיוק את צורת המקוה התלת - מימדית: כדור קטום).

לפי משפט 4.14, נפח המקוה הוא

$$\int_0^h \pi y^2 dx = \int_0^h \pi(2xr - x^2)dx = \pi\left[x^2 r - \frac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi(h^2 r - \frac{h^3}{3})$$

זהו הנפח המדויק של הכלי. נראה שנפח זה שוה בקירוב ל $\frac{2}{3}\pi r^2 h$.

h	נפח לפי 4.13	נפח מדוייק
0	0	0
$\frac{1}{2}r$	$\frac{1}{3}\pi r^3$	$\frac{5}{24}\pi r^3$
r	$\frac{2}{3}\pi r^3$	$\frac{2}{3}\pi r^3$
$1\frac{1}{2}r$	πr^3	$\frac{9}{8}\pi r^3$
$2r$	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$\frac{4}{3}\pi r^3$

אפשר להוכיח, שההפרש הגדול ביותר בין הנוסחאות מתקבל בנקודות $r(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3})$, ושם ההבדל הוא $0.1283\pi r^3$, והטעות היחסית היא 0.108741 בקירוב. נשים לב, שעבור כדור שלם וחצי כדור מתקבלים הערכים המדוייקים.[57]

לסיכום: במרבית המקרים הנוסחה מהווה קירוב טוב לנפח המקוה, והיא נוחה יותר לשימוש.[58] □

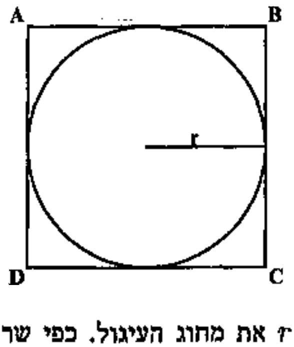
נספח: הוכחת הסבר התוספות לכלל "כמה מרובע יתר על העגול רביע"

מטרתנו העיקרית בפרק זה היא להוכיח בצורה מתמטית פורמאלית את הסבר התוספות במסכת סוכה, דף ח ע"א.[59] הבנת ההוכחה דורשת ידע בסיסי באנליזה מתקדמת, ובשל כך ילווה כל שלב בהסבר אינטואיטיבי. המסקנה הסופית תהיה:

דרך ההוכחה בפירוש התוספות נכונה, והיא אנאלוגית להוכחה מתמטית טהורה

הסבר התוספות לטענת הגמרא ("כמה מרובע יתר על העיגול רביע")

לשיטת התוספות, טענת הגמרא מתיחסת לשטח,[60] כלומר מקבילה לאקסיומה 1.12 .



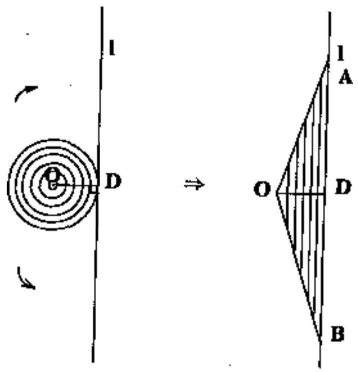
בהתייחס לשרטוט הנ"ל, נסמן ב r את מחוג העיגול. כפי שראינו בהוכחת משפט 1.9, אורך צלע הריבוע הוא $d = r + r = 2r$. מכאן, ששטח הריבוע החוסם הוא $S_{ABCD} = 2r \times 2r = 4r^2$. לפי הסבר התוספות לטענת הגמרא (שטח הריבוע החוסם גדול ברבע משטח העיגול החסום), $S_o = 3r^2 = \pi r^2$. כלומר: טענת הגמרא - לשיטת התוספות - היא המחשה גאומטרית של הנוסחה המתמטית לחישוב שטח עיגול. למעשה, הטענה שקולה לנוסחה זאת (קרא את ההסבר הקודם מהסוף להתחלה).

בעלי התוספות מוכיחים את הטענה הנ"ל באמצעות מערכת האקסיומות שבנינו, עם טענות עזר, המסתברות על פי מראה העינים, אולם יש להיזהר כשמשתמשים בהן.[61]

הסבר התוספות

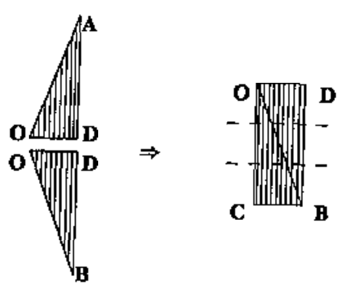
נתבונן בעיגול היחידה[62] (ברוחב טפח). לשם פשטות, אפשר להתבונן על העיגול כעל אוסף של חוטים רבים (דקים[63]), המונחים בצורת טבעות בין המרכז לחוט ההיקף. ארכו של חוט ההיקף (החוט החיצוני) = 3 ט' (אקסיומת עיגול היחידה). כל חוט מהווה מעגל בפני עצמו, בעל קוטר שהוא פעמיים מחוגו ($d = 2r$) וארכו של החוט גדול פי שלשה מקוטרו ($p = \pi d = 3d$).

יוצא, שהשינוי של אורכי החוטים הוא לינארי, כלומר יחסי ישר לשינוי המחוג/הקוטר. לכן, אם נחתוך את החוטים לאורך מחוג העיגול (ראה ציור), ונפרוש אותם לאורך המשיק l, נקבל משולש.[64]



קודקוד המשולש O הוא מרכז העיגול, ובסיסו AB הוא החוט החיצוני, שארכו 3 טפחים. גובה המשולש הוא מחוג העיגול OD וארכו $\frac{1}{2}$ טפח (מחצית הקוטר). נשים לב, כי היות שבחרנו את l להיות משיק לעיגול, מתקבל $OD\perp l$.

מכאן ההמשך פשוט (בעלי התוספות בוחרים להמשיך בדרך ההוכחה הגאומטרית, שהיא הדרך ה"נראית לעין"): נחצה את המשולש באמצעו (לאורך OD). נעתיק את חלקו העליון, תוך סיבובו, כך שיתקבל המלבן $OCBD$ (דרך הבניה - $CB = OD$, $OC = AD$).



קל להוכיח שהבניה נכונה, כלומר:

1. מתקבל מלבן.
2. המשולש OCB חופף למשולש AOD , ולכן

$$S_{OCBD} = S_{OCB} + S_{BDO} = S_{ODA} + S_{BDO} = S_{OAB} = S_O$$

כלומר: שטח העיגול שווה לשטח מלבן, שארכו $\frac{3}{2}$ טפחים וגובהו $\frac{1}{2}$ טפחים. מלבן זה מורכב משלשה ריבועים $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ (ראה ציור), ואילו הריבוע החוסם את עיגול היחידה מורכב מארבעה

ריבועים כאלה. לכן היחס בין שטח העיגול לשטח הריבוע הוא $\frac{3}{4}$, או בלשון הגמרא (לשיטת התוספות) "מרובע יתר על העיגול רביע".□

הוכחת הסבר התוספות בעזרת האנליזה המתקדמת - רקע

כפי שאפשר להבחין, הסבר התוספות (גם לאחר ששינינו מעט את הנוסח המקורי שלו[65]) אינו מהוה הוכחה מתמטית פורמאלית. הבעיה הראשונה שמתעוררת היא התיחסותם של בעלי התוספות אל העיגול כאל אוסף חוטים דקים (ראה גם לעיל הערה 4). בעיה זו נפתור אם נפנה אל ההוכחה כפי שנכתבה במקור ב"חיבור המשיחה והתשבורת" לראב"ח (⟦ג⟧, עמ. 61):

> ואחר שידענו הקו הסובב [= ההיקף] והקוטר, אנו יודעים תשבורת [= שטח] כל העגולה [= העיגול] ... והאות על התשבורת הזה ידענו, אם תפתח שטח העגול מצד אחד ותישר כל הקוים [= המעגלים] הסובבים מקו החיצוני עד המרכז יתפשטו המקיפים שטח העיגול ויחזרו לקוים ישרים מתמעטים והולכים עד שחוזרים אל נקודה אחת והיא נקודת המרכז ... ובזה נולדה לנו צורת המשולש

1. ראב"ח מדבר במפורש על קוים. למה התכוון באמרו "קו"? התשובה נמצאת בשער הראשון של חיבורו (⟦ג⟧, פסקה רביעית): "והקו הוא ערך שיש לו שיעור באורך בלבד ואין לו רוחב ולא עומק ותכליותיו על שני ראשיו הם נקודות". כאן נפתרה שאלת העובי של החוטים.
2. ראב"ח אומר במפורש, שאפשר להסתכל על שטח העיגול כאוסף המעגלים (שמרכזם הוא מרכז העיגול). הסתכלות זו נכונה מבחינה מתמטית, ותשמש בהמשך כלי מרכזי בהוכחתנו.

ברם, גם בהוכחת ראב"ח, שהיא (למרות היותה כתובה עבור חסרי ידע מתמטי) מלאה יותר ומדויקת יותר, חסר ההסבר מדוע לא השתנה השטח בעת פרישת החוטים.[66] על כל פנים, המשך הוכחת התוספות[67] הוא פורמאלי, וההנחות שעליהן מסתמכים בסיסיות ונראות לעין (גם המתמטיקה מסכימה להן). מטרתנו העיקרית בסעיף זה היא, איפוא, מציאת הוכחה פורמאלית למעבר משטח העיגול לשטח המשולש. נוסף על כך, עלינו לספק מוטיבאציה לדרך ההסבר של ראב"ח, כלומר נבנה את ההוכחה בצורה כזאת, שתקביל להוכחה המקורית.

ראשית עלינו להבין מהי המשמעות המתמטית של "פרישת החוטים". מדובר כאן באוסף אינסופי של חוטים, שאי אפשר לשרטטו וודאי לא "לפרוש" חוט אחרי חוט. המשמעות המתמטית של דברי ראב"ח היא, שאפשר להציג כל נקודה שנמצאת על העיגול מנקודת מבט אחרת, דהיינו כל נקודה נמצאת על מעגל מתאים. למעשה, ההסבר על פרישת החוטים מגדיר - באופן יחיד ושאינו משתמע לשני פנים - העתקה (פונקציה) של העיגול על המשולש. אם איננו יכולים לפרוש את החוטים בעצמנו (משום שהם רבים מדי), ניתן להעתקה לבצע זאת!

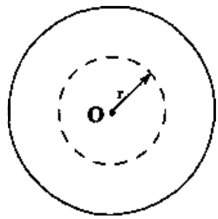
כיום יש בידינו כלים מתמטיים חזקים, המאפשרים לנו לבדוק בקלות רבה, שהשטח אכן ישמר לאחר הפעלת ההעתקה, כלומר לאחר המעבר של פרישת המעגלים לישרים המרכיבים את המשולש. נציג את המשפט הדרוש לשם כך. משפט זה הוא תוצאה של משפט כללי יותר.[68]

5.1 משפט. תהיינה A ו B קבוצות של נקודות במישור, כך שיש פונקציה חד-חד ערכית ועל $g : B \to A$ המקיימת $|Jg| = 1$. אזי לשתי הקבוצות אותו שטח.

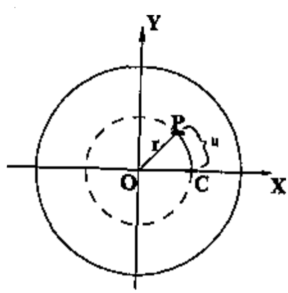
כל שנותר לנו הוא לבדוק שהעתקה המתוארת על ידי ראב״ח אכן מקיימת את הדרוש.

הגדרת ההעתקה בעזרת מונחים מתמטיים

על עיגול היחידה אפשר להתבונן כעל אוסף של אינסוף טבעות דקות. מבחינה פורמאלית יותר, כל נקודה בעיגול היחידה (פרט למרכזו[69]) נמצאת על מעגל, שמחוגו r מקיים $0 < r \leq \frac{1}{2}$ (עבור $r = \frac{1}{2}$ מתקבל המעגל החיצוני) ומרכזו בנקודה O (ראה ציור).



את מיקום הנקודה אפשר לקבוע בצורה חד-חדערכית על ידי ידיעת מרחקה המכוון על קשת המעגל מנקודת החיתוך C של הקשת עם הצד החיובי של ציר ה x (כאשר r כבר ידוע). נסביר את משמעות המושג ״מרחק מכוון״ בהקשר שהגדרנו: נסמן באות u את המרחק המכוון על הקשת שבין הנקודה הנתונה P לבין הצד החיובי של ציר ה x . אם הנקודה P נמצאת בחצי המישור החיובי - כלומר ברביע I או II של המישור, או על ציר ה x , אזי נגדיר את u כאורך הקשת PC (ראה ציור להלן). אם P נמצאת בחצי המישור השלילי (רביע III או IV), נגדיר את u כמינוס אורך הקשת PC.



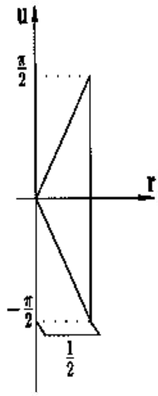
$$u := \begin{cases} |PC| & \text{P בחצי המישור החיובי (או על ציר ה x)} \\ -|PC| & \text{אחרת} \end{cases}$$

קל לראות, שעבור מעגל נתון ברדיוס r אפשר ״לכסות״ את כל נקודות המעגל על ידי שינוי u בין הערכים $-\pi r < u \leq \pi r$, משום שאורך הקשת כולה הוא $2\pi r$, ולכן אורך מחצית הקשת (בכל כיוון) הוא πr. למעשה, מצאנו דרך חדשה לתאר נקודה במישור לא על

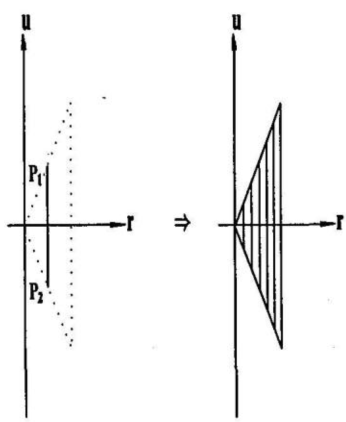
ידי שיעורי (x, y) שלה, כי אם על ידי שיעורי המשתנים שהגדרנו (r, u). נראה שזהו שינוי המשתנים הדרוש, והתואם את דרך ההסבר של ראב"ח. נתבונן בגוף החדש שקיבלנו על ידי ההעתקה (והוא יתן לנו את המוטיבציה להגדרה פורמאלית של ההעתקה). מבחינה רעיונית, גוף זה הוא עיגול היחידה כפי שיראה במישור ה $r - u$ שהגדרנו. נזכור, שתחום השתנות המשתנים הוא:

$$\begin{cases} 0 < r \leq \frac{1}{2} \\ -\pi r < u \leq \pi r \end{cases}$$

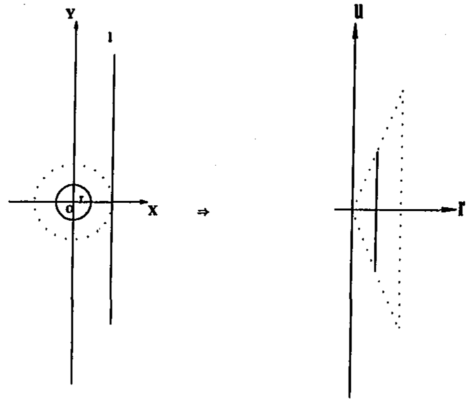
והגוף המתקבל הוא:



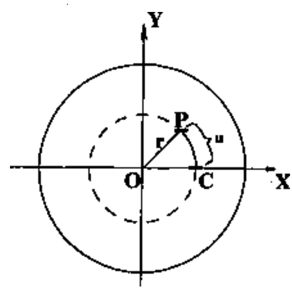
מנין שזו צורת הגוף? ובכן, גם את זאת אפשר ללמוד מדרך ההסבר של ראב"ח: אם נקבע את r (בתחום המותר), אזי u משתנה בין $-\pi r$ ל πr, ומתקבל הקטע P_1P_2. באותו אופן מתקבל לכל נקודה r (בין 0 ל $\frac{1}{2}$) קטע מתאים. ובשרטוט:



כיצד הדבר בא לידי ביטוי בעיגול המקורי? כפי שראינו, עבור r קבוע, שינוי ערך u בתחומים הנתונים מגדיר את המעגל ברדיוס r . אם כך, ההעתקה למעשה "חותכת" את המעגל הנתון בנקודת החיתוך שלו עם הצד השלילי של ציר ה x ו"פורשת" אותו במקביל למשיק למעגל l.



כעת נגדיר את ההעתקה במפורש. תהי נתונה נקודה $P(r,u)$ בקבוצה B (המשולש). דרוש להתאים לה את הנקודה $P(x,y)$ בקבוצה A, נמצאת על המעגל הפנימי בעל רדיוס r, ושמרחקה המכוון על הקשת מנקודה C הוא u.



נשתמש בעובדה המתמטית, שהיחס בין אורך הקשת, u, לאורך ההיקף כולו, $2\pi r$, זהה ליחס שבין הזוית המרכזית הכולאת את הקשת, θ, לבין הזוית הכולאת את ההיקף כולו, 2π (360^o). ברישום מתמטי:

$$\frac{u}{2\pi r} = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow \theta = \frac{u}{r}.$$

מכאן קל לראות, כי $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (r\cos\frac{u}{r}, r\sin\frac{u}{r})$. לסיכום ההעתקה היא:

$$g(r,u)=(r\cos\frac{u}{r},r\sin\frac{u}{r})=(x,y)$$

נשאיר לקורא את הבדיקה, שהגדרה זו נכונה בכל אחד מהרביעים (נשים לב שערכי פונקציות ה sin וה cos משנים סימן במעבר בין הרביעים, כדרוש בהגדרתנו).

5.2 **טענה.** הפונקציה g שבנינו היא חח"ע.

<u>הוכחה:</u> ההעתקה שבנינו היא, למעשה, הרכבה של פונקציות חח"ע בתחום הנדון (ולכן חח"ע):

$$f(r,u)=(r,\frac{u}{r})=(r,\theta)$$

$$h(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)=(x,y)$$

$$g(r,u)=h(f(r,u))=h(r,\theta)=(x,y)$$

גם מבחינת הגאומטריה קל לראות, שההעתקה שבנינו היא חח"ע (r שונה מגדיר מעגל שונה, ו u שונה מגדיר מיקום שונה על המעגל!).□

נותר לנו להוכיח (לפי משפט 5.1), שאכן $|Jg(r,u)|=1$.

$$Jg(r,u)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial u}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\frac{u}{r}+r(-\sin\frac{u}{r})\frac{-u}{r^2} & r(-\sin\frac{u}{r})\frac{1}{r}\\ \sin\frac{u}{r}+r(\cos\frac{u}{r})\frac{-u}{r^2} & r(\cos\frac{u}{r})\frac{1}{r}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\cos\frac{u}{r}+\frac{u}{r}\sin\frac{u}{r} & -\sin\frac{u}{r}\\ \sin\frac{u}{r}+\frac{-u}{r}\cos\frac{u}{r} & \cos\frac{u}{r}\end{vmatrix}=$$

$$=(\cos\frac{u}{r}+\frac{u}{r}\sin\frac{u}{r})\cos\frac{u}{r}+\sin\frac{u}{r}(\sin\frac{u}{r}+\frac{-u}{r}\cos\frac{u}{r})=$$

$$=\cos^2\frac{u}{r}+\frac{u}{r}\sin\frac{u}{r}\cos\frac{u}{r}+\sin^2\frac{u}{r}-\frac{u}{r}\sin\frac{u}{r}\cos\frac{u}{r}=\cos^2\frac{u}{r}+\sin^2\frac{u}{r}=\mathbf{1}$$

אם כך, שטח המשולש זהה לשטח העיגול ובזאת הוכחנו את טענתנו.□

5.3 **הערה.** חשוב לציין, שלא היו בידי ראב"ח ובעלי התוספות הכלים המתמטיים שהשתמשנו בהם כאן. הוכחתנו - פרט לכך שהיא מראה את נכונות הטיעון בהוכחת ראב"ח - מראה דרך הסתכלות מודרנית על טיעון קלאסי. אין בכוונתנו לשער מה שכנע את ראב"ח לגבי נכונות הטיעון של פרישת החוטים. לתשובה אפשרית ראה ⟦4,14⟧.

סיכום

אנו מקוים כי במאמר זה תרמנו להרחבת הידע בנושא המעגל והעיגול בתלמוד, שכשמו כן הוא: אין לו התחלה ואין לו סוף. נמשיך לעסוק אי"ה בנושא זה, ונשמח לשמוע הערות והארות. חובה נעימה היא לנו להודות לאנשים הבאים, מהמחלקה למתמטיקה, אוניברסיטת בר-אילן (המובאים לפי סדר הא"ב): ד"ר אליהו בלר, פרופ' יונתן סתוי, פרופ' ברנארד פינצ'וק, ויהודה שנפס, שקראו את המאמר והעירו הערות חשובות. תודה מיוחדת חבים אנו לרב שמעון וייזר שליט"א מהמכון הגבוה לתורה, אוניברסיטת בר-אילן, שליוה את כתיבת המאמר מראשיתו ועד סופו, לבני משפחותינו, ולכל מי שסייע - בדרך זו או אחרת - להבאת המאמר לדפוס.

מקורות:

[א] קדמוניות היהודים, יוסף בן מתתיהו הכהן (חי 37 - סמוך ל 100), ספר שמיני, סעיפים 79-80, בעריכת אברהם שליט, מוסד ביאליק ע"י מסדה, ירושלים 1944, עמ' 275.

[ב] הגיון הנפש העצובה (ספר המוסר), רבי אברהם ב"ר חייא הנשיא (ספרד, 1056-1136), בעריכת יצחק אייזק, ספריה למחשבת ישראל, לייפציג 1860, דפוס חדש ירושלים ה'תשכ"ז, עמ' III - LXIII.

[ג] חיבור המשיחה והתשבורת (חכמת השיעור),- - -, נכתב 1116, עריכה מחודשת על ידי הרב יחיאל מיכל הכהן גוטמן (כולל הערות מאת הרב צבי הירש יפה), חברת מקיצי נרדמים, ברלין ה'תרע"ד (1913).

[ד] שו"ת התשב"ץ, הרב שמעון ב"ר צמח דוראן (ספרד 1361 - אלג'יר 1444), דפוס ראשון למברג ה'תרנ"א, חלק א, סימנים קכ"ט, קס"ג-קס"ו.

[ה] שו"ת חוות יאיר, הרב יאיר בכרך (וורמס, 1638-1702), דפוס ראשון ה'תנ"ט, סימן קע"ב.

[ו] פני יהושע, הרב יעקב יושע ב"ר צבי הירש פלק (פולין, 1680-1756), על מסכת סוכה דפים ג'-ח'.

[ז] גליא מסכת, הרב דוד ב"ר משה אב"ד דק"ק נובהרדוק (נפטר ב-1837), דפוס ראשון ה'תר"ה, אורח חיים סימן ג'.

[ח] ערוך לנר, הרב יעקב יוקב (יוקל) ב"ר אהרן עטלינגר (פולין, 1799-1872), דפוס ראשון ה'תרי"ח), על מסכת סוכה דפים ז'-ח'.

[ט] עבודה הקודש להרשב"א עם באור עבודת עבודה, הרב חיים גדליה צמבליסט, הוצאת המחבר, תל-אביב ה'תשל"ג, כרך ב, עמ' ב-ד.

[י] מסורת סייג לתורה, הרב משה צוריאל, הוצאת יהדות התורה, בני-ברק, ניסן ה'תש"ן, חלק א, עמ' 5.

[1] מדע ואמונה, שמעון בולג, תורה ומדע כרך י', סיון ה'תשד"מ, עמ' 62-77 (מופיע גם ב"נחלי לימוד" להרב י. בא-גד, עמ' 350-366, ומכיל רשימה ביבליוגרפית מקיפה).

[2] סוכה העשויה ככבשן, שמעון בולג, תורה ומדע, כרך ד', חוברת ב', אלול ה'תשל"ז, עמ' 47-50.

[3] π בספרות התלמודית, שמעון בולג, חוברת זו.

[4] תרוץ על קושית החוות יאיר בענין מדידת שטח העיגול, הרב מיכאל בלייכר, קובץ חידושי תורה ופרפראות לחכמה, חוברת א', מכון גבוה לטכנולוגיה, ירושלים, עמ' 79-87.

[5] הערות למאמר "סוכה העשויה ככבשן", הרב חיים ברנר, תורה ומדע, כרך ח' חוברת א-ב , אייר ה'תשל"ח, עמ' 34 ו־48.

[6] סוכה העשויה ככבשן, הרב חיים ברנר, מעליות א', עמ' 51-54.

[7] חלון עגול, דוד גרבר ובועז צבאן (בהכנה).

⟦8⟧ סוכה עגולה, דוד גרבר ובועז צבאן, מגל, חוברת י, המכון הגבוה לתורה, בר-אילן, טבת ה'תשנ"ד, עמ' 134-117; סוכה עגולה II, שם חוברת י"א.

⟦9⟧ דרכיה של ההלכה בפתרון בעיות גאומטריות מיוחדות, הרב מתתיהו הכהן מונק, הדרום, חוברת כ"ז, ניסן ה'תשכ"ח, עמ' 133-115.

⟦10⟧ שלש בעיות הנדסיות בתנ"ך ובתלמוד, הרב מתתיהו הכהן מונק, סיני, מוסד הרב קוק, תמוז ה'תשכ"ב, עמ' רי"ח-רכ"ז.

⟦11⟧ *On the Rabbinical Exegesis of an Enhanced Biblical Value of* π, Edward Shlomo G. Belaga, Proceeding of the XVIIth Canadian Congress of History and Philosophy of Mathematics, Queen's University, Kingston, Ontario, May 1991, 93-101.

⟦12⟧ *Rabbinical Mathematics and Astronomy*, Williams Moses Feldman, Hermon Press, New York, 1931.

⟦13⟧ *On the Rabbinical Approximation of* π, Boaz Tsaban and David Garber (in preparation).

⟦14⟧ *The Proof of Rabbi Abraham Bar Hiya Hanasi*, Boaz Tsaban and David Garber (in preparation).

The latest version of ⟦13,14⟧ is available via e-mail (tsaban@bimacs.cs.biu.ac.il).

הערות:

1. ראה למשל ⟦7, 8⟧ (מספקים המופעים בסוגריים מרובעים "⟦ ⟧" מציינים מקור שמופיע ברשימת המקורות, המצויה בסוף המאמר).

2. עירובין דף י"ד ע"א - ע"ב, עירובין דף נ"ו ע"ב - נ"ז ע"א, עירובין דף ע"ו ע"א - ע"ב, סוכה דף ז ע"ב - ח ע"א, בבא בתרא דף ק"א ע"ב - ק"ב ע"א, אהלות פרק י"ב משנה ז ועוד.

3. אמנם קיימים מודלים שבהם היחסים שונים. קיים למשל מודל גאומטרי, שבו היחס בין היקף עיגול לקוטרו הוא בדיוק 3.

4. על חוסר ההתאמה למתמטיקה כבר עמדו המפרשים. עניין $\sqrt{2}$ מופיע בתוספות בעירובין דף נ"ז ע"א ד"ה "כל אמתא" ובסוכה דף ח ע"א ד"ה "כל אמתא". עניין π מופיע בתוספות בעירובין דף י"ד ע"א, ד"ה "והאיכא משהו".

5. רי"ף (עירובין דף כ"ד ע"א מדפי הרי"ף, על סוגית חלון עגול); רשב"א (ב"עבודת הקודש", בית נתיבות, שער ד, סעיף א).

6. רמב"ם (פרק ג מהלכות עירובין הלכה ב); ראב"ד ("ספר הבתים", שערי עירובין, שער רביעי, סעיף ב); מאירי (ב"בית הבחירה" על הסוגיה בעירובין דף ע"ו).

7. אירציונליות של π מובאת ב"פירוש המשניות" לרמב"ם, עירובין פרק א, משנה ה. אירציונליות $\sqrt{2}$ מובאת שם, פרק ב, משנה ה: שם נאמר, ש $\sqrt{5000}$ הוא אירציונלי. אך $50\sqrt{2} = \sqrt{5000}$, ואילו $\sqrt{2}$ היה רציונלי, גם $\sqrt{5000}$ היה רציונלי!

8. "שער הציון" על שולחן ערוך, אורח חיים, סימן שע"ב סקי"ח.

9. שם. זו אחת האפשרויות להבין את דברי "שער הציון" שם.

10. "חזון איש", אורח חיים, ראש השנה, סימן קל"ח סק"ד.

11. ראה גם יומא כ"א ע"א; מגילה י ע"ב; בבא בתרא צ"ט ע"א. לפי חוקי הגאומטריה, הארון אינו תופס מקום בבית המקדש.

12. למספר שקיבלנו תכונות מעניינות נוספות, שמחזקות את ההשערה, שאין הדבר מקרי. ראה ⟦8, 11⟧. יתכן שהרעיון כבר התגלה באופן עצמאי על ידי הרב שמואל דביר ז"ל, כפי שדבר זה מובא ב ⟦י⟧.

13. ירמיה ל"א, ל"ח; זכריה א, ט"ז. ראה גם ⟦8, 10⟧.

14. לפתרון בעית העקביות בצורה שונה ראה ⟦9 ,10⟧. אנו ממליצים לקורא ליבקר את התוצאות שקיבלנו בעזרת הצבת השיעורים המתמטיים במחשבון. התוצאות מפתיעות (ראה גם ⟦2 ,6 ,13⟧).

15. זוהי הגדרה לשם האקסיומה בלבד. כמובן, על פי הגאומטריה, כל העיגולים דומים.

16. עיגול זה אינו עיגול היחידה המקובל במתמטיקה, שם מדובר בעיגול שמחוגו 1, כלומר קוטרו 2.

17. תוצאה זו מתקבלת בדרך דומה (על ידי לימוד מהפסוק הנ"ל) בעירובין דף י"ד ע"א.

18. הכוונה כאן לשטח במשמעותו הגאומטרית, כלומר למספר היחידות הריבועיות שהמצולע "כולא".

19. הישרים נחתכים, משום שהם מקבילים בהתאמה לאלכסונים, שהם מאונכים (מתכונות הריבוע), ולכן הישרים עצמם מאונכים, ועל כן נחתכים.

20. למעשה, כולן מאונכות בהתאמה (ההוכחה באותו אופן), אלא שדי בטענה זו למטרת ההוכחה.

21. הגם שהטענה נכונה מבחינה מתמטית, אנו מתייחסים אליה כאל אקסיומה (וכך גם הגמרא), כיון שלא נוכל להוכיחה בכלים הנתונים בגמרא. ההוכחה המתמטית מעניקה צידוק ל"נכונות" האקסיומה. נשים לב, שלא הגדרנו את מושג השטח עבור עיגול. הכוונה היא, כמובן, לשטח במשמעות הרגילה. עקרונית, אפשר לקחת את 1.12 כהגדרה.

22. דרך בניית הריבוע החוסם זהה לדרך הבנייה בהוכחת משפט 1.11.

23. נציג כאן רק אפשרות אחת להסבר הסוגיה. לאפשרויות הסבר נוספות ראה ⟦8⟧.

24. דף ג ע"א. להלכה נפסק (רמב"ם ב"משנה תורה", פרק ד מהלכות סוכה, הלכה א; שולחן ערוך, אורח חיים סימן תרל"ד סעיף א), כי השיעור המינימלי הוא ז' טפחים על ז' טפחים, ולכן גם השיעור של סוכה עגולה להלכה ישתנה בהתאם (עיין שם).

25. התוספות, בד"ה אחרים, מנמקים את דעת אחרים: אנו צריכים סוכה שהיא דירת קבע (בדומה לבית בשאר ימות השנה: "בסוכות תשבו שבעת ימים" - 'תשבו' כעין תדורו [סוכה דף כ"ח ע"א]), ובית עגול אינו נחשב דירת קבע.

26. אנו מצטטים את הגמרא כלשונה כדי שלא להגרר להצעת פירוש לדברי רבי יוחנן כבר בשלב זה. יש לשים לב, שלדעתו אין פסול עקרוני בסוכה בגלל היותה עגולה.

27. השיעור הוא דו-מימדי (ולא חד מימדי) - עיין רש"י, סוכה דף ח ע"א, ד"ה "אלא רבי יוחנן".

28. הערה מענינת בנושא זה מעלה שו"ת "גליא מסכת" ⟦ז⟧: במסכת שבת דף קמ"ה ובמסכת סנהדרין דף ז ע"ב מובא ביאורו של רבי יוחנן לפסוק "אמור לחוכמה אחותי את" - אם ברור לך הדבר כאחותך שהיא אסורה לך - אמרהו, ואם לאו - לא תאמרהו. מזה נראה, שרבי יוחנן דייק מאד בדבריו.

29. יש לשים לב, שאי הדיוק במקרה זה מקיים את שני התנאים שדרשנו במהלך הסוגיה: 1. אי דיוק קטן. 2. אי הדיוק הוא לחומרא, דהיינו: השיעור שרבי יוחנן נוקב גדול במקצת מהשיעור המינימלי הדרוש.

30. יש דעה בגמרא, ששמם הוא רבנן דקיסרי.

31. הרעיון מופיע ב"פני יהושע" ⟦ו⟧, ד"ה "אימר דלא אמרינן לא דק", ונדון ב"ערוך לנר" ⟦ח⟧, ד"ה "תלתא גברי בתרתי אמתא יתבי".

32. לדיון מעמיק ראה גם ⟦ז⟧. למקורות קדומים יותר לרעיון, ראה הערה ביבליוגרפית בהמשך (3.3).

33. משפטים אלו הם את הפשט הפשוט של הכללים. יש פרשנים המפרשים את הכלל "ריבועא מגו עיגולא פלגא" מעט אחרת. בעלי התוספות, בסוכה דף ח ע"א ד"ה "ריבועא דנפיק מגו עיגולא פלגא", מפרשים שהכוונה היא ששטח הריבוע החסום בעיגול הוא חצי משטח הריבוע החוסם את העיגול. גם טענה זו הוכחה במסגרת משפט 1.11, וקל לראות שיחד עם משפט 1.12 היא שקולה לצירוף המשפטים 1.12 ו 1.13.

34. כאן אין הגמרא דוחה תירוץ זה. לשינוי זה (לעומת הסוגיה בסוכה) כמה הסברים. ראה ⟦7⟧.

35. התוספת "משהו" חיונית כדי שהצלע התחתונה של החלון הריבועי תהיה ב ת ו ך עשרה, ולא בגבול עשרה הטפחים מהקרקע.

36. ⟦ג⟧, הקדמת המחבר, עמ' 3, שורה 13 - עמ' 4, שורה 1.

37. "ומה שאמר בהיקפו ר"ל בהערכתו, מלשון 'אין מקיפין בבועי' (חולין דף מ"ו ע"ב)".

38. הרב צבי רוטשטיין, ראש מכון צבי למורשת גדולי ישראל, אמר לנו שישנה סבירות גבוהה שתשובה זו אינה של הרי״ף.

39. תוספות בעירובין דף ע״ו ע״ב, ד״ה ״ורבי יוחנן״.

40. כפי שמובא בתלמוד בירושלמי, תרומות, פרק י הלכה ב: ״אמר רבי יוחנן, כשהיינו הולכים אצל רבי הושעיה רבה לקיסרין ללמוד תורה״. וכן למדים מהירושלמי, עירובין, פרק ב, הלכה א.

41. בחולין דף נ ע״א נאמר: ״רבי יוחנן ורבי אלעזר דאמרי תרוייהו מקיפים בריאה״, ומכאן שרבי יוחנן השתמש בשורש ה.ק.ף. במשמעות ע.ר.ך., כלומר הערכה.

42. עירובין דף ד׳ ע״ב, י״ד ע״ב; פסחים דף ק״ט ע״א; יומא דף ל״א ע״א; חגיגה דף י״א ע״א.

43. ויקרא ט״ו, י״ז.

44. מופיע בשינויי לשון קלים בכל המקומות הנ״ל.

45. אך נפח המקוה עצמו בהכרח גדול יותר, כדי שלא יגלשו המים אל מחוץ למקוה עם כניסת האדם המיטהר, ובכך תיקטן כמותם מהדרוש [תוספות פסחים ק״ט ע״ב ד״ה ״ברום״ ובמקומות המקבילים].

46. הגמרא [שם] מוסיפה, ששיעור זה מקביל לארבעים סאה.

47. מלכים א, ז׳, פסוקים כ״ג-כ״ו.

48. עירובין דף י״ד ע״א.

49. ⟦ד⟧, חלק א׳ סימן קכ״ט.

50. לפי הערה 4 לעיל, דרוש ששפת המקוה תהיה כך שהמים לא ישפכו ממנו, כלומר בעל התשב״ץ מתאר רק את צורת המקוה המחזיק את המים (כשהאדם בחוץ).

51. הרשב״א בתשובותיו, חלק ג׳ סימן רכ״ד, כותב ״ולא עוד אלא אפילו היה אורך המקוה ורחבו עשר אמות על י׳ או יותר, אם אינו גבוה לפחות עד חצי החזה, אין טובלין בו אלא אם כן שיטח עצמו כל גופו בקרקע המקוה, לפי שאם אינו שוטח, יצטרך על כל פנים לכוף קומתו הרבה, וירבו הקמטים בבטנו ובירכותיו, וכבר אמרו אשה לא תטבול אלא דרך גדולתה״. מכאן נראה, שלשיטת הרשב״א מקוה כזה פסול.

52. אנו נתיחס רק ל ⟦ד⟧. נציין כי חישובי נפחים כאלו נמצאים בספרות היהודית כבר לפני תקופתו של התשב״ץ. ראה למשל ⟦ג⟧, שער רביעי, סימן 179.

53. זאת האפשרות היחידה מבחינה מתמטית, אם נדרוש שהצורה היא תיבה בחלקה התחתון וגליל בחלקה העליון. העובדה שחלקו העליון של הים הוא עגול נאמרת במלכים א, ז, כ״ג: ״ויעש את הים מוצק, עשר באמה משפתו עד שפתו עגול ...״ - מכאן שהיה עגול לפחות בחלקו העליון - בשפתו (ראה רש״י, שם פס׳ כ״ד). הצעת הגמרא הראשונה (שהים כולו תיבה) היא רק כדי להביא את המקרה הקיצוני, לקבלת תוצאה גדולה מהדרוש, שתוביל אותנו - יחד עם ההצעה הקיצונית השניה (שהים כולו גליל) - אל צורת הביניים, שהיא הפתרון. רמז לכך שבסיסו התחתון של הים הוא ריבועי נמצא בפסוקים כ״ד-כ״ה [שם]. בפסוק כ״ד נאמר ״ופקעים מתחת לשפתו סביב סובבים אותו עשר באמה מקיפים את הים סביב ...״ - עשר אמה לכל רוח [רש״י ורד״ק, שם, וכן ב״קרבן העדה״ על הירושלמי, עירובין פרק א, הלכה ה], וכן יש לומר ״מתחת לשפתו - רחוק משפתו״ [רד״ק, שם]. בפסוק כ״ה נאמר ״עומד על שני עשר בקר, שלשה פונים צפונה ושלשה פונים ימה ושלשה פונים נגבה ושלשה פונים מזרחה, והים עליהם מלמעלה וכל אחוריהם ביתה״. נראה לומר, שהשוורים מוצבים כך, ולא בעיגול, משום שהגוף שמונח עליהם (הים) ריבועי בתחתיתו (ראה רד״ק, שם). ועיין בפירוש אברבנאל לפסוק כ״ד, שם, וראה עוד בירושלמי, עירובין פרק א, הלכה ה. לכן נראה, שהרעיון של יוסף בן מתתיהו ב״קדמוניות היהודים״ ⟦א⟧ - שצורת הים היא חצי כדור - אינו נכון (לפחות לפי ההבנה הפשוטה). אמנם, הצעתו נכונה מבחינה מתמטית (בהמשך נראה כיצד לחשב נפח של חצי כדור).

54. אמה אחת שוה ל 6 טפחים, לכן דרוש שהקוטר יהיה $6\sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{48} = 6.9282...$ טפחים, כלומר מעט פחות משבעה טפחים, כפי שנדרש ב ⟦ד⟧.

55. מופיע ב ⟦ג⟧, שער רביעי, סעיף 179 וב ⟦ד⟧, חלק א, סימן קס״ד.

56. שיטת חישוב זו מובאת כבר ב ⟦ג⟧, שער רביעי, סעיף 179, וגם ב ⟦ד⟧, חלק א׳, סימן קס״ד, בשם אנבלשום אפרים. מבחינה גאומטרית נוסחה זו מבטאת נפח גליל, שקוטרו הוא $\sqrt{\frac{2}{3}}r$, וגובהו $0 \leq h \leq 2r$.

למעשה, זהו קירוב לינארי לנפח המדוייק של הכדור הקטום, והמספר $\frac{2}{3}$ הוא "קבוע מתקן", שדואג שעבור $h = 2r$ ו $h = r$ מתקבל הנפח המדוייק.

57. גם מקרים אלו מופיעים ב ⟦ג, ד⟧ (שם).

58. אם כי ראינו שיש מקרים שהטעות גדולה יחסית. לכן רצוי לבחור באחד מהשניים:

- א. הוספה על השיעור של 3 אמות מעוקבות, כך שנקבל בשיעור המקורב אי-דיוק לחומרא. למשל, אם מצאנו בנוסחה המקורבת, שגובה h נותן נפח ≤ 3 אמות מעוקבות, ניקח $a = \frac{h}{r}$ (מניחים ש r ידוע, או שאפשר לחשבו לפי 4.12), וניקח $0 < b < 1$ כך ש $3b^2 - b^3 \geq 2a$, וניקח $h' = br$. אפשר לבדוק (בעזרת הנוסחה המדוייקת), שאכן הנפח של הכדור, אם נקטום אותו בגובה h', יהיה $\leqslant 3$ אמות מעוקבות.
- ב. חישוב על פי הנוסחה המדוייקת (דבר שקל לבצע כיום בעזרת המחשבונים).

אפשרות ב. נראית מסתברת ופשוטה יותר. על כל פנים, כאשר מדובר בצורה הגדולה מחצי כדור, אי הדיוק (של הנוסחה המקורבת) הוא לחומרא, ולכן אפשר להשתמש בנוסחא המקורבת.

59. מופיע גם בתוספות בעירובין דף נ"ו ע"ב; פסחים דף ק"ט ע"א ובמקומות המקבילים. ההוכחה המקורית שייכת לרבי אברהם ב"ר חייא הנשיא (ספרד, 1065-1136), שהיה בין השאר מתמטיקאי, אסטרונום, פילוסוף ומתרגם. ההוכחה מופיעה בספרו "חיבור המשיחה והתשבורת" (1116), שנכתב במיוחד עבור חכמי צרפת של אותה תקופה ⟦ג⟧. ידוע כי ב 1123 היה בצרפת. כך כנראה הגיעה ההוכחה לבעלי התוספות. את ההוכחה כפי שהיא כתובה במקור נביא בהמשך. ראה גם ⟦1⟧. לפירוט ראה ⟦14⟧. לפרטים ביבליוגרפיים מקיפים ראה ⟦ב⟧, עמ' III - LXIII.

60. זו השיטה היחידה שמפרשת כלל זה בשטח, בעוד ששאר הסוגיה מוסברת כעוסקת בהיקף (עיין רש"ש במקום).

61. ראה ⟦ה⟧, סימן קע"ב; ⟦4, 14⟧.

62. אמנם ההוכחה מתייחסת למקרה הפרטי של עיגול היחידה, אבל זאת רק לשם פישוט ההוכחה. הקורא יוכל לאשר, כי אפשר להוכיח באותו אופן עבור כל קוטר נתון.

63. ההתיחסות לעובי החוטים מופיעה בתוספות במסכת עירובין דף נ"ו ע"ב, אולם ברור שאם צויין (במסכת סוכה) שהחוטים רבים, הרי שהם דקים. פורמאלית, עובי החוטים חייב להיות אפס, כדי שיתקבל משולש (ואכן כך בהוכחת ראב"ח). במקרה של התוספות יש שתי דרכים לפרש את המונח "חוטים דקים/רבים": 1. חוטים בהוראת "קוים" - בהנחה שבעלי התוספות אכן הבינו את הוכחת ראב"ח, ושינו את ניסוחה כדי להקל על הקורא שאינו בקי במתמטיקה. רבי יחיאל מיכל הכהן גוטמן מעיר ב ⟦ג⟧, שבהסבר התוספות "חסר עיקר המופת שראב"ח נשען עליו" (עמ. 61). הכוונה כנראה לעניין זה. 2. מבצעים את התהליך עבור חוטים בעובי נתון, ולאחר מכן עבור חוטים דקים יותר וכו' (במונחים טכניים "משאיפים את עובי החוטים לאפס"). "לבסוף" (בגבול), מתקבל הדרוש. ראה ⟦4, 13⟧.

64. את הרעיון של פרישת העיגול למשולש חוקף בעל ה"חוות יאיר" בסוף סימן קע"ב ⟦ה⟧. מסתבר שלא תמיד שיטה זו פועלת. תשובה לשאלותיו אפשר למצוא ב ⟦4, 14⟧. את נכונות ההוכחה עצמה נסביר בהמשך.

65. ההסבר שהובא בסעיף הקודם היה, למעשה, הסבר התוספות תוך נסיון להבין כמה טענות שלא הוסברו כל צרכן (מבחינה מתמטית).

66. יתכן שהדבר כך משום התחשבות בקהל היעד. יש לכך דוגמאות נוספות בחיבורו הנ"ל. למשל, השימוש בגוף החיבור בערך $3\frac{1}{7}$ עבור π, כאשר מצוין בהקדמה "כל הרחב טפח - יש בהיקפו ג' טפחים ושביעית טפח פ ח ו ת מ ש ה ו" ⟦ג⟧.

67. המעבר ממשולש למלבן של 3 רצועות, כאשר כל רצועה היא רבע הריבוע התוסס.

68. ליודעי דבר, מדובר במשפט מהאנליזה המתקדמת על אינטגרציה בשינוי משתנים. האות J מסמנת את היעקוביאן, שהוא הדטרמיננטה של מטריצת הנגזרת של הפונקציה. לא נפרט את ההנחות הדרושות לקיום המשפט. הקורא הבקי יוכל לבדוק בקלות שהן מתקיימות.

69. מרכז עיגול הוא נקודה יחידה, ואינו משפיע על שטח העיגול, לכן אפשר להתעלם ממנו (אחרת, הפונקציה שנגדיר לא תהיה חח"ע).