

פסחים שנתערבו ודיקדוקי היפרגרפים

אפרים ניסן

א. מבוא

במישנה, מסכת פסחים ט', י', מוצגת בעיה עם פיתרונה, שאת אופיו המתמטי נכליט במאמר הזה. זו לשון המישנה:¹

"שתי חבורות שנתערבו פסחיהן, אלו מושכין להן אחד ואלו מושכין להן אחד; אחד מאלו בא לו אצל אלו, ואחד מאלו בא לו אצל אלו; וכך הם אומרים: אם שלנו הוא הפסח הזה, ידיך משוכות משלך ונמנית על שלנו; ואם שלך הוא הפסח הזה, ירינו משוכות משלנו ונמנינו על שלך. וכן חמש חבורות שלחמשה חמשה ושלעשרה עשרה, מושכין להן אחד מכל חבורה וחבורה, וכן הם אומרים."

הפסחים נישמטו כל אחד מחבורתו, ובני החבורה אינם מסוגלים לזהותם. ובכל זאת, לא פגה בעלותה של כל חבורה וחבורה על הפסח המקורי שלה. הן אינן יכולות לעשות מפסחיהן הפקר, ואחרי-כך לזכות מן ההפקר בלי להתחשב בוהותו המקורית של הפסח שתיקח לעצמה כל חבורה; כלשונו של אלבק (בפירושו על המישנה, שם):

"אין אלו ואלו רשאים לסלק את ידיהם מפסחיהם ולמשוך עתה אחד מן הפסחים ולהימנות עליו, לפי שאסור להניח את הפסח בלי בעלים אפילו שעה אחת. אבל אם אחד מן החבורה האחת בא לחבורה האחרת, נמצא הפסח לפחות ביד אחד מבעליו הראשונים."

הפסח החי, רגליו נושאות אותו, וייתכן שיימלט ויבוא אצל בני-מינו שנידאים כמותו. ולולי היה חי, אף לא ייתכן לפתור את הבעיה בדרך המוצעת, שכן רק בעוד הפסח בחיים, רשאים בני החבורה למשוך ידיהם ממנו ולהימנות על אחר. כמה שמצינו בפרק ח', מישנה ג':

"נמנין ומושכין את ידיהן ממנו עד שישחוט. רבי שמעון אומר: עד שיזרוק עליו את הדם."

וכלשונו של אלבק, שם:

"בברייתא נשנה, שמורה ר' שמעון שאין נמנים עליו אלא עד שישחט, אלא שהוא סובר שאפשר למשוך את ידיהם ממנו עד שיזרוק הדם."

הפיתרון המוצע בפרק ט', מישנה י', שאותה הבאנו בהתחלה, כוחו יפה לגבי לפחות שתי קבוצות של אנשים, אשר כל אחת מהן מונה לפחות שני אנשים. ואילו המיספר המירבי של בני החבורה מאולץ ע"י הכתוב למעלן באותה מישנה ח', ג', שמסופה ציטטנו זה עתה:

"לעולם נמנין עליו עד שיהא בו כזית לכל אחד ואחד."

ופרק ח', מישנה ז', מצינו:

"אין שוחטין את הפסח על היחיד; דברי רבי יהודה. ורבי יוסי מתיר. אפילו חבורה שלמאה שאין יכולין לאכול כזית, אין שוחטין עליהן."

ואילו כאשר לפחות אחת מן החבורות מונה חבר אחד בלבד, יש להשלים את מניינה באמצעות הצטרפות מבחוץ: זאת ההנחייה במסכת פסחים ט', י"א, כלומר כך מורה המישנה העוקבת אחרי המישנה אשר בצטטנו אותה פתחנו את המאמר. וזו לשונה:

"שנים שנתערבו פסחיהם, זה מושך לו אחד וזה מושך לו אחד, זה ממנה עמו אחד מן השוק וזה ממנה עמו אחד מן השוק; זה בא אצל זה וזה בא אצל זה, וכך הם אומרים: אם שלי הוא הפסח הזה, ידיך משוכות משלך ונמנית על שלי; ואם שלך הוא הפסח הזה, ידי משוכות משלי ונמנית על שלך."

ואלבק מפרש, במקומו:

"שנים שנתערבו פסחיהם - שני אנשים שהיה פסח לכל אחד מהם ונתערבו. ואינם יכולים למושך ידיהם מפסחיהם ולהימנות עליהם, כדי שלא להניח את הפסח בלי בעלים (כמו במשנה י'). מושך לו אחד מן הפסחים. אחד מן השוק על פסחו שנתערב עם האחר. נמצא שיש כאן שתי חבורות, ובכל אחת שני אנשים. זה בא אצל זה וכו' אחד מחבורה זו בא לאחד מן החבורה האחרת. והשני שבחבורה האחרת בא אצל השני שבחבורה זו. וכך הם אומרים כל אחד לזה שבא אצלו."

ייתכן שהאיש א, שאבד לו פיסחו (והצטרך להגדיל את מיספר החברים שבחבורתו, מאחד לשניים), לא הספיק עדיין למנות אחרים לחבורתו, לפני שאבד לו פיסחו. ואותו מתנדב "מן השוק", ב, עשוי להישמט מן החבורה (של ג, אם עבר אליה מחבורתו של א לפי הנחיות הפרוטוקול; או של א: אם היה זה הוא שנישאר בה והאיש א עבר אצל ג, או אם לפי התנאי שהינתה עמו האיש ג, למעשה הפסח שברשותו של ג שייך ל- א ול- ב, באופן שדווקא ג עובר לחבורתו של ב). תכף אחרי שנתן את השרות, עשוי ב לעזוב את החבורה (תהא אשר תהא מן השתיים הללו): עוד היום גדול להתארגנות החבורות, וכל אחד ילך אצל קרוביו או מידועיו.

דהיינו, המצב ההתחלתי המתואר במישנה י"א שבפרק ט' אינו דווקא מן הסוג שלדיברי רבי יהודה, בפרק ח', מישנה ז', הוא נימנע כפי שראינו לעיל ("אין שוחטין את הפסח על היחיד").

הפיתרון הכללי לבעיית הפסחים שנתערבו, זה המוצג בפרק ט', מישנה י', דורש שאם מיספר החבורות שנתערבו פיסחיהן הוא N , אזי מיספר החברים שבכל חבורה וחבורה מאותן חבורות צריך להיות לפחות N (ולפי הצורך, יש להשלים את מיספר החברים באמצעות הצטרפותם של אנשים מבחוץ, כלומר כאלה שאינם שייכים לאף אחת מ- N החבורות שבהן עסקינן): המיספר המיוערי של חברים בכל חבורה, שחייב להיות כמיספר החבורות, נועד לאפשר לכל חבורה להעביר $N-1$ מחבריה כנציגים, אחד לכל אחת מן $N-1$ החבורות האחרות; גם היא עצמה תקבל $N-1$ נציגים, אחד מכל אחד מן החבורות האחרות. כלשונו של אלבק:

"כל חבורה מושכת לה פסח אחד ומושכים אליהם חבר אחד מכל חבורה וחבורה. נמצאת כל חבורה של חמישה אנשים יש בה עתה ארבעה חברים חדשים, ובכל חבורה של עשרה, יש תשעה חברים חדשים."

סוגיות קרובות לסוגיית החבורות שנתערבו פיסחיהן, הן סוגיית הפסח שנתערב בזבחים (פרק ט', מישנה ח'), וסוגיית חבורה שאבד פיסחה ומינתה אחד מחבריה למצוא לה אחר (פרק ט', מישנה ט').

ב. הקדמה לייצוג הפורמלי

בהמשך, אציג פורמליזם שמגלם את פרוטוקול הפתרון לסוגיה, כפי שהציעוהו חז"ל. בפורמליזם הזה, מופיעים מצבים, התרחשויות, והתניות לגליות. שורשיו בקומבינטוריקה (בתורת הקבוצות ובתורת ההיפרגרפים) ובדיקדוקים פורמליים. ואולם, הגישה יונקת מן הבינה המלאכותית, ובייחוד בייצוג ההתניות שאנשי החבורות מתנים ביניהם, נעשה שימוש בכלים פורמליים מתחמו של עיבוד שפה טבעית לפי שיטותיה של הבינה המלאכותית. כוונתי היא להאיר את הסוגיה באור חדש, בכך שיוכלט המיבנה הפורמלי שלה.

במאמרי זה, אציג את גישתי הפורמלית אך ורק באותה מידה שתענה על צורכי הייצוג של פרוטוקול-הפיתרון שבסוגיה מן המישנה, אשר הוצגה בפרק הקודם. לכן, אמנע כאן מהכללת הגישה, ומהעשרתה במרכיבים אחרים שראויים להיכלל בייצוג-ידע לצורכי בינה מלאכותית².

ואולם, השתמשתי בהיפרגרפים כשיטה כללית יותר, בעוד שלסוגיה שלפנינו יספיק טיפול בקבוצות, כמיקרה פרטי של השיטה. משתי האפשרויות מבחינת הנוטציה שירטוטן כמישטח מתוחם בקו סגור (בדיאגרמות אוילר-רֶיֶן, "כתפוחי-ארמה"), כשאיברייהן מיוצגים כנקודות בתוך אותו מישטח, לעומת רשימת הקבוצות כמחרוזות מתוחמות בסוגריים מסולסלים בהמשך נעדיף את זו האחרונה, מטעמי נוחיות וקומפקטיות.

לעיתים, נוח לטפל בקבוצות כאילו הן צלעות ב"היפרגרפים". בטרם ניפנה להגדרת המושג "היִפְּרָגְרָף", הבה נגדיר "גֶּרֶף"³. גרף מורכב מקבוצה של נקודות (שנקראות "צמתים") ומקבוצה של קווים ("צלעות") אשר מקשרים בין זוגות של הנקודות הללו (לא דווקא בין כל הזוגות האפשריים). לכל צלע, שני קצוות. (כל קצה נמצא בצומת מסויים. שני הקצוות הם בשני צמתים שונים, או אפילו באותו צומת: כמיקרה האחרון, אותה צלע נקראת "לולאה"). ניתן לתאר גרף כרשת. ואומנם, ברשתות תחבורה או ברשתות חשמליות מטפלים, מתימטית, כבגרפים. אם לצלע יש גם כיוון (מקצה לקצה), הגרף הוא "גרף מכוון", והצלע נקראת "קשת" או "חץ".

תיכתננה הכללות של המושג גרף. מחד גיסא, אם נתיר שבין זוג נתון של צמתים, מיספר הצלעות (באותו כיוון, אם הגרף הוא מכוון) יהיה אפילו שונה מאפס (הוא אפס כאשר אין שום צלע בין שתי הנקודות) ומאחד (שאו: צלע אחת קיימת שם), אזי אין זה סתם גרף, אלא "מולִּטִיגֶרֶף".

מאידך גיסא, אם נתיר את האילוץ שלפיו לכל צלע יהיו דווקא שני קצוות, ונאפשר גם קצה אחד בלבד בצלע, או שלושה קצוות או יותר, אזי אין זה גרף, אלא מושג כללי יותר: היפרגרף⁴. לא בכדי, מקובלת בעבור היפרגרפים הסימון שמשמש קבוצות, ובייחוד שירטוטי "תפוחי-ארמה" (ראה לעיל).

עתה, נציג נא את המושג "דיקדוק פורמלי" בצורה אינטואיטיבית. דיקדוק פורמלי מורכב מכללים אשר מתכונתו של כל אחד מהם היא א ← ב.

ישנן שתי דרכים עיקריות להשתמש בדיקדוקים הללו: בניתוח, וביצירה (של טקסט, או של נתונים אחרים שניתן לזהות בהם דפוסים). במיסגרת השימוש לצורכי ניתוח, כאשר מזוהה בנתונים דפוס שעונה על המתואר ב- ב, הוא מומר ב-א, אשר נמצא ברמת-הפשטה גבוהה יותר;

א עצמו עשוי להופיע בתוך דפוס מורכב יותר: בחלק ב' של כלל אחר, א' ← ב', וכן הלאה: א" ← ב", וכולי. ואילו השימוש בדפוס לצורכי יצירה עובר בתהליך הפוך, מן המופשט לרמות מפורטות יותר ויותר.

השימוש בדיקדוקים פורמליים הוא חשוב ביותר בפעולת תוכנות מחשב, כי שפות-התיכנות מעובדות באמצעות דיקדוק.⁵ כמו כן, דיקדוקים פורמליים משמשים כבסיסן של הגישות הכלשניות שמבית-מידרשו של חומסקי,⁶ ובכלל זה, של אותן שיטות לעיבוד שפה טיבעית באמצעות מחשב⁷ אשר מאמצות גישות שצמחו מתוך האסכולה החומסקינית. שימוש בדיקדוקים פורמליים נעשה גם בויהוי-צורות ובעיבוד-תמונות באמצעות מחשב,⁸ בגישות פורמליות, תמוכות-מחשב, לתיכנון (ובכלל זה לאדריכלות),⁹ ובתחומים אחרים, כגון בתיאור המיבנה של סיפורי-עם בחקר הפולקלור,¹⁰ ובגישות חישוביות למוסיקה.¹¹

אין הכרח בכך ששני חלקי-הכלל, בדיקדוק פורמלי, ייצגו דרגות שונות של הפשטה; שכן, ייתכן גם שהכלל א ← ב מייצג פשוט תמורה: במצב כזה שמוחה בו, במקום מסויים, מופע של הדפוס א, יש להמיר את המופע במה שמתואר ב-ב. תיאור כזה, של תמורות, הוא השימוש שאנו נעשה בדיקדוקים פורמליים, כבואנו לתאר את פרוטוקול-הפיתרון של בעיית הפסחים שנתערבו.

נבחין עוד בהבדל, רב-החשיבות, שבין "דיקדוק דטרמיניסטי" ל"דיקדוק בלתי-דטרמיניסטי". כאשר הביצוע עשוי להיות רק כזה, שאין ברירה בהתקדמות בגלל אפשרות להפעיל כלל מסויים במקום כלל אחר, הדיקדוק הוא דטרמיניסטי. ואילו אם ייתכן שאותו דפוס עצמו יופיע בשני כללים שונים, ואין סדר קבוע שיאלץ אותנו לבחור דווקא בכלל אחד מהם, אוי הדיקדוק הוא בלתי-דטרמיניסטי. אצלנו, השיטה תהיה דטרמיניסטית לפי סדר הפעלת הכללים, אך למעשה איננה דטרמיניסטית, כי כלל-המרה מסויים יוכל להתבצע על תת-קבוצות שונות של אברים בקבוצות, כאשר תת-קבוצה זו או אחרת מהווה מופע, זו גם זו, של דפוס שעליו על ההמרה להתבצע. ואולם, אין זה מפריע, כי כאשר זה קורה לפי שיטתנו, לא חשובה לנו זהותו הפרטית של אבר, אלא רק זהותו של סוג אשר לו הוא שייך.

יש להזכיר גם את המושג "אוצר-כללים" (ruleset), שרווח בתיכנון מערכות-מומחה¹² בבינה מלאכותית. אוצר-כללים דומה לדיקדוק פורמלי. ואולם, בצורתו של כלל באוצר-כללים, "אם א, אז ב", כלומר גורם וניגורם, ישנם חלקי-התנאי, שהוא א, וחלק הניגורם, שהוא ב, ושלעיתים קרובות (לפי השימוש) הוא חלק-הביצוע וכולל הוראות שיש לבצען כאשר מתקיים התנאי. ולפעמים אין ב חלק-הביצוע, אלא דבר-מה (כגון השערה, או להפך, תיסמונת גלויה) שיש לברור אותה כאשר א מתקיים. ועיקרו של דבר: לעומת דיקדוק, אין כאן דווקא המרה של חלק בחלק. אנו נשלב את שתי הגישות: אצלנו, הכללים יהיו כללי-המרה, ולחלופין, כללי תנאי וביצוע כאלה, שחלק הביצוע יכלול כללי-המרה ו/או פקודות לביצוע (אפשר גם פקודות-בקה כמו בשפות-תיכנות, כגון קפיצה לכלל מסויים).

גם לגבי אוצר-כללים, כמו לגבי דיקדוק פורמלי, נוהגים דטרמיניזם ואידטרמיניזם. כאשר הביצוע מאולץ על-ידי סדר הכללים ביניהם לבין עצמם, אוצר-הכללים הוא דטרמיניסטי. ואילו אם איננו מייחסים אופי מחייב לסדר שבו נתונים הכללים כתוך אוצר-הכללים, אזי זה האחרון הוא בלתי-דטרמיניסטי. כאמור לעיל, אצלנו הכללים נתונים בסדר קבוע, אלא שכללי-המרה בתוך חלקי-ביצוע של כלל תנאי וביצוע, עשויים להופיע בסדר חופשי, ומה שחשוב יותר, ההמרה אינה דטרמיניסטית אם נתחשב בזהותם הפרטית של האברים שנמיר את מקומם או תכונה אחרת שלהם.

תיתכננה דרכים להגמיש את הסדר בין הכללים שבאוצר-הכללים שמביע את הפרוטוקול: יתכן לעשות זאת מתוך זיקה לייצוגים של זמן כפי שהם נוהגים בכינה מלאכותית.

כמו בדיקדוק פורמלי, שניתן להפעיל עליו את מנגנון הביצוע בשתי דרכים יצירה, לפי כיוון החיצים של הכללים, לעומת ניתוח, נגר כיוון החיצים גם באוצר-כללים ניתן להשתמש בשתי דרכים. כשם שבדיקדוק פורמלי ניתן לנהוג בדרך היצירה, כאשר התהליך עובר מן המופשט למפורט (א ← ב, ג, ד ← ג, ה), לפי כיוון החיצים, כך גם באוצר-כללים ניתן לנהוג "שירשור קדימה": לצאת מן התנאי א, כאשר הוא מתקיים, לבצע את ב, לבדוק אם תנאים נוספים באוצר-הכללים מתקיימים (ייתכן ש-ב שינה את המצב), וכן הלאה. וכפי שבדיקדוק פורמלי ניתן להשתמש בדרך היהוי, מן המפורט למופשט (כלומר, מויהוי מופע של ב בנתונים, באים להמירו בהפשטה א, בכיוון ההפוך לחץ שבכלל א ← ב), כך גם באוצר כללים, ניתן לנהוג "שירשור אחורנית": בכלל א ← ב, כלומר גורם וניגרם, ניתן לעשות שימוש באופן כזה שאנו מזהים מופע של הניגרם, ולפי זה באים לקבוע את גורמו (למשל, לצורכי-איבחון וגיבוש-השערו, כגון במערכת-מומחה לאיבחון רפואי).¹³ אנו נעשה שימוש בשירשור קדימה.

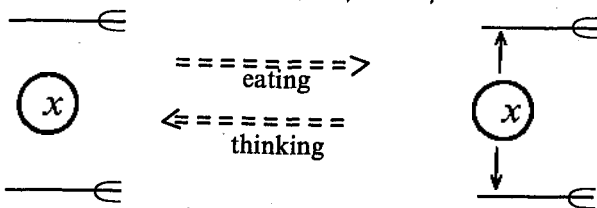
אם כי בשימוש שנעשה בהם בכלשנות של שפות טיבעיות, או בעיבוד שפות-תיכנות, דיקדוקים פורמליים הם דיקדוקים שפועלים על מחרוזות (string grammars), כלומר, הם מופעלים על מחרוזות של אותיות - קיימים גם דיקדוקים שנתוניהם הם מסוג שונה. כאן נאחה את הידיעות שנתנו על הגרפים או היפרגרפים, עם המושגים שהצגנו בתחומם של הדיקדוקים הפורמליים ושל אוצרות-הכללים. רק זאת נקדים עוד: סוג מסויים של גרף, הוא "העץ".¹⁴ אילן-יחסין הוא עץ. כך גם הייררכיה היא עץ.

אחת ההגדרות של "עץ" היא: "עץ הוא גרף כזה שבין כל זוג צמתים שבו ניתן לעבור בדרך מסלול אחד, ואחד בלבד", כאשר "מסלול", $d \leftarrow c \leftarrow b \leftarrow a$, הוא קבוצת הצלעות $\{d \leftarrow c, c \leftarrow b, b \leftarrow a\}$, שבין הזוגות העוקבים שבה, ישנו צומת משותף. ליתר דיוק, הגדרנו כאן "עץ בלתי-מכוון", שהוא סוג מיוחד של "גרף בלתי-מכוון".

את המושג "עץ" הגדרנו כדי שנוכל להסביר, שבתורת-הקומפילציה (בעיבוד שפות-תיכנות), יש עושים שימוש בדיקדוקי-עצים (tree-grammars, שממירים עץ בעץ), ובדיקדוקי מחרוזת-לעץ (string-to-tree grammars, שממירים מחרוזת בעץ).¹⁵ בסיפורת המחקר מתועד גם שימוש שונה בדיקדוקי-עצים. סוג כללי יותר של דיקדוקים הוא דיקדוקי-גרפים, שממירים גרפים בגרפים (או, נכון יותר: הם ממירים גרפים שהם חלק מגרפים רחבים יותר, בגרפים אחרים אשר תופסים את מקומם של קודמיהם בתוך הגרף הרחב יותר שכתוכו הללו נימצאו). אנו נעשה שימוש בדיקדוק-היפרגרפים, כלומר בדיקדוק שפועל על חלקים של היפרגרף. בגלל הקשר, שהזכרנוהו, בין היפרגרפים לקבוצות, ניתן גם לומר שדיקדוקנו פועל על קבוצות. דבר זה יבלוט, בין הייתר, בסימון שנאמץ: בפרק ג', תיחום איבריה של היפר-צלע יהיה באמצעותם של סוגריים מסולסלים.

כהכנה לתיאור הפורמלי של תהליך הפיתרון בעבור הכעיה המוצגת במישנה, הרי דוגמה לשימוש בדיקדוקי-גרפים. "בעיית הפילוסופים" היא בעייה ידועה בנושא פרוטוקולים של גישה למשאבים: מיספר מסויים של פילוסופים מסובין לסעודה מסביב לשולחן. ממול לכל פילוסוף, נימצאת צלחת. בהתחלת הסעודה, בין כל שני פילוסופים מונח מזלג; אלא, דא עקא: כדי לאכול, יש צורך לאחוז במזלג בכל יד. לפיכך, כאשר פילוסוף מסויים סועד את ליבו, שני שכניו לשולחן נאלצים להגות ולהעמיק בחיקקי ליבם, עד שהלז יואיל לשחרר את שני המזלגות שהוא משתמש בהם, ויניחם על השולחן וימשוך את ידיו מהם. הבעייה היא,

לקבוע פרוטוקול הוגן ויעיל של גישה למשאבים (כלומר למולגות). ואולם, אפילו נירצה לתאר בלבד את הבעייה, בלי לפתור אותה, ניזקק לפורמליזם מתאים (וכזה, אל לו להכתיב פיתרון, אלא ישאיר את הבעייה בעינה, למען הנאמנות בייצוג). להלן, דיקדוק-גרפים בלתי-טרמיניסטי, אשר הציג אותו קריאובסקי בעבור בעיית הפילוסופים:



בדיקדוק הזה, מופיע כלל אחד בלבד, והוא דו-כיווני, ואולם, ניתן להפריד על נקלה לשני כללים חד-כיווניים, כל אחד עם חץ אחד בלבד. משני הצדדים של החיצים, מופיע חלק מתוך גרף (פילוסוף עם שני מזלגות): "לפני", ו"אחרי" (כלשון הפירסומת...). הכלל מורה כיצד להמיר אותו חלק של גרף. בתוך כל מעגל (שהוא צומת בגרף, ומייצג פילוסוף, או את ראשו), מופיעה x -כמשנתה, שעשוי לקבל כערך את זהותו של פילוסוף כלשהו מתוך אלה המסובין. כי זאת לדעת: את "עולם-הבעייה" ניתן לתאר כגרף מכוון אשר בו קיימים שני סוגים של צמתים - דהיינו, "פילוסוף" (מעגל) ו"מזלג" - וסוג אחד של צלעות, שהוא "זרוע" (לא זרוע של כבש שעל שולחן הסדר, אלא זרועו של פילוסוף): חץ מצומת מן הסוג "פילוסוף", לצומת מן הסוג "מזלג". קיים אילוץ, שלפיו לפילוסוף מותרת הגישה למזלג אך ורק אם נימצאים שני מזלגות חופשיים משני צידיו: כלומר, מחד גיסא, אין אחד המסובין יכול לשרבב את ידו ולקחת מזלג מידו של מסובה אחר שאוחז בה, כלומר, שסועד את ליבו. ואפילו הסועד הוא שכנו לשולחן. ומאידך גיסא, אין אחד המסובין רשאי לשרבב את ידו כמה אמות - כמה שעשתה, לפי המידרש, בת-פרעה בשעתה על שפת היאור - ולקחת מזלג חופשי שנימצא מעבר לשכנו, למשל לנוכח המסובה עצמו אך מן העבר האחר של השולחן. איננו עוסקים באופן שבו מוטל האילוץ הזה (באמצעות סוג אחר של צלעות בגרף, צלעות שתחזקנה כל איש או חפץ במקומו או במקומותיו המותרים לזרוע). בדיקדוק-הגרפים שראינו, אין קביעה מפורשת של האילוץ; אך על הגרף הכולל, זה שמייצג את עולם-הבעייה (ושהכלל נועד להביע כיצד חלות בו תמורות), ניתן לשער שהוא מכיל מעגל (דופן השולחן העגול), ושכל פילוסוף או מזלג נימצא על המעגל ההוא. אם כן, המעגל הוא מעין מסלול סגור של צלעות, והצלעות הן כאלה שלכל אחת מהן קצה אחד בפילוסוף והקצה האחר במזלג. ואילו מה שניראה כצלע (מן הסוג "זרוע") בדיקדוק הגרפים שראינו לעיל, אינו אלא "הדלקת" אותה צלע (המודעה עם קטע מדופן השולחן) שבין הפילוסוף למזלג. ואילו העדר הצלעות, בחלק האחר שבכלל, אינו אלא "כיבויה" של הצלע, הקיימת שלא במפורש ו"מחזיקה" את הצמתים במקומם הראוי להם. (את הדלקתה וכיבויה של הצלע, ניתן לראות באופן כללי כתמורות בין שני מצבים, אשר אותם עצמם ניתן לייצג כשתי תוויות, תווית לכל מצב, על הצלע. ואילו הצלע קיימת בלאו הכי). אם כן, גם אותו אילוץ בא על ייצוגו.

ג. פרוטוקול הפיתרון

להלן נציג ייצוג פורמלי של פרוטוקול הפיתרון לבעיית החבורות שנתערבו פיסחיהן, כפי שהוצע במישינה. את הכללים שבאוצר הכללים נראה בזה אחר זה, לפי הסדר. ואולם,

לסירוגין, ניראה גם את המצבים שבעולם הבעייה, על תמורותיו כפי שהן מובעות כאמצעותם של אותם כללים. מיספר החבורות שנתערבו פיסחיהם הוא מיספר N , שלם וחיובי, כלשהו. כנסחנו את הכללים, נעשה כלליים דיים שיאפשרו זאת. ואילו המצבים שבעולם הבעייה יוצגו לדוגמה בעבור מיספר קבוע של חבורות — חמש — לשם פשטות.

הצמתים שבהיפרגרף הכולל הם או אנשים, או פסחים. כל חבורה¹⁶ היא קבוצה (היפר-צלע); נעשה גם שימוש בקבוצה שאינה חבורה, אלא חלק הימנה (תת-קבוצה, שאומנם תסומן כקבוצה בתוך קבוצה).

אם צומת מסויים (אדם או שה) מופיע מחוץ לסוגריים המסולסלים של חבורה, משמע שאינו שייך אליה; לפי מוסכמה סימנטית, נסמן כך אנשים "מן השוק", שאינם חברים גם בחבורות האחרות שנתערבו פיסחיהן. גם הפסח שברח מן החבורה שתבריה נימנו עליו, יופיע מחוץ לסוגריים המסולסלים של ההיפר-צלעות, כל עוד לא משכוהו לתוך אחת החבורות.

נגדיר עוד את הסימנטיקה של הכללים באופן כזה, שלא יחייבנו לציין בפירוש את כל האנשים שמופיעים בתוך היפר-צלע: כאמצעות נקודות, נוכל לציין השמטות אפשריות. אנו נסתפק, לרוב, בציון מפורש של מה שחייב להופיע בתוך היפר-צלע נתונה.

הדבר הראשון שניתקל בו בתוך הסוגריים המסולסלים של היפר-צלע, הוא התווית (שמה של אותה היפר-צלע, כגון שמה של החבורה: אפשר, עם אינדקס משתנה). התווית ניכרת מיד, כי נקודותיים עוקבות אחריה, ומפרידות בינה לבין אברי הקבוצה.

חמשת החבורות שבמצביהעולם, תיקראנה: G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 .

בתוך הכללים, נסמן את התמורות שעליהן לחול בחבורות, בחבורה אחת לדוגמה, אשר תוויתה תהיה G_i , עם i משתנה.

כל פסח יסומן כאמצעות עיגול שחור, בלתי מזוהה. וזאת, מטבע הבעייה: שהרי שה זה כשה זה, ודא עקא. מאוחר יותר, כאשר נצטרך להתייחס לזהות הפרטית, או לתכונה של פרט, נגדיר אמצעי נוטציוני מתאים.

באשר לאנשים, איננו מעוניינים בזהותם הפרטית, אלא בתכונות מסויימות שלהם: היכן הם נימצאים, ומה הייתה השתייכותם המקורית לחבורה מן החבורות. לכן, הסימן המייצג אדם, יזהה למעשה סוג של אדם, לפי תכונה מסויימת שיש לו. אדם מיוצג באמצעות מרובע, שבתוכו מיספר (שהוא המיספר המזוהה של חבורתו, או של חבורתו המקורית אם בא לו אצל חבורה אחרת ועדיין לא היתנו עימו כיצד להימנות). במקום מיספר, עשוי להופיע משתנה. ואילו מרובע שבתוכו האות F , הוא אדם "מן השוק" (Foreigner): אומנם לא כהוראת "זר" המיקראית בהקשר של הקודשים, כמה שנאמר "וכל-זר לא-יאכל בו", בספר ויקרא, כ"ב, י"ג; ואף לא כהוראת "בן-נכר" בהקשר של הפסחים — שהוא מענייננו — כמה שנאמר "כל-בן נכר לא-יאכל בו", בספר שמות, י"ב, מ"ג. אדם אשר יסומל באמצעות מרובע שבתוכו האות i , הוא אדם שחבורתו (המקורית) היא G_i .

המצב A הוא המצב ההתחלתי, שבו ישנן (למשל) חמש חבורות, שלכל אחת מהן פיסחה שלה, וחבריה אשר נימנו עליו (עיין בנוסחה של A), כפי שניתן לראות, בכל חבורה, חבריה שלה, יהא מיספרם אשר יהא. הפסח נימצא בתוך ההיפר-צלע של החבורה (אין זה משנה מה הסדר שבין אברי הקבוצה לבין עצמם, אחרי התווית של הקבוצה). ויש גם סתם אנשים בשוק, כאלה שאינם שייכים לקבוצות הנידונות.

הכלל 0 (אפס) מתאר את הארוע שבו אוכדים לחבורות פיסחיהן. חלק שמאל של הכלל מתאר סתם חבורה כלשהי, במצבה כקדמותו. חלק ימין של אותו כלל שונה מחלק שמאל, בכך שבחלקו הימני של הכלל, הפסח נימצא כבר מחוץ לחבורה. בכל מקום בעולמה של הבעייה, במצבו הנתון (ברוגמה שלנו: המצב A), אשר בו ניתן להיתקל במופעים של חלק שמאל של הכלל, המופע מומר בחלק ימין של אותו כלל. ואומנם, זה קורה בכל אחת מתמש החבורות שבמצב A: יש היפר-צלע ובתוכה עיגול שחור (כלומר פסח), ולכן יש להוציא את העיגול השחור החוצה, כדי ליצור מצב שבו הפסחים אינם בחבורותיהם עוד.

כתוצאה מהפעלתו של הכלל 0, מחקבל **המצב B**. כפי שהאנשים שבשוק (המרובעים עם F בתוכם) נימצאים מחוץ להיפר-צלעות, כך גם הפסחים. עתה מופעל **הכלל 1**, שהוא הכלל הראשון שבפרוטוקול הפיתרון (ואילו הכלל 0 יצר את הבעייה). כאן מובלט כבר אופיו המיוחד של אוצר הכללים שלנו. בעוד שהכלל 0, כניסוחו, הוא סתם כלל כמתוך דיקרוקי היפרגרפים, הכלל 1 הוא מורכב יותר. יש בו מיבנה-בקרה, כמו בשפות חיכנות: "אם A, אז בצע את B", ואילו חלק הביצוע, B, מורכב משלבים, אשר האחרון שבהם הוא פקודה קפיצה: "קפרץ לכלל 1", באופן שהכלל 1 מתבצע שוב ושוב עד שאין עוד מופע שעליו יוכל לפעול.

State A:

$\{ G_1: \bullet \quad \boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \};$
 $\{ G_2: \bullet \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \};$
 $\{ G_3: \bullet \quad \boxed{3} \quad \boxed{3} \quad \boxed{3} \quad \boxed{3} \quad \};$
 $\{ G_4: \bullet \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \};$
 $\{ G_5: \bullet \quad \boxed{5} \quad \boxed{5} \quad \boxed{5} \quad \boxed{5} \quad \};$
 $\boxed{F} \quad \boxed{F} \quad \boxed{F} \quad \boxed{F} \quad \dots$

Rule 0:

$\{ G_i: \bullet \quad \dots \} = = = = > \quad \{ \dots \} \bullet$

State B:

$\{ G_1: \boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \};$
 $\{ G_2: \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \};$
 $\{ G_3: \boxed{3} \quad \boxed{3} \quad \boxed{3} \quad \boxed{3} \quad \};$
 $\{ G_4: \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \};$
 $\{ G_5: \boxed{5} \quad \boxed{5} \quad \boxed{5} \quad \boxed{5} \quad \};$
 $\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet ;$
 $\boxed{F} \quad \boxed{F} \quad \boxed{F} \quad \boxed{F} \quad \dots$

Rule 1:

if $|G_i| < N$ then:

$$\{ G_i; \dots \} \boxed{F} = \dots = \{ G_i; \dots \} \boxed{F};$$

$$\{ G_i; \dots \} \boxed{F} = \dots = \{ G_i; \dots \} \boxed{i};$$

Go to Rule 1.

State C:

$$\{ G_1: \boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \boxed{1} \};$$

$$\{ G_2: \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \};$$

$$\{ G_3: \boxed{3} \quad \boxed{3} \quad \boxed{3} \quad \boxed{3} \quad \boxed{3} \};$$

$$\{ G_4: \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \};$$

$$\{ G_5: \boxed{5} \quad \boxed{5} \quad \boxed{5} \quad \boxed{5} \quad \boxed{5} \};$$

● ● ● ● ● ;

\boxed{F}

Rule 2:

$$\{ G_i; \dots \} \bullet = \dots = \{ G_i; \dots \} \bullet$$

לא זו בלבד, אלא שחלק הביצוע מכיל (לפני אותה הוראת קפיצה) דיקדוק היפרגרפים שמורכב משני כללים. לפני שנסבירם, הבה נסביר את חלק התנאי של הכלל 1 עצמו: התנאי מתייחס לחבורה כלשהי, G_i , מבין אלה שבהן אנו עוסקים, ושמיספרן, כאמור, הוא N .

מיספר החברים שבאותה חבורה הוא $|G_i|$. כלומר, זו הקרדינליות או העוצמה של הקבוצה. התנאי של הכלל 1 הוא, שאם מיספר בני האדם שבחבורה G_i הינו קטן מן N , אז יש לבצע את חלק הביצוע.

הבה נתאר את משמעותו של כל אחד מכללי-ההמרה שבדיקדוק-ההיפרגרפים שניכלל בחלק-הביצוע של הכלל 2 שבאוצר-הכללים. כלל-ההמרה הראשון גורם לכך שאדם "מן השוק" (מרובע שבתוכו F) יוכנס לתוך החבורה. כלל ההמרה השני גורם לכך שאותו אדם שהובא מבחוץ, ייחשב מעתה ואילך כחבר לכל דבר באותה חבורה (הוא נימנה על פיסתם: למרות שאין פיסתם בידם עוד, לא פגה הבעלות עליו). אותו עצם (כאן: בן-אדם) שמיוצג באמצעות F במרובע, בחלק שמאל של כלל ההמרה השני, הופך בחלק ימין של אותו כלל ל- i במרובע. תכונתו של האיש השתנתה, ואין זוכרים לו עוד את עברו, מן הבחינה היורידית-הריטואלית. כאן הסדר בין שני כללי ההמרה, הוא קובע: יש לבצע את שני הכללים הללו כסדרם. הוראת הקפיצה לכלל 1, שבאה אחרי שני כללי-ההמרה הללו, גורמת לכך שתיבדק שוב התקיימות התנאי שבחלק-התנאי של הכלל 1. והיה, אם ימצאו כבר N חברים בחבורה הנידונה, יעזוב אותו כלל את החבורה לנפשה. הכלל מצייין, שהחבורה היא G_i .

לכן, לא רק חלק-הביצוע מתבצע על אותה חבורה עצמה, אלא שהכלל 1 מתבצע (בפעמים שונות) על כל חבורה שהיא, מבין אלה הנידונות (דהיינו, אלה שנתערבו פיסחיהן). והיה, אם חלק התנאי אינו מתקיים עוד (או לא התקיים כלל וכלל אף קודם לכן) בחבורה G_1 , תיבדק התקיימותו של התנאי לגבי החבורה G_2 , וכן הלאה.

זאת עד אשר יהיו N חברים לפחות בכל החבורות.

וזו, אומנם, התוצאה המתקבלת במצב C . החבורות G_1 ו- G_5 , שבמצב B לא היו בהן חמישה חברים בכל אחת, מילאו את החסר:

את התוצאה המתקבלת ניתן לראות בנוסחה של המצב C .

הכלל 2 שבאוצר-הכללים הוא כלל-המרה פשוט, שלפיו החבורה G_1 ("א, כל חבורה) מושכת לה אחד מן הפסחים שנימצאים מחוץ לחבורות, מבלי להתחשב בזהותו. ואומנם, איננו יודעים להבחין בין העיגולים השחורים, שמייצגים את הפסחים. ואולם, מדובר אך ורק באותם פסחים שנתערבו: אין הרי חמשת העיגולים שבמצב C , שנימצאים מחוץ לחבורות, כהרי אותם אנשים "מן השוק" שנותרו מחוץ לחבורות. שהרי אין בני החבורות הולכים וקונים להם פסחים חדשים. יש כאן מוסכמה סימנטית, שיכולנו לייצגה במפורש. מיכלול הפסחים שנתערבו, הוא ידוע, רק אין בני החבורות יודעים איזהו הפסח שאבד לחבורתם הם (וגם אינם מסוגלים לזהות את הפסח המיוחד של חבורה נתונה אחרת, מבין החבורות שנתערבו פיסחהן).

המצב D מתקבל כתוצאה של הפעלת הכלל 2. הצעד הבא, הוא שכל חבורה תשגר נציג מתוכה לכל אחת מן החבורות האחרות. בכלל 3, אנו בוחרים בתוך הקבוצה G_i — תת-קבוצה, S_i , בגודל $N-1$: יש לשלוח $N-1$ נציגים בסך הכול, לחבורות האחרות, אך ייתכן לנסח ניסוח שלפיו N נציגים ימצאו את מקומם בכל N החבורות. דהיינו, אחד האנשים יישאר בחבורתו, מלבד שאר בני החבורה G_i , שהם:

$$|G_i| - |S_i|$$

ואומנם, כך נהגנו, לשם פשטות הניסוח, למרות שיהיה טעם בפי העוררין, להעיר שכך הצגנו כנציג אדם, אשר אינו מן הנציגים כלל וכלל, מכיוון שהוא נישאר בחבורתו, ודינו כדין שאר בני החבורה שנישארו בה.

ואילו נוסח מתוקן של הכלל — "שגריר שנישאר בבית" — הוא הכלל 3.

הסימן -: שבפקודה הראשונה שבכלל 3, הוא אופרטור-ההשמה, שבאמצעותו אנו קובעים שערך הקרדינליות $|S_i|$ יהיה N .

הפקודה הבאה שבמיסגרת אותו כלל עצמו, מגדירה משתנה נוסף j (מלבד המשתנה "הוותיק" i): המשתנה הזה, j , יקבל - מדי פעם בפעם - ערך מיספרי מבין כל הערכים שמזהים אחת מן החבורות. כך אנו קובעים לעצמנו את "רשימת הנימצעים", אשר אליהם יש לשגר את נציגיה של החבורה G_i .

בתוך הלולאה על j , מתבצע כלל-המרה מסויים, אשר לפיו, אנו מפרידים, בתוך הקבוצה G_i , תת-קבוצה, S_i , של בני החבורה:

ל- S_i , משתייכים N חברים (כלשהם) מאלה שמזוהים כשתייכים לחבורה G_i .

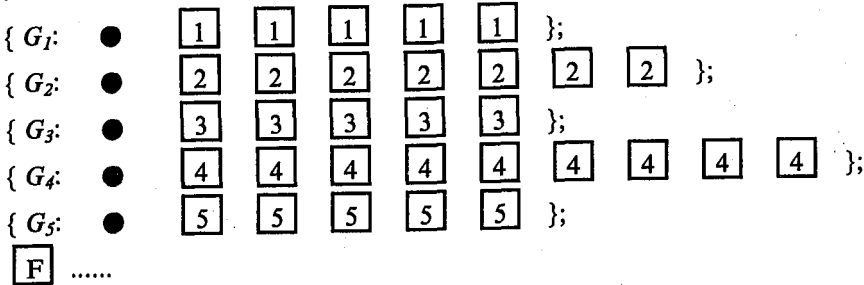
זהותם הקבוצתית נתונה באמצעות האות i שבתוך המרובע. עד כאן, חלק שמאל של כלל ההמרה. הדפוס שניקבע באופן זה, מומר לדפוס שניקבע בחלק ימין של כלל ההמרה.

עתה, במקום אותם N חברי הקבוצה G_i שהיו ב- S_i , אנו מוצאים בתוך S_i אנשים כמיספרם;

אלא שאלה הם בני החבורות מ- G_1 ועד G_N (ואדם אחד מתוך החבורה G_1 עצמה, בכללם; ראה לעיל).

לייתר דיוק, היה עלינו להבחין בין אופן ההמרה שבכלל 3 (אשר בו האנשים ממש מוחלפים באחרים: מלבד אותו חבר החבורה G_1 שנישאר בחבורתו), לבין אופן ההמרה שהיינו עדים לו בכלל ההמרה השני שבחלק הביצוע של הכלל 1: שהרי שם, האדם נישאר אותו אדם עצמו, רק שייגנו את זהותו הקבוצתית. אבחנה כזאת רצויה, וניתן היה להביאה בחשבון תוך כדי אימוץ של ייצוג הפעולות מן הסוג הסטיפולאטיבי, אשר ניראה אותו בהמשך, במסגרת הדין בכלל 4.

State D:



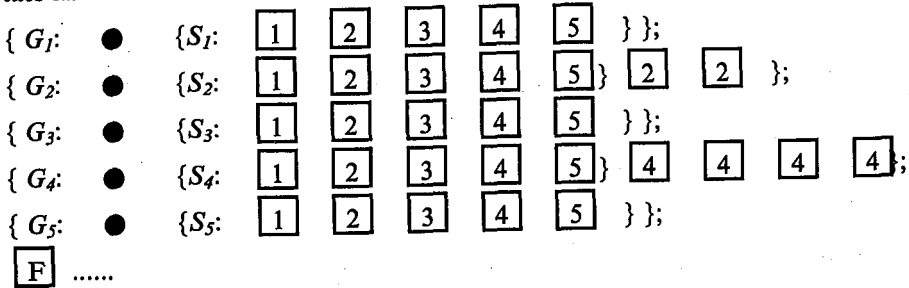
Rule 3:

Let $|S_i| := N$.

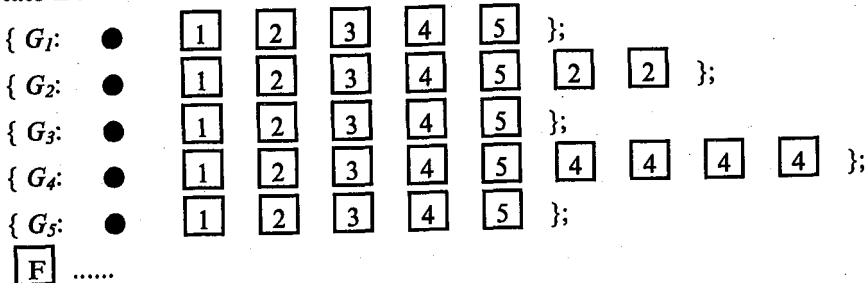
For $\forall j, 1 \leq j \leq N$, do:

$$\{ G_i: \bullet \dots \{ S_i: \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \end{array} \times N \} \\ \text{=====} > \{ G_i: \bullet \dots \{ S_i: \cup_j \begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline \end{array} \} \}$$

State E:



State E':



Rule 3'

Let $|S_i| := N-1$.

For $\forall j, 1 \leq j \leq N, i \neq j$ do:

$$\{ G_i: \bullet \dots \{ S_i: \boxed{i} \times (N-1) \} \} \\ = = = = > \{ G_i: \bullet \dots \{ S_i: \cup \boxed{j} \} \}$$

State E''

- { G₁: ● { S₁:

2	3	4	5
---	---	---	---

 } 1 };
 - { G₂: ● { S₂:

1	3	4	5
---	---	---	---

 } 2 2 2 };
 - { G₃: ● { S₃:

1	2	4	5
---	---	---	---

 } 3 };
 - { G₄: ● { S₄:

1	2	3	5
---	---	---	---

 } 4 4 4 4 };
 - { G₅: ● { S₅:

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

 };
-

התוצאה של הפעלת הכלל 3 מוצגת במצב E, כניסוחו בנוסחתו. כאן, עודנו שומרים על התיחום של התת-קבוצות S_i (כלומר, מ-S₁ ועד S₅ בדרוגמה). אין זה משנה אם נוריד את הסוגריים המסולסלים, מכיוון שמעתה ואילך, קובע מקום הימצאותם של האנשים, בייחוד עם זכר השתייכותם לחבורתו המקורית של כל אחד מהם. זאת ניתן לראות בניסוח המחודש של אותו מצב: ראה מצב E'.

וכפי שהזכרנו כבר: לחלופין, במקום הכלל 3, יתכן להפעיל נוסח מתוקן, הוא הכלל 3'. הפעם, באופן מדוייק יותר, ב-S_i ישנם N-1 בני-אדם בלבד: בחלק שמאל של הכלל, N-1 חברים מן החבורה G_i עצמה, אשר יש לשגרם לחבורות האחרות (האחרות דווקא!) כנציגים; ובחלק ימין של הכלל, N-1 אנשים שהגיעו מן החבורות האחרות (אחד מכל חבורה). הפעלתו של הכלל 3' יוצרת את המצב E'' (שהוא שקול כנגד המצב E', אשר אליו נגיע אם נשמיט את תיחומן של התת-קבוצות S_i). הפעם, התת-קבוצות מ-S₁ עד S₅ כוללות נציג אחד מכל חבורה, חוץ מן החבורה המסויימת שהיא הקבוצה שבתוכה נימצאת התת-קבוצה המסויימת.

זה ניכר היטב, מן הבחינה הגראפית, במצב E'' כפי שהדפסתיו: כל הנציגים, דהיינו החברים בכל התת-קבוצות S_i, מהווים מלבן של ארבעה על חמישה; בייחוד, אם נתחשב במיספרים שבתוך המרובעים שבאותו מלבן, בולט העדרו של אלכסון שמקומו ניפקד החל מן הקרן "הצפון-מערבית", וכלה בקרן "הדרום-מזרחית": חמשת המרובעים שהיו אמורים להיכלל באותו אלכסון שחסר (ושלעומת המצב E'', הוא אכן מופיע בניסוחו של המצב כמצב E), הם מ-1 ועד 5, כל אחד כמיספר השורה שממנה נעדר. ולעומת זאת, ניתן נא עתה את הדעת מימין לתת-קבוצה S_i:

בכל שורה במצב E'', מופיע מרובע אחד יתר על מה שניתן לראות במצב E: שהרי לא שיגרנו נציג מן החבורה G_i לאותה החבורה עצמה, ומי שבמצב E הוא "שגריר שנישאר בבית", במצב E'' הינו "וותיק" ככל "הוותיקים" שנישארו ב-G_i.

מכל מקום, בין אם נפעיל את הכלל 3 ונקבל את המצב E, ובין אם נפעיל את הכלל 3' ונקבל את המצב E'', המצב המתקבל (יהיה ניסוחו אשר יהיה) שקול כנגד הניסוח שבמצב

E' מן המצב E' - אשר בו, בכל חברה יש "וותיקים" (לפחות "וותיק" אחד) ויש נציגים שיש להתנות עימם תנאי לגבי השה - הבה נמשיך הלאה.
ועתה, יתנו עימם מה שהמישנה קובעת שיש להתנות עימם.
עתה, עלינו להפעיל את הכלל שמבצע את האירוע, שבמיסגרתו החבורות עורכות חווה (מילולי), סטיפולציה, לגבי השה שעליו האנשים יימנו, בנצלן את האפשרות להישמט מן הפסח שנימנו עליו כל עוד הוא לא נישחט.

Rule 4:

For $\forall G_i, \forall k, i \neq k, \forall h, h \neq k$. do:

Definitions: $\bullet_{in\ i} \equiv individual_identity (\bullet\ in\ G_i)$;
 $\bullet_{of\ i} \equiv individual_identity (\bullet\ of\ G_i)$;
 $\bullet_{of\ k} \equiv individual_identity (\bullet\ of\ G_k)$;
 $\{\boxed{i}\}_j \equiv \{\boxed{i} \mid \boxed{i}\ in\ G_i\}$;
 $\{\boxed{h}\}_j \equiv \{\boxed{h} \mid \boxed{h}\ in\ G_i\}$;
 $\boxed{k} \equiv individual_identity \{\boxed{k}\ in\ G_i\}$;

stipulate: HOW: say

AGENT: $\{\boxed{i}\}_i$ on behalf of $\{\boxed{h}\}_i$
ABOUT: $\bullet_{in\ i}$
ADDRESSEE: \boxed{k}_i on behalf of G_k
WHAT: Stipulation α_i^k

where α_i^k is:

If $\bullet_{in\ i}$ is $\bullet_{of\ i}$
 Then: $group_identity (\boxed{k}) = = = = = > G_i$.
 If $\bullet_{in\ i}$ is $\bullet_{of\ k}$
 Then: $group_identity (\{\boxed{h}\}_i) = = = = = > G_k$.

Rule 4':

For $\forall G_i, \forall a, \forall b, a \neq b, a \in G_i, b \in G_i$,

$\forall p, \forall q, 1 \leq p \leq N, 1 \leq q \leq N$;

do: **Definitions:** $\bullet_{in\ i} \equiv individual_identity (\bullet\ in\ G_i)$;
 $\bullet_{of\ a} \equiv individual_identity (\bullet\ of\ G_p)$;
 $\bullet_{of\ b} \equiv individual_identity (\bullet\ of\ G_q)$;
Assertions: a is \boxed{p} , i.e. $group_identity (a) = G_p$;
 b is \boxed{q} , i.e. $group_identity (b) = G_q$

stipulate: HOW: say

AGENT: a on behalf of G_p
 ABOUT: ●_{in i}
 ADDRESSEE: b on behalf of G_q
 WHAT: Stipulation β_a^b

where β_i^k is:

If $p \neq q$, then:

If ●_{in i} is ●_{of a}
 Then: group-identity (b) =====> G_p .
 (i.e. b is \boxed{q} =====> b is \boxed{p})
 If ●_{in i} is ●_{of b}
 Then: group-identity (a) =====> G_q .
 (i.e. a is \boxed{p} =====> a is \boxed{q})

Rule 4'':

For $\forall G_i, \forall k, i \neq k$, do:

Definitions: ●_{in i} ≡ individual_identity (●_{in G_i});
 ●_{of i} ≡ individual_identity (●_{of G_i});
 ●_{of k} ≡ individual_identity (●_{of G_k});
 $\{ \boxed{i} \}_j \equiv \{ \boxed{i} \mid \boxed{i} \text{ in } G_i \}$;
 $\boxed{k}_j \equiv \text{individual_identity } \{ \boxed{k} \text{ in } G_i \}$;

stipulate: HOW: say

AGENT: $\{ \boxed{i} \}_i$
 ABOUT: ●_{in i}
 ADDRESSEE: \boxed{k}_i on behalf of G_k
 WHAT: Stipulation α_i^k

where α_i^k is:

If ●_{in i} is ●_{of i}
 Then: group-identity (\boxed{k}_i) =====> G_i .
 If ●_{in i} is ●_{of k}
 Then: group-identity ($\{ \boxed{i} \}_j$) =====> G_k .

בכלל 4, אנו מגדירים את k כמישנתה, ומתנים שיקבל את הערך המזוהה של כל חבורה וחבורה, מדי פעם בפעם; הכוונה היא ש- k ישרת את ייצוג אותם אנשים שבאו לתוך החבורה G_i כנציגי החבורות האחרות.

הכלל כולל, בראשיתו, נתח הגון של הגדרות. סוף-כל-סוף, אפילו איננו יודעים מה זהות המקורית — מה היה עברו — של הפסח שהחבורה משכה לתוכה, הרי שעלינו להיות מסוגלים להתייחס לתכונותיו, באקט הסטיפולציה.

לכן, הבה נגדיר לנו סמלים:

בעבור זהותו הפרטית של אותו פסח שכעת נמצא בתוך החבורה G_i ; בעבור זהותו הפרטית של הפסח (מבלי לדעת איווה) שעליו נימנחה, במקור, החבורה G_i , שהיא עדיין הבעלים שלו; ובעבור זהותו הפרטית של הפסח (גם הפעם, מבלי לדעת איווה) שהבעלים שלו היא עדיין הקבוצה G_k , אשר אחד מנציגיה נמצא כעת בתוך החבורה G_i .

כמו כן, מוגדר סמל מיוחד בעבור הקבוצה של כל אותם בני החבורה G_i שעדיין נמצאים בתוכה (הסמל הוא i בתוך מרובע שנתון בתוך סוגריים מסולסלים שמצורף להם האינדקס i למרגלוחם). סמל נוסף שמוגדר, הוא k במרובע כפול, עם i כאינדקס; הסמל הזה מייצג את זהותו הפרטית של אותו אדם מסויים שבא לתוך החבורה G_i כנציגה של החבורה G_k . (ואילו סתם k בתוך מרובע פשוט, מסמל אדם כלשהו שחבורת המקור שלו היא G_k , בין אם הוא בתוכה, בין אם הוא מייצגה כעת בחבורה אחרת.)

אתרי חלק ההגדרות שבכלל 4, מופיע ייצוג של אקט הסטיפולציה: לפי סימון כזה — עם יחסות סימנטיות או עם תכונות מתארות אחרות — שהוא מקובל למדי בעיבור שפה טיבעית באמצעות מחשב¹⁷. הסטיפולציה נעשית באמצעות אמירה (מציינן זאת הערך של התכונה WHO). הנושא הסימנטי (הָאָנָט) של פעולת הסטיפולציה הוא אותה תת-קבוצה של חברים מקוריים שעדיין נמצאים בתוך חבורתם G_i .

ועל מי הם מתנים? על אותו פסח שנמצא כעת בתוך החבורה G_i , כי משכווה לשם. הנימען (ADDRESSEE) של האמירה הוא הנציג של החבורה G_k . הוא הנמען בעבור אותה חבורה, בתוקף היותו נציגה (אשר רשאי לאפשר לאנשים אחרים להימנות על הפסח אשר G_k היא הבעלים שלו). וזאת, בעבור כל הערכים של k , כלומר בעבור כל הנציגים מבחוץ שנמצאים עתה בתוך G_i . וזאת, בעבור כל הערכים של i , כלומר, בכל חבורה וחבורה, מבין אלה שנתערבו פיטחיהן, ומה הם מתנים?

התכונה WHAT מכילה אצבעה לתוכן הסטיפולציה; אח התוכן מסמל הסמל α^k . החלק האחרון שבכלל 4, מפרט את התוכן של ההתנייה שבני החבורה "הוותיקים" מתנים עם כל נציג ונציג מאלה שבאו אצל החבורה G_i . התוכן הוא עצמו אוצר-כללים, אשר מכיל שני כללים במתכונת של תנאי וביצוע. חלק הביצוע של כל אחד משני הכללים הללו שבחוק הסטיפולציה, מכיל כלל המרה אחד. אוצר-הכללים שבחוק התוכן המיוצג על ידי α^k הוא:

"אם הפסח שנמצא כעת (כי "משכווה") בתוך החבורה G_i , הוא זהה עם הפסח שבבעלותה (ושאכד לה), אזי: והותך הקבוצתית שלך עצמך, הוי נציגה של החבורה G_k , תומר בזהותנו הקבוצתית שלנו (כלומר, מעתה ואילך, אתה חבר בחבורה G_i , ומנוי על הפסח שבבעלותנו, שהוא גם הפסח שמשכנו לנו ונמצא עתה ברשותנו)."

"אם אותו פסח שנמצא כעת בתוך חבורתנו G_i , הוא הפסח שבבעלותה של חבורתך G_k , אזי: אנו נוטשים את זהותנו הקבוצתית G_i , וממירים אותה בזהות הקבוצתית G_k , שהיא גם

הזהות הקבוצתית שלך עצמך. (ומעתה ואילך, אנו מגויים, כמוך, על הפסח שבבעלותה של החבורה G_i , ושהוא הוא הפסח שמשכנו לתוך G_i).".

אם עלינו להבין שרק חבריה הוותיקים של כל חבורה מתנים את התנאי עם החברים החדשים, אזי הכלל 4, כניסוחו, הוא הכלל שאותו יש לבצע. ולא היא, אם ניסתמך על פירושו של אלבק לפסחים ט', י':

"כל אחד ואחד מבני החבורות החדשות אומר לכל אחד ואחד מחבורתו: אם שלך הוא הפסח הזה, ידי משוכות משלי ונמנתי על שלך".

והרעת נותנת, שיש אומנם טעם באמירה אכסהאוסטיבית, ממצה, מעין זו, של הכול לכול. ואולם, אין צורך בכך, אם נסכים שדי בהסכמה שבשתיקה על-ידי מי שהאמירה הופנתה אליו, או לפחות בהסכמה מעין "הן" או "אמן" או "כן יהיו דבריך", אלא שהמישנה סתמה ולא פירשה. ואז דינו בכלל 4 כניסוחו.

ואומנם, לזה מתאים פירושו של אלבק למישנה י"א (כניגוד לפירושו למישנה י"), שבה נידון המיקרה הפרטי של שתי חבורות-יחיד שהורחבו לתבורות של שניים:

"זה בא אצל זה וכו' - אחד מחבורה זו בא לאחד מן החבורה האחרת. והשני שבחבורה האחרת בא אל השני שבחבורה זו.

וכך הם אומרים - כל אחד לזה שבא אצלו".

אם נגרוס דווקא שעל האמירה להיות אֶכְסֶהאֹוסְטִיבִית, עלינו להחליף את הניסוח שבכלל 4 ולקבוע במקומו את הניסוח שבכלל 4'. הפעם אנו מרבים במישתני-עזר. בולט כאן היעדר מעמדם המיוחד של "וותיקי" החבורה G_i . ייתכנו גם ניסוחים אחרים. בניסוח שלפנינו, אין זה משנה אם הוזהות הקבוצתית אשר האינדקס שלה הוא i , היא זהה עם p או עם q או שונה מהם. אם הפסח אינו שייך לא לחבורה G_p (המקורית של האדם a) ולא לחבורה G_q (המקורית של b), אזי:

אותה אמירה מסויימת (המופיע של סטיפולציה β^b) היא לבטלה, ובין כה וכה שני האנשים, a ו- b , ייצאו ידי הימנותם על הפסח המתאים, באמירות אחרות (מופעים אחרים של הסטיפולציה).

נחזור נא לנוסח שבכלל 4. לעומתו, הנוסח שבכלל "4' הינו מוטעה, מכיוון שה"וותיקים" דואגים כביכול לעצמם, ולא לחיקון מצבם של הנציגים שבאו לתחומם. שכן, אם הפסח הוא הוא שאבד לחבורה G_i עצמה, אזי הכול טוב ויפה:

זהותו הקבוצתית של הנציג המסויים שאליו פונים הוותיקים, תומר בזהות הקבוצתית G_i . והרי הפניה הזאת מכוונת כאילו היא לחד, לכל נציג ונציג, וממילא, לפי דרכם, ימצאו הוותיקים ממירים את זהותו הקבוצתית של כל נציג ונציג באותה פניה שמיוחדת בשבילו. ולעומת זאת, אם מתקיים התנאי שלפיו הפסח שנימשך לתוך G_i הוא הפסח ששייך לחבורה G_k , אזי לפי הניסוח השגוי שבכלל "4' רק זהותם הקבוצתית של וותיקי החבורה G_i מומרת בזהות G_k , ולא זהותם הקבוצתית של הנציגים שבאו ל- G_i (חוץ מן החבורה G_k).

לכן, הגדרנו את המשתנה h , שבין ערכיו ניכללים גם i (כלומר, המזהה הקבוצתי של הוותיקים שבתוך G_i ושל נציגיה שבחבורות אחרות), וגם כל מיספרי החבורות האחרות, חוץ מ- k (תהיה זהות הקבוצתית שבחבורת-המקור אשר תהיה, הסימון $\{ \}_i$ מצייני הימצאות בתוך החבורה G_i).

לכן, לפי הניסוח הנכון שבכלל 4, הוותיקים מוציאים ידי חובתם הן את עצמם, והן את הנציגים מן החבורות ששונות מ- G_1 ומ- G_k , כאשר הם קובעים את המרת הזהויות הקבוצתיות אם מתקיים התנאי שלפיו הפסח שב- G_1 שייך לחבורה המסוימת G_k .

לאמיתו של דבר, ניתן להשתמש אפילו בכלל 4, אלא שאז יש להוסיף צעד נוסף, שיתקן את מצבם של הנציגים. לפי הצעד הנוסף (כלל 5), על כל נציג ונציג להתנות, על בסיס אישי, עם ה"וותיקים" (מי שהיו הוותיקים) שבקבוצת האנשים אשר עימם הוא נמצא כעת, את התנאי הבא: "הריני מנוי על הפסח של חבורתכם הנוכחית". התנאי הנוסף הזה מתקן את הפגם שבכלל 4. ואולם, למרות ששילובם של הכלל 4 ושל הכלל 5 ישיג, גם הוא, את התוצאות הרצויות, הוא מהווה סטייה מן הפרוטוקול שניקבע במישנה. ניראה לומר, שבדיעבד, אם נהגו לפי הכלל 4, אזי מותר לתקן לפי הכלל 5, ואז הכול יבוא על תיקונו, והפסחים יהיו מותרים לחבורות ולכל המשתתפים בהן.

נציין עוד, שניתן לסבך את הפיתרון, כדי שיקבד אילוצים נוספים. אילוץ חשוב, שלא ניזכר במישנה, הוא כדלקמן: נניח ששני אנשים או יותר (יהי מיספרם M) רוצים להימצא ביחד, בקבוצה אחת, בליל הפסח. האילוץ הזה לא ניזכר במישנה, מפני שניתן לשנות את הרכבן של החבורות אחרי תום ביצוע פרוטוקול הפיתרון: מי שרוצה, שיעבור או אצל קרוביו, רעיו ומיודעיו אשר איתם הוא רוצה להימצא. ואולם, ייתכן גם להביא בחשבון את האילוץ בתוך עצם פרוטוקול הפיתרון של בעיית חבורות שנתערבו פיסחיהן. אם כן האחת מן השתיים: עליהם להישאר, ביחד, בחבורתם המקורית (בין וותיקיה), או שעליהם לעבור ביחד כנציגי קבוצתם המקורית לקבוצה אחרת.

בין היתר, זה מצריך מיספר רב יותר מאשר N של חברים בתוך הקבוצה המקורית; לכן, בכלל 2, יהיה צורך לבדוק את התנאי, בעבור כל קבוצה, לא על N , אלא על $N + M - 1$, אם יש בקבוצה המסוימת תת-קבוצה אחת של M בלתי-ניפרדים. במיקרה הכללי, בכל קבוצה G_i יוכלו להיות m_i תת-קבוצות של בלתי-ניפרדים,

$$\{T_1^i, T_2^i, \dots, T_{m_i}^i\}$$

מיספרי-החברים בכל אותן תת-קבוצות של בלתי-ניפרדים יהיו

$$Y_i \equiv \{ |T_1^i|, |T_2^i|, \dots, |T_{m_i}^i| \}$$

וכל אחד מהם יהיה מיספר שלם חיובי וגדול מ-1. אז התנאי שבכלל 2 יצטרך להיות כדלקמן, בעבור כל קבוצה G_i :

$$N + \sum_{y \in Y_i} (y-1)$$

יש להדגיש, בסיכומו של דבר: הצענו ייצוג פורמלי בעבור הפרוטוקול הנתון במישנה עצמה, לפיתרון בעיית החבורות שנתערבו פיסחיהן. לא ניסינו לפתח מודל של תגלית של הפיתרון, או מודל של משא ומתן¹⁸ בין החבורות שיביא לגיבושו של הפיתרון (למרות שמודלים מעין הללו הם בוודאי נושאים לבניה מלאכותית).

תודתי נתונה לר"ר משה קופל ולפרופ' עלי מרצבך על עניינם בייצוג שהצעתי. המאמר מוקדש לזיכרה של מורתי ממילנו, פרופ' אלדה פרוג'ה (Alda Crema Perugia, 1900-1984).

שהייתי תלמידה בתיכון בשנת הלימודים 1971/2, היא שנת הוראתה ה-49 והאחרונה, וזכיתי עד לסוף ימיה לעירודדה המתמיד של מי שהייתה מעמודי-התווך של החינוך היהודי במילנו. ללא ספק, ממנה בא התמריץ לשלב תחומים: בהנדסה ובמדעים המדויקים שנה, ומדעי-הרוח אל תנח ידיך. ואין, אולי, פורום שמגלם השקפה זו יותר לעומק מאשר כתב העת הזה, ועורכיו יבואו על הברכה. תודתי נתונה גם לגבי דפנה וכטנהיים שהקלידה את המאמר.

הערות:

1. הטקסט שבמובאה הוא לפי מהדורת אלבק/ילון של המישנה (מוסד ביאליק, ירושלים - דביר, תל-אביב, תשי"ב), לפי הגירסה הסינקרטית שקבע ילון בעבור מהדורה עממית בין-ערתית זו.
2. עסקתי בנושא בפרספקטיבה כללית יותר, כאשר הסוגיה מן המישנה משמשת כדוגמה (מכלי להתעמק בפן ההלכתי) — במיסגרת תיאור של שיטה שאותה הצעתי, SEPPHORIS (על שם ציפורי, עירו של ר' יהודה הנשיא), לייצוג-יידע בבניה מלאכותית — במאמרי:
Nissan, E., SEPPHORIS: An Augmented Hypergraph-Grammar Representation for Events, Stipulations, and Legal Prescriptions. *Law, Computers, and Artificial Intelligence* 4, 1 (1995).
3. הרי כותר ביכליגרפי בתורת הגרפים:
Christofides, N., *Graph Theory: An Algorithmic Approach*. Academic Press (New York, 1975).
4. על תורת ההיפרגרפים, ראה:
Berge, C., *Hypergraphs: Combinatorics of Finite Sets*. North-Holland (Amsterdam, 1989) = *Hypergraphes: combinatoire des ensembles finis*. Bordas (Paris, 1987).
5. כהקרמה לדיקדוקים פורמליים במדעי-המחשב, יוכל לשמש סיפרם של הופקרופט ואולמן. ואילו בשני הכרכים של סיפרם של אהו ואולמן, מתוארות בפרוטרוט שיטות פורמליות בקומפילציה של שפות-חיכונות (ללא התייחסות לשפות-חיכונות מסוימות).
Hopcroft, J.E. & J.D. Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. Addison-Wesley (Reading, MA, 1979).
Aho, A.V. & J.D. Ullman, *The Theory of Parsing, Translation and Compiling*. Vol. 1: *Parsing* (1972). Vol. 2: *Compiling* (1973). Prentice-Hall (Englewood Cliffs, N.J.).
6. על התיאוריות של חומסקי בבלשנות, עיין למשל בסיפרו של מויין. ואילו שלב נוסף בסידרת התיאוריות של חומסקי, שמתיימר לטפל באופן פאראמטרי במיגוון של שפות בכלי אחד, מוצג ע"י פונג וברוויק.
Moyné, J.A., *Understanding Language: Man or Machine*. Plenum Press (New York & London, 1985).
7. על עיבוד שפה טיבעית באמצעות מחשב, בייחוד לפי גישות שצמחו באסכולת חומסקי - מלבר אשר בסיפרם של פונג וברוויק, שמוקדש לשיטה מסוימת של חומסקי עצמו - עיין:
Gazdar, G. & C. Mellish, *Natural Language Processing in PROLOG: An Introduction to Computational Linguistics*. Addison-Wesley (Reading, MA, 1989).
8. על גישות "תחביריות", מונחות-דיקדוק, לזהי-צורות, ראה למשל:
Fu, K.-S., *Syntactic Pattern Recognition and Applications*. Prentice-Hall

(Englewood Cliffs, N.J., 1982).

9. על גישות דיקדוקיות בתיכנון, ובאדריכלות כפרט, ראה:

Styny, G., Introduction to Shape and Shape Grammars. *Environment and Planning (B)* 7 (1980): pp. 343-351.

10. בתחום דיקדוקי-סיפור - שיונק מעבודתו הטרונית של וולאדימיר פרום עיין למשל בעבודותיהם של וואן דיק ושל פמברטון.

Van Dijk, T., *Some Aspects of Text Grammars*. Mouton (The Hague, 1972).

Pemberton, L., *Story Structure: A Narrative Grammar of Nine Chansons de Geste of the Guillaume D'Orange Cycle*. Ph.D. Dissertation, University of Toronto (Toronto, 1984).

11. שיטות דיקדוקיות בגישות חישוביות למוסיקה, מתוארות בפרקים שונים בקובץ המאמרים:

Schwanauer, S. & D. Levitt (eds.), *Machine Models of Music*. The MIT Press (Cambridge, MA, 1992).

12. Johnson, L. & E.T. Keravnou, *Expert Systems Technology: A Guide*. Abacus Press (Tunbridge Wells, Kent, U.K. & Cambridge, MA, 1984).

13. במיסגרת השימוש, לצורכי איבחון, בשרשור לאחור (backward chaining), למשל, קובעים יער חחילה, ואחרי כן, כדי להשיגו (כגון: כדי להוכיח השערה מסוימת), מתפתחת הייררכיה של יעדי-מישנה.

14. Serre, J.-P., *Trees*. Springer-Verlag (1980).

15. שימוש בדיקדוקי-געים ובדיקדוקי מחרחת-לעץ, בתורת הקומפילציה, מתואר אצל:

Wilhelm, R., Global Flow Analysis and Optimization in the MUG2 Compiler Generating System. Ch.5 in *Program Flow Analysis: Theory and Applications*, ed. by S. Muchnick & N.D. Jones. Prentice-Hall (Englewood Cliffs, N.J., 1981): pp. 132-159.

16. המונח "חבורה" המופיע במישנה ככינוי לאוסף של אנשים מקביל למונח "קבוצה" במתמטיקה. המילה "חבורה" משמשת במתמטיקה לענין אחר לגמרי.

17. הייצוג הסימנטי שמצרף לפועל יחסות סימנטיות (לא דיקדוקיות), שורשיו נעוצים באסכולת case-grammar שייסד אותה פילמור.

Fillmore, C.I., A Case for Case. In *Universals in Linguistic Theory*, ed. by E. Bach & R.T. Harms. Holt, Rinehart & Winston (New York, 1968): pp. 1-90.

18. בנושא של משא ומתן וקואופרציה בין גורמים, במסגרת של בינה מלאכותית מבוזרת, עיין אצל:

Chaib-draa, B., Mandiau, R. & P. Millot, Distributed Artificial Intelligence: An Annotated Bibliography. *ACM SIGART Bulletin* 3,3: pp. 20-37.