

חישוב הסתברותי והיבט רוחני בסוגית חמישה ולדות שנתערבו

עלי מרצבך וראובן מילד

1. הצגת הבעיה

במסכת יבמות, פרק י"א, משנה ג' נאמר:

חמש נשים שנתערבו ולדותיהן (ובנוסף יש לכל אחת מהן עוד בן אחד שלא נתערב), הגדילו התערבות ונשאו נשים ומתו (כלא בניס, ונמצאת כל אחת מהנשים וקוקה ליבום או לחליצה מספק לחמשת הבנים שלא נתערבו שהרי לכל אחת יש יבם ביניהם), ארבעה חולצין לאחת ואחד מיבם אותה (לאחר החליצה של הארבעה האחרים שהרי היא מותרת לו ממה נפשך). הוא ושלושה חולצין לאחת ואחד מיבם (כלומר זה שיבם חולץ לאחת ושלושה עמו והתמישי מיבם ממה נפשך). נמצאו ארבע חליצות ויבום לכל אחת ואחת (כל אשה חולצת החילה לארבעה מן היבמים וכל אחד מיבם לאחת מהן לאחר שחלצה לשאר הארבע). והגמרא אומרת (דף צ"ח ע"ב):

"לא תימא ליבמינהו חד לכולהו אלא כל חד וחד מייבם תדא דלמא מתרמיא ליה דידיה".
כלומר: אחד היבמים היה יכול ליבם את חמש הנשים אלא הגמרא מעדיפה שכל אחד ואחד ייבם אשה אחת כי על ידי זה אולי יזדמן לכל אחד ואחד גיטתו האמיתית ואז יקיים באמת מצוות יבום (עיין פירוש באר הגולה על אבן העזר קע"ו ס' ח' וכן ערוך השולחן קע"ו ס' ט"ז).

מתוך מאמר זה משמע שיש לחפש את האפשרות כך שיתקומו כמה שיותר מצוות יבום. אילו אחד היה מייבם את חמש הנשים (אחרי כמובן חליצה של ארבעת האנשים האחרים), אז בבטחון מלא אנו מקבלים קיום מצות יבום אחת בריוק. ולכן השאלה המתעוררת היא מדוע אין זה עדיף על פני דרך המשנה בה אין בכלל בטחון שיתקיים אפילו מצות יבום אחת? והרי ספק אינו מוציא מדי ודאי!

במאמר זה, נבאר את שיטת המשנה עם ההסבר של הגמרא ונראה את יתרון שיטה זו על פני שיטות אחרות. נעסוק קודם בחישובים המתמטיים של האפשרויות השונות ונרגיש גם היבט רוחני-פסיכולוגי לשיטת המשנה. לבסוף נציע הכללה לבעיה זו כאשר מספר הזוגות הוא כללי ביותר ($5 \leq$).

2. חישוב הסתברותי

נתונים חמישה אנשים וחמש נשים כאשר כל אחד מהאנשים הוא הגיס של אחת בריוק מתוך חמש הנשים ולכן חלה עליו מצוה ליבמה. אולם, לא ידוע מי הגיס של מי. נניח (בהתאם למשנה) שכל אחד מחמשת האנשים מיבם (באופן אקראי) אשה אחת (כמובן אחרי שהאשה

קיבלה חליצה מארבעה אנשים אחרים). נסמן ב- X המשתנה האקראי המסמן את מספר היבומים האמיתיים שהתבצעו. המשתנה X יכול לקבל את הערכים: 0,1,2,3,5. נחשב את ההסתברויות למאורעות אלו. לשם כך, יש להשתמש בנוסחת הסתברות איחוד מאורעות ובנוסחת הסתברות חיתוך מאורעות תלויים. לבסוף מתקבלים הערכים הבאים

$$P\{X = 0\} = \frac{11}{30}$$

$$P\{X = 1\} = \frac{3}{8}$$

$$P\{X = 2\} = \frac{1}{6}$$

$$P\{X = 3\} = \frac{1}{12}$$

$$P\{X = 5\} = \frac{1}{120}$$

ערכים אלו מבטאים את הסיכויים שבשיטת המשנה, מספר היבומים האמיתיים (או במילים אחרות מספר המצוות) הוא 5,3,2,1,0 בהתאמה.

מדד נוסף שכדאי לחשב הוא התוחלת או הממוצע של מספר היבומים האמיתיים בהתחשב בהסתברויות השונות:

$$E(X) = 0\left(\frac{11}{30}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{12}\right) + 5\left(\frac{1}{120}\right) = 1$$

קיבלנו איפוא שהתוחלת שווה ל-1. במילים אחרות ממוצע היבומים האמיתיים לפי שיטת המשנה הוא אחד וזה שווה למה שהיה קורה אילו איש אחד היה מייבם את כל הנשים.

ולכן מובנת שאלת הגמרא: אם כבר מספר היבומים האמיתיים הוא שווה בממוצע בשני המקרים למה להעדיף את שיטת המשנה? היה פשוט יותר ואולי עדיף שאיש אחד ייבם את כולן? ואז עונה הגמרא שהואיל ומבחינת התוחלת אין זה משנה כלום, עדיף לתת אפשרות לכל אחד מהאנשים לקיים את המצוה. רצונם של חז"ל לתת הזדמנות לכל אחד ואחד לקיים מצוה הוא חשוב במיוחד ועוד נדון בו בהמשך.

האם ניתן למצוא שיטת חלוקה אחרת כך שתוחלת מספר היבומים האמיתיים תהיה גדולה יותר? מתברר שלא: כל שיטת חלוקת יבומים נותנת תוחלת שווה למספר אחד. נבדוק למשל את המקרה הבא: איש אחד מיבם ארבע נשים ואיש אחר מיבם את האשה החמישית.

שוב נסמן ב- X את מספר היבומים האמיתיים. X מקבל עתה את הערכים 1,0 או 2 לפי ההסתברויות הבאות:

$$P\{X = 0\} = \frac{1}{5}, \quad P\{X = 1\} = \frac{3}{5}, \quad P\{X = 2\} = \frac{1}{5}$$

ולכן התוחלת המתקבלת היא:

$$E(X) = 0\left(\frac{1}{5}\right) + 1\left(\frac{3}{5}\right) + 2\left(\frac{1}{5}\right) = 1$$

אמנם תוחלת מספר היבומים האמיתיים היא שווה לאחד כמו קודם אבל בשיטה זו, רק לשני אנשים יש סיכוי לקיים מצות יבום ולכן ברור כי הפתרון אינו מתאים לחז"ל.

לפעמים משתמשים בסטטיסטיקה במדד ה"שכיח" כמדד ממוצע במקום המדד התוחלת. השכיח הוא הערך הסביר ביותר שמקבל משתנה אקראי מסוים. לפי שיטת המשנה, אם נשווה את כל ההסתברויות שחישבנו לעיל, רואים שהמספר הגדול הוא $3/8$. מספר זה מתאים למקרה בו $X = 1$.

כלומר, לפי שיטת המשנה, מבין כל האפשרויות, הסבירה ביותר היא שיתבצע יבום אמיתי אחד ולכן בהפעלת הכלל הידוע של חז"ל שהולכים אחר הרוב, יוצא שתתקיים מצות יבום אחת והסבר זה הוא חיווק נוסף לשיטת המשנה.

יתרה מזו, ראינו לפי שיטת המשנה שההסתברות שלא יתבצע אף יבום היא $11/30$. זאת אומרת שההסתברות שיתבצע לפחות יבום אחד אמיתי היא $19/30$. מספר זה הוא גדול מחצי ולכן לפי כללי "רוב" של חז"ל, ניתן לומר שברוב המקרים יתקיים לפחות יבום אמיתי אחד. דבר זה מחזק עוד יותר את העדפה של פתרון המשנה.

הערה אחרונה במבט ההסתברותי: מענין לחשב גם כן את מדד השונות, או סטית התקן. מדד זה מבטא עד כמה הערכים של המשתנה מרוכזים או להיפך מפוזרים ביחס לתוחלת. ככל שהשונות גדולה יותר, פיזור המשתנה גדול יותר. במקרה דנן, ניתן להוכיח כי מבין כל שיטות היבומים, שיטת המשנה נותנת לנו שונות מירבית: ההזדמנות לקיים מצות יבום היא גדולה ביותר בהסתכלות כללית על כל חמשת האנשים ביחד.

3. ההיבט הרוחני

בנוסף לרעיונות הסטטיסטיים הנ"ל, מונחים בסוגיא זו גם מספר עקרונות שעל פיהם חז"ל ביססו את הכרעתם.

א. ההעדפה של חז"ל לאפשר לכמה אנשים לנסות לקיים מצות עשה מאשר לתת ליבם אחד קיום וודאי של אותה מצוה מצביע על חשיבותה של עצם ההשתדלות. ידוע מרכזיותו של עקרון זה ביהדות - שמגדיר את עצם מהותו של האדם "זהו אדם יחיד בעולם ואין מין שני דומה לו בזה הענין שיהא הוא מעצמו... עושה כל מה שהוא חפץ ואין מי שיעכב בידו מלעשות הטוב או הרע" (משנה תורה, הלכות תשובה ה: א). במקרה לפנינו רצונם של חז"ל

היה לא למנוע מאף אחד מחמשת האחים את האפשרות להשתדל לקיים את מצות יבום - אפילו ב"סיכון" שאף אחד לא יצליח לקיימה. זו בחינת "רבות מחשבות בלב איש ועצת ה' היא תקום" (משלי י"ט כ"א). בסופו של דבר כוחו של אדם הוא לרצות ולהחליט לעשות את רצונו של מקום או חלילה לא לעשות. הצלחתו או אי הצלחתו המעשית נתונה אך ורק בידי שמים. חז"ל לא רצו למנוע מאף אחד מהחמישה את ביטוי רצונם לקיים את מצות ייבום. ב. כידוע "לא בשמים היא" ואנו מצווים לפעול בעולם על דרך הטבע. המציאות הסטטיסטית אפשרה לחז"ל את שתי הדרכים. יתכן שחז"ל פעלו מתוך אמונה שהכרעתם תביא להצלחה מעבר לסבירות הסטטיסטית.

ידועים הכללים ש"בדרך שאדם רוצה לילך מוליכים אותו" (מס' מכות י') ו"הבא להטור מסייעין אותו מן השמים" (מס' יומא ל"ח). בנוסף למה שנאמר לעיל שחובתו של אדם להשתדל לקיים מצוה והשתדלותו מביאה נחת רוח למקום - הרצון הכן שלו לקיים מצוות ה' יגביר (מעל הסבירות הסטטיסטית) את סיכויי הצלחתו. אם חמשת היהודים ירצו לקיים מצוות יבום, כל אחד, לפי רצונו האמיתי והשתדלותו לקיים את המצוה, יקבל סיוע מלמעלה.

ג. שיקול נוסף הוא על פי הסוד. רב חיים ויטל בשער הגלגולים (ראה הקדמה ט"ז) מגלה לנו את סוד גלגול הנשמות. כל הנשמות הישראליות חוזרות בגלגולם בגוף אחרי גוף עד לסיום משימתם בעולם הזה. המשימה היא קיום כל מצוות התורה אפילו מצוות קיומיות כמו יבום וחליצה. ההכרעה של חז"ל בסוגייתנו מאפשרת לכל אחד מחמשת היהודים לקיים את שתי המצוות הנדירות האלו כל אחד לפי צורך נשמתו.

4. ההיבט הפסיכולוגי

ישנם מקרים רבים בהם השיקול הפסיכולוגי משפיע על ההכרעה ההלכתית של חז"ל. למשל יש דיון בחז"ל האם לחייב במלאכת מתקן אדם שחובל בחברו וברכשו בשבת בשעת מריכה. שיקול מרכזי שלפיו יש לחייבו הוא הנימוק שלמרות שמעשה החבלה הוא מלאכה שאין צריכה לגופה, שהיה צריך להיות פטור, בכ"ז מפני ש"נחת רוחו שהרי נתקרה דעתו ושככה חמתו" אנו מחשיבים את המעשה שלו כעין מתקן פסיכולוגי וחייב (שבת ק"ה; רמב"ם הלכות שבת ח:ח, יב' א). דוגמה נוספת מתיחסת לדינים חקשורים בשכיב מרע. למרות שמדין תורה אין אפשרות להקנות דבר על ידי דיבור בלבד, חז"ל קבעו שאצל אדם הנוטה למות "דבריו ככתובים וכמסורים שלא תטרף דעתו עליו". דאגתם של חז"ל לא לגרום צער פסיכולוגי לאדם חולה הביא לזה שאיפשרו לו להקנות בצורה שלא תקיפה בדרך כלל (גיטין טו; תו"מ ר"ג). השיקול הפסיכולוגי הוא כה חזק עד שחז"ל השתמשו בו אפילו כדי להתיר חילול שבת: מותר להדליק נר בשבת ליולדת הצריכה לו - אפילו יולדת עיוורת "מפני שדעתה מתיישבת עליה בנר ואף על פי שאינה רואה" (שבת קכ"ח; רמב"ם הלכות שבת ב: יא).

אנו רואים מתוך דוגמאות אלו ואחרות שחז"ל לא היססו לבסס הכרעה הלכתית על שיקול פסיכולוגי.

במקרה שלפנינו קיים שיקול פסיכולוגי ברור: כל אחד מהמייבמים גדל בתוך משפחה שהוא התייחס אליה והתייחסו אליו כמשפחה הטבעית שלו. האח שנפטר נחשב כאח וודאי ובוודאי קיים אצל אחיו רצון וצורך נפשי להקים את זרעו על ידי מצות היבום. חיי המשפחה שלו עם אשת אחיו שנפטר עשויים להיות מבוססים על קשרי כבוד ואהבה הדדית.

לעומת זאת, אילו חז"ל היו מכריעים לפי הצעת הגמרא, היה נגרם מצב בו אדם אחד היה מייבם חמש נשים ביודעין שרק אחת מהן היא אשת אחיו האמיתי. ברור שהיו נוצרים בו רגשי כעס ורחיה כלפי חלק מהיבמות ולידהן. בנוסף ידוע שמהות הקשר בין הצרות עצמן מבוסס על שנאה הדדית. חיי המשפחה במצב הזה עלולים להיות רחוקים מתקינים. חז"ל העדיפו להוסיף צרה אחת לכל משפחה מאשר חמש הצרות למשפחה אחת.

יוצא איפוא שהיבטים אלה מכתיבים את דרך המשנה; ולא רק כעצה טובה אלא כדבר מוכרח ומוחלט: גם מבחינה אוביקטיבית הוא יקבל סיוע מן השמים לייבם את "שלו" וגם מבחינה סוביקטיבית הוא ירגיש שהוא מייבם את שלו.

5. הכללה למספר כללי של זוגות

המשנה דיברה על חמישה ולדות שנתערבו. מה היה הדין אילו, במקום חמישה ולדות וחמש נשים, יש לנו ששה או שבעה או כל מספר שהוא: n . אם נסמן שוב ב- X את מספר היבומים האמיתיים כאשר כל אחד n -מ האנשים מיבם בדיוק אחת מ- n הנשים, ניתן לחשב את ההסתברויות לפי הנוסחא הבאה:

$$P\{X = k\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{i!}$$

כאשר $k = 0, 1, \dots, n$

אם $k = n - 1$, אזי $P\{X = n - 1\} = 0$ (כלומר אין זה אפשרי שיתקיימו בדיוק $n-1$ מצוות ייבום), וכן

$$P\{X = n\} = \frac{1}{n!}$$

לפי כל שיטות החלוקה, חישוב התוחלת של מספר הייבומים האמיתיים נותן לנו תמיד את הערך 1; ולכן, בהסתמך על העקרונות שהובאו לעיל, סביר להסיק (אם כי איננו פוסקי הלכה) שלגבי כל מספר של זוגות השיטה העדיפה היא כי כל איש מייבם רק אשה אחת. נוסף, שאם מספר הזוגות n הוא מספר אי-זוגי, אזי מדרד השכיח בשיטה זו הוא גם כן אחד. ההסתברות שיתבצע לפחות ייבום אמיתי אחד היא תמיד גדולה מחצי (n זוגי או אי-זוגי) ולכן שוב, לפי כללי "רוב" של חז"ל, יש להעדיף שיטה זו. הסתברות זו שווה בקירוב למספר

$$\frac{e-1}{e} \approx 0.63$$

6. מסקנות

לסיכום, אנו רואים בסוגייתינו דעתם של חז"ל במישור המעשי - סטטיסטי ובמישור הרוחני - פסיכולוגי, שכן קודם כל הם התבססו על הניתוח הסטטיסטי שהבאנו לעיל, המראה שאין שוני בין שני הפתרונות מבחינת הסבירות של קיום מצות ייבום. ייתכן שאילו היתה קיימת העדפה הסתברותית להצעת הגמרא, חז"ל היו אז חייבים להכריע אחרת. ה"תיקו" הסטטיסטי שהוכחנו (שוויון התוחלות) נתן את האפשרות לחז"ל להפעיל את השיקולים הרוחניים - פסיכולוגיים שהבאנו כדי להגיע להכרעה ההלכתית.