

שימוש במשוואות דיפרנציאליות לקביעת הלכה במשנה

חיים הרמן, אבן חוולס, אלכסנדר קליין

ההלכה מזדקקת לעיתים קרובות בכלים מדעיים לשם קביעת הוראות אופרטיביות, וקורה לא אחת בתולדותיה כי בגלל אי-בשלות המדע, הגיעו למסקנות לא מדויקות ואפילו לא נכונות. כמובן, אין בזה סיבה לזלזול בערך ההלכה. ההלכה קובעת עקרונות, ועל חכמי ישראל שבכל הזמנים לקבוע גדרים מעשיים בנידון. להלן דוגמה טיפוסית של בעיה מהסוג הזה.

במסכת מקוואות (פרק ג' משנה ג') אומרת המשנה: "כור שהוא מלא מים שאובין, והאמה נכנסת לו ויוצאה ממנו, לעולם הוא בפסולו, עד שיתחשב שלא נשתיר מן הראשונים שלושה לוגין". מסביר הרב קהתי: "כלומר, עושים חשבון, כמה מים שאובים היו בכור, וכמה מי גשמים נכנסו לתוכו מן האמה, ומשערים שהמים שיצאו כללו חלק מן המים השאובים... ואם לפי חשבון לא נשארו מן המים השאובים שהיו בכור אלא פחות משלושה לוגים, מי הכור כשרים למקוה...".

המשנה מציינת: "עד שיתחשב וכו'". איך עורכים את החישוב? אין אחידות דעות בנושא. נביא שני פירושים "קלאסיים" המובאים בפירושו של הרב קהתי על פי הנאמר בשולחן ערוך (יורה דעה ר"א כ, ועיין ש"ך וט"ז על אתר) ולהציע פירוש מחודש, המתבסס על כלים מתמטיים שלא היו ידועים לראשונים שעסקו בסוגיה הזאת.

הסבר הראב"ד

על פי הנאמר לעיל, המים היוצאים מהכור כוללים בתוכם חלק ממי הכור. באיזה יחס? הראב"ד סובר בפשטות שהוא שווה בשווה, דהיינו שחצי כמות המים היוצאים מהכור מקורם ממי הכור עד כלתם. לכן, אם הכור הכיל בהתחלה a לוגין, כמות b של המים הזורמים שיש להעביר כדי שיישאר פחות מ-3 לוגין צריכה לקיים את התנאי: $b > a - 3$.

למשל, אם הכור הכיל בהתחלה 100 לוגים ($a = 100$), הוא יטוהר אחרי שיעברו יותר מ-97 לוגים של מים חיים.

הסבר של הבית יוסף בשם הראב"ד

ההסבר הנ"ל, שאינו לוקח בחשבון את היחס בין כמויות שני סוגי המים, אינו כל כך מתקבל על הדעת. הרי ברור שאם למשל b עולה על a בצורה ניכרת, בזרם היוצא מהבור כמות המים שאובים תהיה קטנה יותר. לכן ה"בית יוסף" מציע הסבר אחר, המבוסס על ההנחה שבמים היוצאים מהבור, היחס בין הכמויות של שני הסוגים זהה ליחס המקורי בין a ל- b , כך שמתקבל:

— כמות המים הנכנסים לבור: b

— כמות המים היוצאים מהבור: $pb + qa$

כאשר ברור ש- $b = pb + qa$

מצד שני, על פי עקרון זהות היחס שהובהר לעיל, מתקבל:

$$qa/pb = a/b \implies p = q$$

$$\implies p(b + a) = b \implies p = b/(a + b)$$

מזה נובע שכמות המים שאובים היוצאים מהבור היא: $ba/(a + b)$

ולכן, כדי שיטוהר הבור, צריך להתקיים התנאי:

$$a - ab/(a + b) < 3$$

$$\implies \frac{a(a + b) - ab}{a + b} < 3$$

$$\implies a^2 < 3(a + b)$$

$$\implies a^2 - 3a < 3b$$

$$\implies b > a^2/3 - a$$

למשל, אם $a = 100$, אזי נצטרך:

$$b > 10,000/3 - 100 = 3233.33$$

יוצא אפוא שאם הבור הכיל בהתחלה 100 לוגים, הוא יטוהר אחרי שיעברו יותר מ-3233.33 לוגים של מים חיים.

חישוב על ידי משוואה דיפרנציאלית

שני ההסברים הנ"ל אינם לוקחים בחשבון את גורם הזמן אלא מתייחסים לבעיה כאילו כל מי התעלה היו מגיעים לכור בבת אחת. ברם, אנחנו חייבים לערוך את החישוב כאשר לוקחים בחשבון שבכל רגע, היחס בין כמות המים שאובים וכמות המים החיים משתנה. בכל רגע, יש לנו להתייחס להרכב המים בכור. בהתחלה ממש, יש שם מים שאובים בלבד, ואז הזרם היוצא מורכב רק מהם. אחר כך, ככל שנכנסים בו יותר מים חיים, וכתוצאה מכך ככל שיחס המים החיים גבוה יותר, אז יוצאים מהכור פחות מים שאובים.

נסמן: $Q(t)$: כמות המים שאובים בכור ברגע t

S : זרם מי התעלה ליחידת זמן

a : כמות מים שאובים בכור בראשית התהליך

על פי הנאמר לעיל, כמות המים שאובים היוצאים מהכור יחסית לכמות המים שאובים הנמצאים בכור. לכן בזמן t , הזרם היוצא מהכור שווה ל- $S \cdot Q(t)/a$. מזה נובע שכמות המים שאובים בזמן $t+1$ שווה ל-:

$$Q(t+1) = Q(t) - S \cdot Q(t)/a$$

$$\implies Q(t+1) - Q(t) = -S \cdot Q(t)/a$$

ובצורה כללית יותר:

$$Q(t+dt) - Q(t) = -S \cdot dt \cdot Q(t)/a$$

ואז מקבלים את המשוואה הדיפרנציאלית

$$dQ(t)/dt = -S \cdot Q(t)/a \implies dQ(t)/Q(t) = -S \cdot dt$$

$$\implies \ln Q(t) = -St + K$$

$$\implies Q(t) = C \cdot \exp(-St/a)$$

ואז למצוא את C , נציב את הערכים המתאימים לזמן $t = 0$

$$a = Q(0) = C$$

$$\implies Q(t) = a \cdot \exp(-St/a)$$

סך-הכל כמות מי התעלה שעברו בבור עד הזמן t היא כמובן $q = S \cdot t$, לכן מקבלים:

$$Q(t) = a \cdot \exp(-q/a)$$

אם נציב במשוואה הנ"ל את ערכי הרוגמה, נקבל:

$$100 \cdot \exp(-q/100) < 3$$

$$\implies \exp(-q/100) < 0.03$$

$$\implies -q/100 < \ln 0.03$$

$$\implies q > -100 \cdot \ln(0.03) = 350.65$$

יוצא איפוא שאם הבור הכיל בהתחלה 100 לוגים, הוא יטוהר אחרי שיעברו יותר מ-350.65 לוגים של מים חיים.

סיכום

יש לשים לב לדבר אחד: המשנה (והשולחן ערוך בעקבותיה) אינה עורכת שום חישוב, אלא מציגה את העיקרון בלבד: "... עד שיתחשב שלא נשתייר מן הראשונים שלושה לוגין . . .". אין ספק שחכמי המשנה הבחינו בזה שיש כאן תסבוכת מסוימת, אלא שלא יכלו ולכן לא רצו להתמודד אתה, והשאירו לחכמי כל דור את המשימה לפתור את הבעיה באמצעות הכלים המתמטיים העומדים לרשותם.