

# אופן החישוב במשנת "בור שהוא מלא מים שאובין"

אליהו בלר

שנינו במסכת מקוואות ג, ג: "בור שהוא מלא מים שאובין והאמה נכנסת לו ויוצאת ממנו, לעולם הוא בפסולו עד שיתחשב שלא נשתייר מן הראשונים שלשה לוגין". נשאלת השאלה: איך עושים את החישוב? הראב"ד בספרו בעלי נפש מציע שתי דרכים אלטרנטיביות לעריכת החישוב, ודבריו הובאו מלה במלה בבית יוסף, יורה דעה, סימן ריא.

והנה ת' הרמז, א' חזק"א ו' קליין (להלן: הח"ק) תרגמו במאמרם<sup>1</sup>, את דברי הראב"ד לשפת המתימטיקה וטענו שדרך החישוב של הראב"ד "אינו כל-כך מתקבל על הדעת". הח"ק כתבו, שזו דוגמא לתופעה בתולדות ההלכה "כי בגלל אי-בשלות המדע הגיעו למסקנות לא מדוייקות ואפילו לא נכונות". במקומן הציעו המחברים "פירוש חדש המתבסס על כלים מתמטיים שלא היו ידועים לראשונים שעסקו בסוגיה זאת".

במאמר הנוכחי נראה שטעו הח"ק בהבנת דברי הראב"ד. אליבא דאמת, אחת משתי האלטרנטיבות של הראב"ד זהה עם "הפירוש המיוחדש" שלהם, וגם השנייה שונה לגמרי ממה שחשבו. אחרי העמדת הדברים על דיוקם יתברר, שאין מקום להערכתיהם של הח"ק ולמסקנותיהם ההיסטוריות.

## הבנת הח"ק בדברי הראב"ד

בספר בעלי נפש, שער המים<sup>2</sup>, כותב הראב"ד: "המים הצפים ויוצאים משם לא נחשב אותם כולם מן הראשונים ... אלא לפי חשבון המים שהיו בבור והמים היוצאים בתוכו הם יוצאים". ומשיך הראב"ד ומציג את הדרך השנייה: "אי נמי מחצה על מחצה". לפי הח"ק (בעקבות פירוש המשנה של הרב קהתי), בדרך הראשונה של הראב"ד היחס בין הכמות הכוללת של מי האמה שיצאו מן הבור ובין הכמות הכוללת של המים הראשונים (השאובים) שיצאו שווה ליחס בין הכמות הכוללת של מי האמה שנכנסו ובין כמות מי הבור הראשונים. לפי זה יוצא, שאם הבור מכיל  $a$  לוג, צריכים להיכנס מהאמה יותר מ-  $a - a^2/3$  לוג<sup>3</sup> כדי שלא יישארו מן הראשונים שלושה לוגים. למשל: אם  $a$  שווה 100 לוג, צריכים להיכנס יותר מ-  $3,233\frac{1}{3}$  לוג.

את הדרך השנייה, "מחצה על מחצה", מפרשים הח"ק (שוב פעם בעקבות הרב קהתי) ככה: "חצי כמות המים היוצאים מהבור מקורם ממי הבור [הראשונים] עד בלותם". לפי זה, אם הבור מכיל  $a$  לוג, צריכים להיכנס מהאמה יותר מ-  $2a - 6$  לוג; כך שאם  $a = 100$ , צריכים להיכנס יותר מ- 194 לוג.<sup>4</sup>

### הדרך הראשונה של הראב"ד: לפי חשבון

לפי האמת, אין שום בסיס לפירוש הח"ק בדרך הראשונה של הראב"ד, לא על-פי לשון הראב"ד ולא על-פי השכל הישר. ברור שהיחס בין כמות המים הראשונים שאובים ובין מי הגשמים מהאמה משתנה כל רגע ולכן היחס בין סוגי המים היוצאים צריך להשתנות גם הוא בהתאם לכך, ובלשון החזון איש<sup>5</sup> (על דברי הראב"ד): "ואם משערין לפי חשבון ... בכל שעה מתרביץ הכשרים ומתמעטין הפסולים". יתירה מזו: מהמשך דברי הראב"ד ישנה תשובה ניצחת נגד הבנת הח"ק. הראב"ד כותב: "אי נמי מחצה על מחצה מפני שהמים היורדים לבור באחרונה קרובים לצאת יותר מן הראשונים שהיו בבור". במלים אחרות: לפי הדרך של "מחצה על מחצה", המים החדשים יוצאים יותר מהר ממי הבור ולכן כדי שיישארו פחות משלושה לוגים מים שאובים, צריכים להיכנס יותר מים מהאמה ממה שצריכים להיכנס אם היציאה היתה "לפי חשבון". אבל לפי הח"ק הכיוון הפוך: בדוגמא  $a=100$  צריך 194 לפי הדרך של "מחצה על מחצה", ואילו "לפי חשבון" צריך  $3,233\frac{1}{3}$ ; ובאופן כללי הרי  $a^2/3 - a > 2a - 6$ , כאשר  $a > 6$ .

אלא ודאי "לפי חשבון" של הראב"ד לוקה בחשבון את היחס המשתנה כל רגע, כמו שהח"ק עושים ב"פירוש המחודש" שלהם בעזרת משוואה דיפרנציאלית. כמובן, בזמן הראב"ד עוד לא פותח החשבון הדיפרנציאלי, ולכן מסתבר שהראב"ד התכוון לחישוב דיסקרטי עם יחידות מים שהן קטנות ביחס לכמות המים בבור. למשל: אם הבור מכיל 100 לוג, סביר לעבוד עם יחידות של לוג אחד. יהי  $a_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) מספר הלוגים של מים שאובים שנשארו אחרי שנכנסו  $n$  לוגים מהאמה, כך ש-  $a_0 = 100$  (נזכיר לקורא שמאחר שהבור מלא, כמות המים היוצאים שווה לכמות המים הנכנסים), אנחנו מקבלים

$$a_n = a_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{101} = \frac{100}{101} a_{n-1} = \left(\frac{100}{101}\right)^2 a_{n-2} = \dots = \left(\frac{100}{101}\right)^n a_0 = 100 \left(\frac{100}{101}\right)^n.$$

כעת,  $a_{352} > 3$ ,  $a_{353} < 3$ ; ולכן לפי החשבון הדיסקרטי, צריכים להיכנס 353 לוג מהאמה. זה די קרוב לתוצאות המשוואה הדיפרנציאלית של הח"ק<sup>6</sup>, שמצאו כי צריכים יותר מ- 350.65 לוג.

### הדרך השנייה של הראב"ד: מחצה על מחצה

בדוגמא של  $a = 100$ , הכמות של  $+350$  לוג הצריכה להיכנס "לפי חשבון" עדיין גדולה מ- 194 הלוג הצריכים להיכנס לפי "מחצה על מחצה" להבנת הח"ק, וזה עדיין סותר את דברי הראב"ד "מחצה על מחצה מפני שהמים היורדים לבור באחרונה קרובים לצאת ...". באופן כללי, אם הכור מכיל  $a$  לוג, אזי "לפי חשבון" הכמות המדויקת הצריכה להיכנס מהאמה (כדי שיישאר פחות משלושה לוגים מים שאובים) היא יותר מ-  $a \log \frac{a}{3}$ ; והרי  $a \log \frac{a}{3} > 2a - 6$ , כאשר  $a$  גדול מ- 14.77<sup>8</sup>. זאת אומרת: שגם באינטרפרטציית "מחצה על מחצה" טעו הח"ק. את הפירוש האמיתי אפשר ללמוד מהראיה שמביא הראב"ד לשיטת "מחצה על מחצה" בהמשך דבריו: "וכן שנינו בפרק ו (משנה ח), היו בעליון ארבעים סאה ובתחתון אין כלום ממלא בכתף ונותן לעליון עד שירדו לתחתון ארבעים סאה. והא ודאי לאכשורי תרוייהו עליון ותחתון קא בעי. ואי סלקא דעתך דלא נפקי כי הדדי, או האי פסול או האי פסול, שהרי כנתן סאה ונטל סאה דמי, ואמרינן עד רובו (יבמות פ"ב:), אלא שמע מינה דכי הדדי נפקי". עכ"ל הראב"ד.

כדי להבין את דברי הראב"ד, נשים לב כי מה שממלא בכתף הם מים שאובים, ורוב של מים שאובים פוסלים את המקווה במקרה של "נתן סאה ונטל סאה". הראב"ד סובר שהמקרה של פרק ו, משנה ח, דומה ל"נתן סאה ונטל סאה", כי המקווה העליון מלא ארבעים סאה מים כשרים וכאשר שופכים לתוכו מים שאובים, אותה כמות של מים יוצאת ויורדת למקווה התחתון (שהתחיל ריק). לכן כדי ששני המקוואות יהיו כשרים אחרי שפיכת ארבעים סאה למקווה העליון, צריכות להיות בדיוק חצי כמות מים כשרים וחצי כמות מים שאובים הן במקווה העליון הן בתחתון.

ובכן, כוונת הראב"ד ב"מחצה על מחצה" היא שאם מתחילים בכור מלא מים ונכנסו לכור מים חדשים באותה כמות של מי הכור, אזי המים היוצאים מן הכור הם בדיוק חצי המים הראשונים וחצי

המים החדשים. לכן (בחזרה למשנתנו) אם היה בור מלא 100 לוג מים שאובים ונכנסו מהאמה 100 לוג, אזי 100 הלוג היוצאים מכילים 50 לוג שאובים, ונשארו בכור 50 לוג שאובים. כעת, כאשר נכנסים עוד 100 לוג מהאמה, שוב יוצאים 50 לוג ממי הכור. אלא שבשלב זה הכור הכיל חצי מים כשרים וחצי שאובים ולכן יצאו רק 25 לוג שאובים (אמנם, לפי שיטת "מחצה על מחצה", המים הזורמים מהאמה קרובים לצאת יותר ממי הכור, אבל מה שנוגע לשני סוגי המים בכור עצמו, מסתבר שיוצאים לפי חשבון). באופן דומה, אחרי שייכנסו 100 לוג פעם שלישית, יישארו  $12\frac{1}{2}$  לוג שאובים, ובפעם רביעית –  $6\frac{1}{4}$  לוגים. לכן אחרי שייכנסו סך הכול 500 לוג מהאמה, יישארו  $3\frac{1}{8}$  לוגים מים שאובים בכור. יוצא מזה, שלפי שיטת "מחצה על מחצה", צריכים מעט יותר מ-500 לוג מהאמה כדי שיישארו פחות משלושה לוגים מים שאובים – לפי חשבון מדויק<sup>9</sup> 505.89 לוג, וזה יותר מ-350.65 הלוג הצריכים על-פי שיטת "לפי חשבון". באופן כללי, אם הכור מכיל  $a$  לוג, אזי לפי שיטת "מחצה על מחצה" צריכים יותר מ- $\frac{a \log \frac{a}{3}}{\log 2}$  לוג; ואילו "לפי חשבון" צריכים רק יותר מ- $a \log \frac{a}{3}$  לוג, ובזה נתקיימו דברי הראב"ד "שהמים היוורדים לכור באחרונה קרובים לצאת יותר מן הראשונים שהיו בכור".

## הערות

1. ח' הרמן, א' חוולס ו א' קליין, "שימוש במשוואות דיפרנציאליות לקביעת הלכה במשנה", הגיון, ד (תשנ"ז).
2. מהדורת אשכול, עמ' קיה; מהדורת הרב בוקוולד, עמ' קנב.
3. עיין פרטי החישוב במאמרם של הח"ק.
4. מה שכתוב במאמר הח"ק "3-a", ו-"97" הוא פליטת קולמוס.
5. מקוואות תניינא סימן ה, אות ד.
6. יש להעיר, שגם בשימוש במשוואה הדיפרנציאלית כדי לעשות את החישוב של משנתנו כבר הקדימם הרב אליהו שולמן בספרו בנין אב, ניו יורק תשמ"ה, סימן מד. הרב שולמן קיבל בדיוק אותה משוואה שקיבלו הח"ק (אני מודה לד"ר משה קופל שהעיר את תשומת-לבי לספרו של הרב שולמן). עיין גם בספרו של הרב מאיר ליטמן, M. Littman, *Approaching Infinity*, 2nd ed., New York 1990, pp. 223-229.
7. כך יוצא מהמשוואה הדיפרנציאלית של הח"ק. במאמר הנוכחי "log" מסמן את הלוגריתם הטבעי לפי הבסיס e.
8. כמובן, אי-אפשר להגיד שהראב"ד עסק רק במקרה שהכור מכיל פחות מהכמות הקטנה של 14.77 לוג, כי סתם "בור" מכיל הרבה יותר מזה.
9. דהיינו:  $100/2^n < 3 < 5.0589 < n < 505.89 < 100n$ .