

מפקדי בני ישראל במדבר

עלי מרצבך

[א]

בכמה מקומות בתורה מוזכר עניין מפקד האוכלוסין בבני ישראל. במאמר זה רצוני לעסוק בעובדה שכמעט כל המספרים המופיעים במפקדים נראים כמספרים עגולים, כלומר: בלא יחידות ואפילו לרוב בלא עשרות. מובן שאפשר תמיד להסביר את התופעה הזאת כנס או כתופעה אקראית בלא הסבר כלל (כך ניסו אחדים לפרש). אולם פירושים מסוג זה כבר נדחו על-ידי גדולי המפרשים בטיעון הפשוט, שאין נס בלא משמעות או בלא תועלת.

שאלה נוספת המתעוררת כאשר מתבוננים בכל המפקדים המוזכרים בספר במדבר היא, מדוע התורה צריכה למסור גם את הסכומים לגבי השבטים ולגבי הדגלים? בספר במדבר מופיעים תשעה סכומים. אכן, כל סכום וסכום הוא מדויק, אבל לא ברור מה התורה רצתה לחדש לנו במסירת סכומים אלו.

בעניין זה הרמב"ן כותב (במדבר א, מה): "הוצרך הכתוב להגיד מספר הכלל לאחר שהגיד הפרטים כי נצטווה משה ואהרן שידעו מספר מפקד העם וידעו מספר כל שבט כי כן דרך המלכים במנותם את העם. ולא הבינותי טעם המצוה הזאת למה צוה בה הקב"ה... אבל ידיעת המספר לא ידעתי למה צוה שידעו אותו..."

והנה המספרים והסכומים הנקובים בתורה בעניין המפקדים:

מקור בתורה	במדבר א	במדבר ב	במדבר כו (ערכות מואב)
שבטים			
ראובן	46,500	151,450	43,730
שמעון	59,300		22,200
גד	45,650		40,500

76,500	186,400	{	74,600	יהודה
64,300			54,400	יששכר
60,500			57,400	זבולון
32,500	108,100	{	40,500	אפרים
52,700			32,200	מנשה
45,600			35,400	בנימין
64,400	157,600	{	62,700	דן
53,400			41,500	אשר
45,400			53,400	נפתלי
601,730	603,550		603,550	סה"כ

פקודי הלויים

במדבר ד (מבן שלושים ...)	במדבר ג (מבן חודש ומעלה)	
2,630	7,500	גרשון
2,750	8,600	קהת
3,200	6,200	מרדי
8,580	22,300	סה"כ בני לוי

אלו כל המספרים של מפקדי אוכלוסין הכתובים בתורה (פרט למניין הבכורות, שמספרו קטן מאוד ביחס למספרים האלו, והיה פרטני בגלל הפדיון של כל בכור בנפרד).

לא מצאתי בספרות הראשונים התייחסות ישירה לשתי הבעיות שהזכרתי (עיגול מספרים ותועלת הסכומים). אולם בספרות האחרונים ישנם המתלבטים בשאלות אלו, ואסקור בקצרה מה שהעליתי בחכתי*.

* רצוני להודות לא' ונגרובר וכן לספרן המכללה לבנות, מר א' גולדשמיט, על הסיוע שהושיטו לי בחיפוש המקורות.

[כ]

החת"ם סופר בספרו תורת משה, בתחילת פרשת חיי שרה, כותב:

כל ב' עשרה נעשה אחדות בקדושה... ואין ממנים ממונה אלא שרי עשרות, שרי חמישים ומאות ולא בפחות... ובמספר בני ישראל לא תמצא כי אם אלפים ומאות וגם במטה גד תמצא חמישים אבל אחדים כלל לא בשום מקום.

ובהמשך בפרשת במדבר:

מונה כל שבט ושבט בפני עצמו ואח"כ דרך כלל כל הפקודים, י"ל עפ"י דברי הרא"ש דמקש' הלא אנו מונין מ"ט ימי עומר והקרא אמר תמישים יום ומתרחץ דכל היכא דתסר אחד להמנין השלם מונה מנין שלם ואינו מקפיד על אחד לחסרו ממנין כמו כל הנפש הבאה לבית יעקב שבעים ובפרט אי אתה מוצא אלא ס"ט לפי זה ממספר כל שבט ושבט לבדו אינם יודעים כמה הם דיכול להיות חסר מכמה שבטים אחד לכל שבט לכך מונה כללם ונדע מנינם ואז אי חסר לא חסר אלא אחד.

הרב מאיר שמחה הכהן מדווינסק, בספרו משך חכמה, עוסק בבעיה הראשונה, וזה לשונו (במדבר ג, טז):

יתכן, דכתיב במספר ישראל (א, ג) "מבן עשרים שנה ומעלה כל יוצא צבא בישראל תפקדו אותם לצבאותם", דלא נמנו רק עשירות לא אחדים. לכן בכל המספר לא נזכר אחדים, והוא כי כל ראש מבני ישראל נתן מספר אנשיו, והיו שרי עשרות. ומכל מספר הקטן עשו מספר הכולל, ופחות מעשרה לא היה ראש עליהם בלבד. לכן כתיב "לצבאותם", שאין מחנה פחותה מעשרה, כמבואר ירושלמי סוף פרק קמא דעירובין. ובמספר הלויים מבן חודש ומעלה שמשה נכנס אל פתח האהל ובת קול יוצאת ואומרת "כך וכך תינוקות", לא נמנו גם כן אחדים, "וכאשר צווה" - במספר ישראל. מה שאין כן במנין הבכורים נזכרו אחדים.

כלומר: לפי פירוש זה, היחידה הקטנה ביותר היתה של עשרה (שרי עשרות) ולכן נמנו רק עד לעשרה במספר עגול ("מספר כולל"). במלים אחרות: כל מספר עוגל כלפי מטה.

פירוש זה נותן רק הסבר חלקי לבעיה שלנו. ואמנם, כמעט כל המספרים מעוגלים במאות ולא בעשרות.

ואכן, הרב אהרן דוד גולדברג דן גם בכך, וזה לשונו בספרו שירת דוד, כתחילת ספר במדבר:

הנה מספר כל השבטים נשלם בעשירות שלמות, ככולם במאות ובשבת ג' בחמשים, וכאמת זה דבר פלא שלא נגמר מנין אחד מהם "ביחידים". ואפשר שהיה בגס שכל שבת יהיה בדיוק בתשבון זה.

וראיתי בספר שערי אהרן [פסוק כא] שהביא בשם האמרי נועם שתמה בזה, וכתב שאין הכתוב מקפיד בדבר מועט כמש"כ תספרו חמשים יום ואינם אלא מ"ט, וכן ארבעים יום ואינם אלא ל"ט עיי"ש.

וגראה שאם נפרש כן, בהכרח הכוונה היא שהתורה השלימה כל מנין ל"המאה" הכי קרובה, אבל אין לפרש שהשלימה המנין ל"העשר" הקרוב, דאם כן אכתי תקשי דלא מסתבר ששום שבת לא נגמר מנינו בעשר חוץ משבת ג'. ואף שחזו"ן במספר של הלויים להלן בפ' נשא [ד', לד ו-ד, מ] שבני קהת ובני גרשון השלימו מנינם בעשר. ע"כ צריך לומר דכאן שהיה מספר גדול של כמה אלפים השלימה התורה המספר למאה הכי קרובה. אבל במנין הלויים מבין שלשים עד חמשים השלימה התורה המנין לעשר הקרוב.

ושבת ג' שלא נשלם מנינו למאה, צ"ל שהוא מפני שנשלם באמת בחמשים בדיוק, ולא היה אפשר להשלימו לא לפניו ולא לאחוריו דהי מיניהו מפקת. ולכן כתבה התורה בשבת ג' מספר חמשים [ועיין במשך חכמה להלן ג, טז שכתב גם כן שהיו אחדים שלא גמנו, אבל מדבריו מבואר שסובר שלא נמנו כלל עיי"ש מש"כ].

אכן לדברי רש"י בפ' כי תשא [ל, טז] שכתב שהמנין כאן שווה להמנין שהתחיל בגדבת המשכן מפני שהיה בשנה אחת ולא מת אחד מהם קשה לומר כנ"ל שמנינם אינו מדוייק, שהרי מפורש בפ' פקודי [לת, כה-כו] חשבון השקלים ולא מסתבר ששם לא חשבה התורה היחידים [ועיין מש"כ להלן פ' פינחס כו, ז].

ובמפקד השני, בפרק כו, מובא באותו ספר:

הנה לעיל בפ' במדבר [א, כה] הבאנו בשם אמרי נועם שהטעם שלא הזכיר שם "יחידים" ועשירות" במנין, וכל השבטים נגמרו מנינם במאות חוץ משבת ג', הוא מפני שאין הכתוב מקפיד בדבר מועט. וכיארנו שם דבהכרח הכוונה היא שהשלימה התורה המנין למאה הכי

קרובה, דאין לפרש שהשלימה ל"העשר" הקרוב, דאם כן אכתי תקשי ולא מסתבר ששום שבט לא נגמר מנינו בעשר חוץ משבט גד. ומה ששבט גד לא נשלם למאה הוא מפני שנשלם החמשים בדיק ולא היה אפשר לקרב למאה דהאי מיניהו מפקת עיי"ש.

וצ"ע, דבמנין כאן מבואר שכולם נשלמו "במאה" חוץ מראובן שנשלם "בשלושים". ובהכרח שבמנין כאן לא השלימה התורה ל"מאה" הכי קרוב. ואם כן לפלא הוא שכולם נשלמו "במאה" חוץ מאחד, וצ"ע.

לשאלה זו מצאתי תשובה (לפחות חלקית) בספר אמת ליעקב, שנכתב על-ידי הרב יעקב קמנצקי:

לפענ"ד היה המנין על-ידי שרי חמשים, שכן מצינו ביתרו שחלק את השרים לשרי עשרות, שרי חמשים, שרי מאות, ושרי אלפים, וכפי הנראה שהצבא היה מתחלק לשרי החמשים. וכדמצינו בתחלת מלכים ב [א, ט-י] שהיו שרי חמשים וחמשיהם. ועל ידי אלו השרים מנו את ישראל, ולפיכך היו מאות שלמות או חמשים. אלא שקשה לפ"ז מלהלן בפרשת פנחס [כו, ז] ששם הגיע שבטו של ראובן למ"ג אלף ושבע מאות ושלושים. וכן הוא במנין השלם, ואפשר ששם נכו הבלועים בעדת קרח מאת החמשים והיו עשרים איש ונשארו שלשים, ומדוקדק בזה שם לשון הקראות, ואעפ"כ צ"ע.

ורעיון זה מתבהר יותר בפירושו על המפקד השני:

כו, ח: ובני פלוא אליאב וג' ויהיו לנס ובני קרח לא מתו.

לכאורה אין בפסוקים אלו שייכות למנין הפקודים, והנראה לי, דמאמת יש להפליא, שבכל המנינים היה מספר של מאות ועשיריות לכל היותר. והוא שבכל המנינים היה מאות שלמות ופעם א' היה חמישים, וכאן היה מספר בני ראובן שלשה וארבעים אלף ושבע מאות ושלושים. לפיכך עלה בדעתי לומר דבר חידוש, אלא שיראתי [לאומר] עד שמצאתי כעין זה בספר "בעל אור שמח" והנאני מאד ולפיכך לא נמנעתי מלציין בכתב, והיינו דמצינו [שמות יח, כא] שיתרו הציץ למשה רבינו שימנה שרי אלפים שרי מאות שרי חמישים ושרי עשרות, וכן באמת עשה... והנ"ל שבעניני קדושה היו שרי אלפים ושרי מאות ושרי עשרות, ובעניני מלחמה היו שרי אלפים ושרי חמשים...

ולבי אומר לי בפירוש הכתוב ביהושע [א, יד]: ואתם תעברו חמשים לפני אחיכם כל גבורי החיל, היינו שיעברו תחת מפקד מלחמתי, וכמו כן מה שכתוב בפרשת בשלח [יג, יח]: וחמשים עלו בני ישראל מארץ מצרים, ופירש"י דהיינו מזויינים. כלומר בסדר צבאי, שכל א' מהפלוגות היו בנות חמשים אנשי צבא...

ולפ"ז נראה לי שבמנין הפקודים שמנו כל יוצאי צבא עשו פלוגות בנות חמשים, ואם נשאר בשבט א' מספר שלא הגיע לחמשים הוסיפו על הפלוגות והיו בנות נ"א. אם נשאר מ"ה נטלו מד' פלוגות הא' ונעשה פלוגה בת מ"ט אנשים, ואח"כ ספרו הפלוגות וחשבו כל פלוגה לחמשים איש. ולפיכך יצא החשבון למאה שוה או לחמשים. אלא שכאן בפעם הראשונה עלה המספר לשבע מאות ושלישים. ולזה מתנצל הכתוב כי במשפחות אלו היה משפחת הפלאי, ובהיות שבני פלוא אליאב, ובבני אליאב נמצאים דתן ואבירם שחצו בעדת קרח, השאירו לנס פלוגה אחת בת שלשים שיהיו לזכרון. ומה שלא נשאר כן בתוך הלויים - ששם נמנו כל פלוגה בת עשרה, היינו משום שבני קרח לא היו במעל הזה.

יש להקשות עוד, שגם במניינים אחרים בתורה המספרים הם מעוגלים? נזכיר, למשל, את מניין ההרוגים במגיפה בשיטים שהסתכם ב-24,000; או מניין הבקר, הצאן והחמורים כשלל מדיין (במדבר לא), המסתכם גם כן במספרים עגולים. לכן נסיון החירוף שעניינו יחידות צבאיות אינו מתאים לסוג המספרים שהזכרתי כאן.

[ג]

נראה לי, שאפשר לענות על שתי השאלות יחד בהסתמך על הכללים הבאים המתייחסים למספרים די גדולים (בוודאי נכון עבור מספרים גדולים מ-5,000).

א. כאשר המספר שהתקבל היה בעשרות שלמות (בלא יחידות), או התורה כחבה אותו כמות שהוא ולא עיגלה אותו.

ב. כאשר המספר שהתקבל לא היה בעשרות שלמות, או התורה עיגלה אותו למספר המאות הקרוב ביותר.

לכללים אלו סברה פשוטה: אם כבר מעגלים מספר המסתיים ביחידות, אז מעגלים אותו למאות (עם טעות קטנה ממאית). אבל אם המספר מסתיים בעשרות, משאירים אותו כמות שהוא.

יש להעיר, שהרעיון הפשוט כל-כך והמוכן לנו של עיגול המספר למספר המאות הקרוב ביותר היה זר לחלוטין למדע עד סוף ימי-הביניים. אוטו נויגבואר (O. Neugebauer), במאמר "The Astronomy of Maimonides and Its Source", *HUCA*, 22 (1949), p. 340, מעיר שגם אצל האסטרונומים הקדומים, שהיו מומחים בחישובים מסובכים והשתמשו תדיר בקירובים של מספרים, לא היה מקובל לעגל למספר השלם הקרוב ביותר. בדרך-כלל הקירוב היה כלפי מטה, אלא-אם-כן המספר היה מאוד קרוב למספר הגדול ביותר (למשל: מעל 0.75). נויגבואר מדגיש, שהרמב"ם בחשבונות האסטרונומיים שלו לקביעת המולד משתמש בעיגול המספר כלפי המספר הקרוב ביותר, וזה חידוש גדול ביחס לקודמיו, כמו פטולמי או אפילו אל-בתני.

בחזרה למפקדי התורה. כאמור: המספרים עוגלו למספר הקרוב בהתאם לשני הכללים שהזכרתי. אם נעיין בנתוני התורה, הדבר בולט באופן ברור לחלוטין. בכל אחד משני מפקדי בני ישראל במדבר, מתוך 12 נתונים, 11 מהם כפולות של מאות; ואילו אחד (במפקד הראשון מדובר על שבט גד ובמפקד השני-על שבט ראובן) הוא כפולה של עשרות. ההסתברות שמספר כלשהו מסתיים באפס, אבל אינו כפולה של מאה, שווה ל- $\frac{9}{100}$; ולכן אם בוחרים 12 מספרים כלשהם, תוחלת מספר ההופעות של מספרים בעלי תכונה זו שווה ל- $12 \cdot \frac{9}{100} = 1.08$. במלים אחרות: בממוצע, מתוך 12 מספרים, אחד מהם יהיה כפולה של עשרות (ולא כפולה של מאות).

יתירה מזו: אם נחשב את ההסתברויות השונות (לפי התפלגות בינומית), מתברר שההסתברות הגדולה ביותר מתקבלת שוב כאשר יש בדיוק מספר אחד מהצורה הזאת מתוך 12 מספרים. הסתברות זו שווה ל- $\frac{9}{100} \cdot \left(1 - \frac{9}{100}\right)^{11}$; וכל ההסתברויות האחרות: $\binom{12}{k} \left(1 - \frac{9}{100}\right)^{12-k} \left(\frac{9}{100}\right)^k$. כאשר $k \neq 1$ הן קטנות יותר.

גם אם נתבונן בשני המפקדים יחד, מתקבלות אותן תוצאות: מתוך 24 נתונים, ממוצע מספר ההופעות עם התכונה המבוקשת קרוב לשניים, וההסתברות המרבית $\binom{24}{k} \left(1 - \frac{9}{100}\right)^{24-k} \left(\frac{9}{100}\right)^k$ מתקבלת כאשר $k = 2$. ואכן כך קרה.

לגבי מפקדי משפחות הלויים תוצאות דומות יכולות להתקבל, אבל כאשר יש מספר קטן של נתונים (ישנן רק שלוש משפחות) אי-אפשר לכצע שום מבחן סטטיסטי.

אם נרצה, אפשר להכליל את הכללים שהזכרתי כאופן זה: כל מספר בעל n ספרות (כאשר n גדול מ-3) המסתיים ב-4 n אפסים (או יותר), אינו מתעגל. אם המספר אינו מסתיים ב-4 n אפסים, אזי מעגלים אותו למספר הקרוב ביותר המסתיים ב-3 n אפסים.

הכללים שנקטנו מאפשרים לנו לענות על שאלת הסכומים. עתה מובן היטב מדוע התורה היתה צריכה לכתוב את הסכומים של בני ישראל בשני המפקדים, של הדגלים והמפקדים השונים של הלויים. ואמנם, מכיוון שכל המספרים מעוגלים, היה יכול להיווצר מצב שהסכום הכללי המתקבל יהיה רחוק מאוד ממספר המפקד האמיתי. באופן תיאורטי, לגבי מפקד בני ישראל הסטייה יכולה להגיע ל-588 נפשות. אכן, אם, למשל, מספר הפקודים לגבי כל שבט מסתיים במספר 49, או-אז מעגלים למספר המאות הקטן כך שאחרי סיכום כל השבטים מתקבל מספר קטן ב-588 (ולמעשה 600 אחרי עיגול) ממניין הפקודים האמיתי. מובן שדוגמא זו קיצונית מאוד ובאופן מעשי ישנו משפט מחימטי האומר שככל שמסכמים יותר מספרים, הסטיות הנובעות מהקירובים למספרים הקרובים ביותר נוטות להתקזז יחד. למעשה, זה בדיוק מה שקרה לגבי מפקדי בני ישראל. כל הסטיות (כלפי מעלה וכלפי מטה) התקזזו כך שהסכום התאים למניין הפקודים (כמובן עד כדי חמישים יותר או פחות). לגבי העשרות המופיעות בסיכום השני (601,730) יש לומר, שהתורה הוסיפה את השלושים הנוספים של שבט ראובן כדי לא לגרוע מהם כלום. מלבד זאת, הסטיות האחרות התקזזו כמו שהסברתי לעיל ולכן היה חשוב מאוד לתורה למסוד את כל חשבונות הסכומים.

לגבי בעיית גידול אוכלוסיית בני ישראל במדבר ראו את המאמרים הבאים:

1. A.I. Namenson, "Statistical Tests of the Census in the Book of Numbers", *Intercom*, 24

(1994), pp. 17-24

2. א' בלר, "בעיית הבכורות", הגיון, ב (תשנ"ג), עמ' 103-117.