

משה זכאי וברוך פישר

על פילוג צאצאים באוכלוסייה במהלך הדורות

אנו מנתחים את התפלגות הצאצאים (בנים ובנות) של איש או אישה במהלך הדורות. התוצאה היא ביטוי שנותן את המעבר מדור לדור של מספר הצאצאים בשושלת ואת מספרם היחסי בכלל האוכלוסייה (קהילה, עם וכו'), החל מראש בית אב כלשהו בדור כלשהו שייקרא הדור הראשון. אנו מוצאים שתוך מספר דורות מסוים כל אחד מבני הדור המאוחר הוא צאצא של "כמעט" כל אדם מהדור הראשון. לדוגמה, עבור אוכלוסייה של מיליון גברים ונשים בדור הראשון התהליך הזה קורה תוך כ-24 דורות ועבור אוכלוסייה של מיליארד – תוך כ-34 דורות. נמצא שהתוצאות הללו אינן תלויות בקצב גדול האוכלוסייה מדור לדור אלא רק בגודל האוכלוסייה בדור הראשון. כמו כן אנו מנתחים ומוצאים את הסיכוי להיעלמותה של שושלת במהלך הדורות. דוגמה מיוחדת שנביא היא פילוג הצאצאים של דוד המלך בתוך האוכלוסייה היהודית. התוצאה היא שלמעשה כל אחד מבני ישראל היה בודאות רבה כבר בתקופת הבית השני, וכמובן היום, צאצא של דוד המלך. נעיר כי עבודה זו לא זנה בהיבטים גנטיים או סוציולוגיים-תרבותיים.

א. מבוא

התפלגות צאצאים שמבחינה בין בנים לבנות נחקרה בעבר ונקראת תהליך Galton-Watson (להלן GW).¹ הנושא עלה באנגליה במחצית השנייה של המאה ה-19 כגלל שאלה שעלתה לגבי שרירות שמות משפחה של בני אצולה שעוברים רק דרך בנים. היו שמות של שושלות שהאריכו ימים ודורות והיו כאלה שנכחדו, והמודל האנליטי ניתח והסביר זאת. חיפוש כגולל יצביע על מספר רב של מאמרים בנושא זה. בעולם היהודי יש דוגמאות קלאסיות לשושלות, כמו הכוהנים צאצאי אהרן והלוויים, שההשתייכות אליהן עוברת דרך בנים בלבד. המקרים הללו קשורים למודל GW שאליו נתייחס בהמשך בהקשר של שרירות משפחות. לעומת זאת, ספרות מקצועית שבה אין הבחנה בין בנים לבנות בהשתייכות לשושלות היא מעטה; אך במסורות של משפחות יהודיות מסוימות יש דוגמה שכיחה של ייחוס לדוד המלך אשר מאפשר עצי משפחה שכוללים בנים וגם בנות. לכן נשתמש בדוגמה זו של צאצאי דוד עבור הצגת התוצאות של העבודה

* אנו מודים לכותב הביקורת על המאמר על הערותיו המועילות.

1 F. Galton & H.W. Watson, "On the Probability of Extinction of Families", *Journal of the Anthropological Inst.* 4, 138-144, (1874); S. Karlin & H.H. Taylor, *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York, 1975

הנוכחית. אילו הגבלנו את אוכלוסיית הצאצאים בשושלת דוד לבנים בלבד, ההתפלגות הייתה שייכת למודל GW. נציין רק שאיננו נכנסים כאן לצדדי ההלכה היהודית לגבי המשמעות של בנים או בנות בהשתייכות לשושלת בית דוד או לכל שושלת אחרת.

הניתוח המתמטי במאמר הנוכחי נותן הערכה למספר הצאצאים הכולל של איש או אישה במהלך הדורות ולחלקם היחסי באוכלוסייה הרלוונטית. מתברר שתוך מספר דורות לא רב, שתלוי בגודל ההתחלתי של האוכלוסייה כפי שיתקבל בהמשך, יהיה כל אחד צאצא של "כמעט" כל אחד מבני הדור הראשון. בדוגמה המעניינת של בית דוד נוכל להסיק שכל אחד מבני ישראל היה בוודאות רבה כבר בתקופת הבית השני (ובוודאי היום) צאצא של רוד המלך. דוד חי בסביבות 1000 לפנה"ס, וכפי שנראה להלן, על פי הנאמר בתנ"ך, ניתן להעריך את גודל האוכלוסייה של ישראל בתקופתו בארבעה-חמישה מיליון. הזמן לפריסת צאצאים מלאה עבור גודל אוכלוסייה כזה הוא כ-26 דורות (כ-650 שנים אם נניח שכל דוד הוא בן 25 שנים). מניתוח זה יוצא שבמקרה של שושלת דוד, כמו בכל דוגמה אחרת, נוכל לומר היום שאם יש בתוכנו צאצא דוד אחד אז כולנו צאצאי דוד; ולחילופין, או שכולנו ללא יוצא מהכלל צאצאי דוד המלך או אף לא אחד מאתנו הוא צאצא שלו. מכיוון שמשפחתו של דוד הייתה ענפה בדורות הראשונים והיא שרדה לדורות, ניתן לומר שלמעשה כולנו היום צאצאיו. כאמור, ייחוס כזה תקף לא רק לדוד אלא גם לרוב בני דוד (או בני דוד אחר בתקופות קדומות) פרט למספר קטן של בני אותם דורות שמשפחותיהם נכחדו בדורות הראשונים. נסביר ונציג בהמשך המאמר את ההערכה הכמותית למספר זה. נוסף כי ברור שייחוס כזה תקף למשל גם לגבי רש"י, שמסורות משפחתיות מציינות את ייחוסן אליו דרך שלוש בנותיו, ועל פי המסורת היה צאצא דוד. רש"י חי במאה ה-11 (1040-1105) וחלפו מתקופתו כ-40 דורות.

נעיר כי ניתן למצוא בספרות הערכות טובות על מספר הצאצאים שכולל בגים ובנות, וזאת ללא טיפול מתמטי מדויק. באחת מהעבודות שנעשתה בתקופה האחרונה² ואליה נתייחס בהמשך המאמר, מוצג ניתוח מתמטי מפורט אך שונה מהניתוח בעבודה הנוכחית, בכך שהוא נעשה במהלך לאחור של הדורות, ולכן עוסק בהתפלגות של הורים. נדון בהבדלים בהמשך המאמר.

תיאור העבודה ומהלכה

נעקוב אחר הצאצאים של אדם כלשהו (רוד המלך כדוגמה) שהוא מייסר שושלת בדור $n=0$. הגודל של האוכלוסייה שאליה נתייחס (קהילה, עם) הוא N_0 בדור הראשון ו- N_n בדור n . קצב הגידול הממוצע של האוכלוסייה יסומן ב- g ; דהיינו, יש ממוצע של $2g$ ילדים לכל זוג. לכן האוכלוסייה בכל דור תינתן על ידי $N_n = N_0 \cdot g^n$. בכל מהלך העבודה נניח ש- $N_0 \gg 1$.

2 B. Derrida, S.C. Manrubia, & D.H. Zanette, "Statistical Properties of Genealogical Trees", *Phys. Rev. Lett.* 82, 1987 (1999); B. Derrida, S.C. Manrubia, & D.H. Zanette, "On the Genealogy of a Population of Biparental Individuals", *J. Theor. Biol.* 203, 303 (2000); and arXiv:physics/0003016vi); <http://arxiv.org/abs/physics/0003016>

1- $N_0 \cdot g^t \gg 1$. נעיר שהתוצאות העיקריות שנקבל יהיו בלתי תלויות ב- g , גם אם קצב הגידול משתנה מדור לדור. כן נציין כי בדרך כלל $g > 1$, אך כפי שנראה בהמשך לגבי שרידות משפחות נצטרך לפחות $g > 1/2$. כמו כן נניח לאורך כל העבודה כי מספר הגברים שווה למספר הנשים. בנוסף, אף שמעשית הילודה במשפחות נפרסת על פני שנים, החלוקה החדה במודל של דורות מוגדרים מתארת היטב את הגידול באוכלוסייה רחבה.

בהתייחס לדוגמה של דור המלך נציין את הנתונים הבאים: דוד חי לפני כ-3000 שנה (1040-970 לפנה"ס). אם נניח שדוד אחד הוא 25 שנים (הערכת זמן ממוצע מלידה ועד הולדת ילדים), אזי עברו מתקופתו כ-120 דורות. ההערכה למספר בני ישראל בתקופתו יכולה להתקבל מספר שמואל ב (כד, ט), שם נאמר: "ויתן יואב את מספר מפקד העם אל המלך; ותהי ישראל שמנה מאות אלף איש-חיל שלף חרב, ואיש יהודה, חמש-מאות אלף איש"³. אם נעריך את המספר הכולל של האוכלוסייה ככזה שגריל בערך פי 3 ממספר יוצאי הצבא הגברים, נגיע לארבעה-חמישה מיליון. בהמשך נשתמש ב- $N_0 = 5 \cdot 10^6$.

באמור, מטרתנו העיקרית היא להעריך את מספר הצאצאים ביחס לכלל האוכלוסייה שעבורה נקבל ביטוי מתמטי רגורסיבי. יש גם צד נוסף שנרון בו בהמשך. זו האפשרות של היכחדות שושלת משפחתית באחד מהדורות הראשונים. באופן כללי היכחדות אפשרית לאחוז מסוים של משפחות (בדרך כלל אחוז לא גדול, שאותו נעריך בהמשך), במיוחד בדורות הראשונים כאשר מספר הצאצאים עדיין קטן. (לגבי הדוגמה של בית דוד ובניו אפשרות ההיכחדות בדורות הראשונים, ומכאן לאורך כל הדורות, נופלת).

במאמר יש צד כללי שקשור לתובנה הפשוטה בעיקרה בדבר פריסת צאצאים ובתוצאותיה יש עניין בהקשר של בית דוד ומסורות שקשורות בו. הצד השני הוא מעט יותר מתמטי ודורש ידע מסוים בתורת ההסתברות. נסקור את מהלך הפרקים. בפרק הבא, פרק ב, ננתח בכלים פשוטים את הגידול במספר הצאצאים בני השושלת מרור לדור. התוצאה היא ביטוי מתמטי פשוט, אך נחוץ להוכיח עבורו היבט שקשור למיצועים סטטיסטיים. זה ייעשה על פי ניתוח מתמטי של מהלך אקראי. פרק ג מביא דוגמאות גרפיות להתפתחות הגידול במספר הצאצאים ביחס לכלל האוכלוסייה. ניתן לראות את הגידול החד לפריסת צאצאים מלאה תוך מספר דורות לא גדול. פרק ד מביא את הצד של משפחות שורדות או נכחדות בתוספת הערכות מספריות. בפרק ה נרון בשתי דרכים לניתוח סטטיסטי של הורים וצאצאים. במאמר אנו מתקדמים בציר הזמן מהורים לצאצאים, אך בעבודות רבות הכיוון הוא הפוך, מצאצאים להורים, עם היתרונות והחסרונות של כל אחת מהשיטות. בפרק ו נביא סיכום.⁴

3 בדברי הימים א כא, ח מספר שונה אך במעט: "ויתן יואב את מספר מפקד העם, אל-דוד; ויהי כל ישראל אלף אלפים ומאה אלף איש, שולף חרב, ויהודה, ארבע מאות ושבעים אלף איש שולף חרב".

4 ראו פירוט נוסף במאמרו: B. Fischer & M. Zakai, "The Distribution Route from Ancestors to descendants"; arXiv:0904.4792: <http://arxiv.org/abs/0904.4792>

ב. המעבר במספר הצאצאים מדור n לדור $n+1$

נסמן ב- \tilde{D}_n את מספר צאצאי השושלת (למשל בית דוד) ברור n , כאשר בכל דור מספר הגנורים הצאצאים שווה למספר הגנורים הצאצאיות. נבחר באקראי ובאופן בלתי תלוי אישה אחת ברור זה שנישאת לגבר אחד מאותו דור שנבחר גם הוא באקראי. ההסתברות שהגבר שנבחר הוא צאצא של אותה שושלת היא \tilde{D}_n / N_n ואותה תוצאה עבור האישה, לכל זוג אנו מניחים $2g$ צאצאים. (מכאן והלאה המינוח "צאצאים" יבטא השתייכות לאותו בית אב או שושלת, כדוגמת בית דוד).
לכן:

1. אם הגבר וגם האישה הם צאצאים, $2g$ ילדיהם יגדילו פי g ביחס למספרם שהוא 2 את מספר צאצאי השושלת ברור הבא.
2. אם רק אחד מבני הזוג הוא צאצא והשני לא, הגידול המשפחתי יהיה של פי $2g$ צאצאים ביחס למספר האבות הצאצאים שהוא רק 1.
3. אם הגבר והאישה שניהם לא צאצאי השושלת, הם לא יתרמו צאצאים לשושלת.

ההסתברות שצאצא יתחתן עם צאצא היא \tilde{D}_n / N_n וההסתברות שצאצא יתחתן עם לא צאצא היא $(N_n - \tilde{D}_n) / N_n$. יוצא מכך שהתוחלת המותנית של צאצאים לבית דוד ברור $n+1$ מותנית במספר הצאצאים ברור n תהיה:

$$\begin{aligned} \tilde{E}(D_{n+1} | \tilde{D}_n) &= g \tilde{D}_n \left(\begin{array}{l} \text{ההסתברות} \\ \text{שצאצא יתחתן} \\ \text{עם צאצא} \end{array} \right) + 2g \tilde{D}_n \left(\begin{array}{l} \text{ההסתברות} \\ \text{שצאצא יתחתן} \\ \text{עם לא צאצא} \end{array} \right) \quad (1) \\ &= \left(2 - \frac{\tilde{D}_n}{N_n} \right) g \tilde{D}_n \end{aligned}$$

ניתן לקבל זאת גם על ידי מעקב אחר אוכלוסיית הלא צאצאים $\tilde{C}_n = (N_n - \tilde{D}_n)$:

$$\tilde{E}(\tilde{C}_{n+1} | \tilde{C}_n) = g \tilde{C}_n \left(\begin{array}{l} \text{ההסתברות} \\ \text{שלא צאצא} \\ \text{יתחתן עם} \\ \text{לא צאצא} \end{array} \right) = g \left(\frac{\tilde{C}_n^2}{N_n} \right) \quad (2)$$

נפשט את הביטויים הללו ונקבל אי תלות ב- g על ידי הנרמול הבא:

$$D_n = \frac{\tilde{D}_n}{g^n} \quad (3)$$

ואז נקבל עבור משוואה (1):

$$E(D_{n+1} | D_n) = \left(2 - \frac{D_n}{N_0}\right) D_n \quad (4)$$

דהיינו, גורם גידול האוכלוסייה g הוצא מהמשוואה עבור D_n המנורמלים, וניתן להמשיך את האנליזה עם $g=1$, וממוצע של שני ילדים למשפחה. ניתן [4] להרחיב את הטענה הזו לקצב גידול אוכלוסייה משתנה מדור n לדור $n+1$. אז $g_n \leftarrow g$, והגירמול לעיל יורחב על פי $g^n \leftarrow (g_0 \cdot g_1 \cdot g_2 \cdots g_{n-1})$ ויוביל לתוצאה הקודמת של הוצאת g_n מהמשוואה. יוצא שהתלות של התפלגות יחס הצאצאים היא רק בגודל האוכלוסייה בדור הראשון N_0 .

ממשוואה (4) נקבל עבור התוחלת הלא מותגית:

$$E D_{n+1} = 2ED_n - \frac{1}{N_0} E(D_n^2) \quad (5)$$

נראה בהמשך פרק זה כי בקירוב טוב מאוד מתקיים:

$$E(D_n^2) \cong (E(D_n))^2 \quad (6)$$

ואז נוכל להחליף את (5) במשוואה הבאה שאותה אפשר לפתור מיידית באופן מספרי.

$$ED_{n+1} \cong \left(2 - \frac{ED_n}{N_0}\right) ED_n \quad (7)$$

כעת נגדיר את היחס בין מספר הצאצאים לכלל האוכלוסייה:

$$r_n = \frac{ED_n}{N_n} = \frac{ED_n}{N_0}, \quad r_0 = \frac{1}{N_0} \quad (8)$$

ואז המשוואה הרקורסיבית (7) תיתן:

$$r_{n+1} = (2 - r_n) r_n \quad (9)$$

אותה תוצאה תתקבל על פי משוואה (2) לגבי אוכלוסיית הלא צאצאים:

$$1 - r_{n+1} = (1 - r_n)^2 \quad (10)$$

שממנה ניתן לקבל מיידית את משוואה (9).

שנדרש של משוואה (10) לאחור מדור n לדור $n=0$ נותן:

$$1 - r_n = (1 - r_0)^{2^n} \quad (11)$$

הוכחה כי $E(D_n^2) \cong (E(D_n))^2$ באמצעות המודל של "הילוך אקראי":

זה נדרש לקבלת $E(D_n^2) \cong (E(D_n))^2$ שנדרש לקבלת משוואה (7). נראה זאת דרך המודל של הילוך אקראי.

נעיין ברשימה אקראית של זוגות נשואים בדור n , נשמיט מהרשימה את הזוגות שנוצרים על ידי שניים שאינם בני דוד. נקבל רשימה אקראית באורך D_{ni} של זוגות נשואים. נסמן ב- i את הזוג שמספרו i ברשימה ונגדיר (1 או 2) $\lambda(i)$, וכן $S(i) = \sum_{j=1} \lambda(j)$, ואז $S(D_n) = D_{n+1}$. הסדרה $S(i)$ היא הילוך אקראי או "הילוך השיכור" הצועד צעד אחד או שניים ימינה באקראי כאשר ההסתברות לצעד אחד היא $\frac{D_n}{2N_0}$, ולשני צעדים $1 - \frac{D_n}{2N_0}$.

ניתן לחשב את השונות (variance) של המהלך האקראי הזה ומתוך כך לקבל:

$$E(D_n^2) = (E^2 D_n) \left(1 + \frac{c}{N_0}\right) \quad (12)$$

כאשר $1/8 < c \leq 1/4$, ולכן עבור $N_0 \gg 1$ מתקיים:

$$E(D_n^2) \cong E^2(D_n) \quad (13)$$

לכן נוכל לקבל את משוואה (7).

ג. דוגמאות וגרפים להתפלגות הצאצאים של שושלת במהלך הדורות

נביא להלן גרפים של יחס האכלוס של הצאצאים $r_n = E(D_n)/N_n$ כתלות ברורות עבור גדלים שונים של האוכלוסייה בדור הראשון N_0 , או של $r_0 = 1/N_0$. מצאנו שזה ניתן על ידי הפונקציה הרקורסיבית (9): $r_{n+1} = (2 - r_n)r_n$, או מפורשות על ידי משוואה (11): $r_n = 1 - (1 - r_0)^{2^n}$. הגרפים שמובאים בציור 1 מתארים את יחס האכלוס הצאצאים r_n עבור $N_0 = 1/r_0 = 10^3, 10^5, 10^7, 10^9$.

ניתן לראות כי המעבר מיחס אכלוס נמוך לפריסה מלאה של צאצאים (כאשר $r_n \approx 1$) ומעשית כל אחד מהאוכלוסייה הוא צאצא בשושלת) קורה די מהר ובצורה חדה. הביטוי למספר הדורות n_r הנדרש להגעה ליחס אכלוס r_n יתקבל ממשוואה (11)

$$(עם שימוש בקירוב $\ln(1 - r_0) \approx -r_0 = -1/N_0$):$$

$$n_r \approx \log_2 N_0 + \log_2 \ln[1/(1 - r_n)] \quad (14)$$

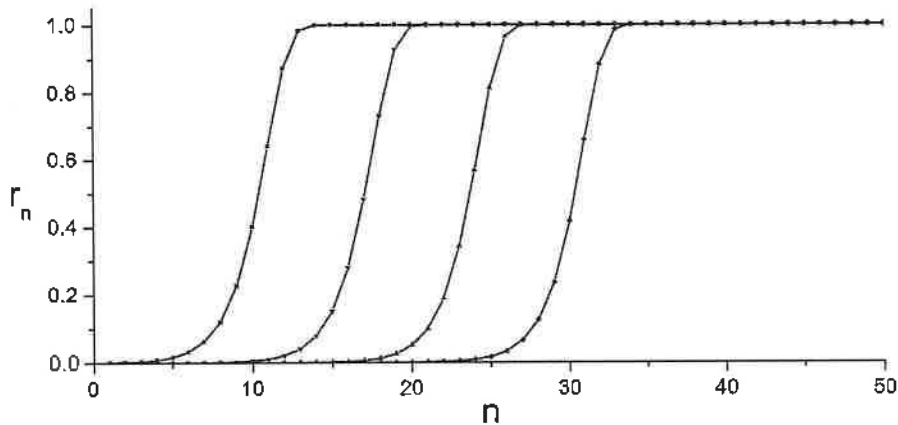
לפיכך מספר הדורות $n_{1/2}$ להגעה ל- $r_n = 1/2$ (כאשר חצי מהאוכלוסייה הם צאצאים) ניתן בקירוב על פי משוואה (14) על ידי: $n_{1/2} \approx \log_2 N_0 - 0.53$. פריטה מעשית מלאה של צאצאים, נניח הגעה ליחס של $r_n = 0.9999$ (או 99.99%), תתקבל בכ- $\log_2 N_0 + 3.2$ דורות, קרוב ל-4 דורות אחרי $n_{1/2}$, ללא תלות ב- N_0 .

5 ראו Karlin & Taylor (לעיל הערה 1), וכן: Wolfram Math World on "Random walk - 1 - Dimensional", <http://mathworld.wolfram.com/RandomWalk-1-dimensional.html>

6 ראו Karlin & Taylor (לעיל הערה 1).

על פילוג צאצאים באוכלוסייה במהלך הרורות

יוצא כי לאוכלוסייה ראשונית של $N_0=10^5$, פריסה מלאה תהיה בערך תוך כ-20 דורות (או 20·25=500 שנים). לכל מכפלה של 10 ב- N_0 נוספים, רק כ- $1/\log_{10} 2=3.22$ דורות. גם עבור אוכלוסייה גדולה מאוד של $N_0=10^9$ או לכל אוכלוסיית העולם היום $N_0=5\cdot 10^9$, מספר הדורות למהפך הזה הוא 34 ו-36 דורות (850 ו-900 שנים) בהתאמה, בלי תלות בקצב הגידול של האוכלוסייה, וזאת בתנאי שתהיה הגירה דו-כיוונית מאזור לאזור על פני כדור הארץ.



ציור 1: אכלוס הצאצאים r_n ביחס לכלל האוכלוסייה בתלות במספר הדורות n עבור $N_0 = 1/r_0 = 10^3, 10^5, 10^7, 10^9$. הגרפים משמאל לימין מתאימים לסדר עולה של N_0 .

ד. היכחדות של שושלת משפחתית

המודל שניתחנו עוסק בקצב גירול אוכלוסייה ממוצע g מדור לדור שיכול להשתנות עם הזמן. כמודל לא התייחסנו לשונות במספר הילדים למשפחה שמתברר שיש לה חשיבות בסיכוי השרידות. הכנסת גורם זה לחשבון תיתן את הסיכוי לשרידות של משפחות (שושלות) שיש לה משמעות במיוחד בדורות הראשונים כאשר מספר הצאצאים הוא קטן. לחלק הזה של שרידות שושלת לאורך הדורות תכונות רומות לתהליך Galton-Watson (GW) המוזכר בתחילת המאמר, שהוצג במקור לגיתוח השרידות של שמות משפחה. שרידות שם משפחה של שושלת תלויה במספר הממוצע של הבנים במשפחה. מתברר שממוצע של בן אחד ומטה (כולל אחד) מוביל לסיכוי היכחדות של 100%. הרבר דומה למקרה שלנו עבור סיכוי השרידות של שושלת כאשר צאצא יכול להיות בן או בת. המקרה של צאצא אחד הוא מעניין. אילו מספר הצאצאים היה דטרמיניסטי, רהיינו שרשרת של אחד (בן אחד עבור שרירות שם משפחה ובן או בת עבור שרירות משפחה), הייתה השושלת נמשכת ללא הפסק, אבל ברגע שהתהליך הוא סטטיסטי,

ומאפשרים התפלגות סביב הממוצע 1, תהיה בוודאות בשרשרת הדורות משפחה עם צאצא אפס ואז השושלת תסתיים.

כאשר מספר הצאצאים גדול מ-1 קיים עדיין סיכוי היכחדות של השושלת, שקטן עם הגידול בממוצע הילדים למשפחה. דהיינו, יהיה אחוז מסוים של שושלות שייעלמו במשך הדורות הראשונים. נביא כאן רק כמה דוגמאות מספריות שמקבלים מהניתוח המתמטי עבור השרידות, ובהמשך פרק זה נביא תוספת מתמטית עבור המתעניינים בפירוט חישובי. כאמור לעיל ובהנחה של פילוג פואסוני למספר הילדים במשפחה, יוצא שעבור ממוצע של ילד אחד ומטה למשפחה, $m \leq 1$ ($g \leq 1/2$), סיכוי ההיכחדות 100%. עבור ממוצע של 2 ילדים למשפחה, $m=2$ ($g=1$) סיכוי ההיכחדות הוא 20.3%, או במינוח של שרידות: 79.7% מהמשפחות ברור מסוים ישררו במהלך הדורות. עבור ממוצע של 3 ילדים למשפחה ($2g=m=3$) סיכוי השרידות עולה ל-94%, ועבור ממוצע של 4 ילדים ($2g=m=4$) סיכוי השרידות הוא 99%.

תוספת מתמטית עבור סיכוי ההיכחדות של משפחות על פי תהליך Galton-Watson (GW)

האנליזה של תהליך GW עבור סיכוי ההיכחדות של משפחה תלויה בצורת התפלגות מספר הילדים למשפחה סביב הערך הממוצע m ($m=2g$). זו נלקחת בדרך כלל להיות התפלגות פואסונית, ואז סיכוי השרידות s_n ניתן על ידי פונקציה יוצרת ההסתברות הבאה:

$$s_{n+1} = 1 - e^{-ms_n} \quad (15)$$

עבור $m \leq 1$ ($g \leq 1/2$) הרקורסיה הזו מתייצבת ל-0; דהיינו, סיכוי שרידות אפס או היכחזות ודאית, עבור ממוצע של ילד אחד ומטה למשפחה. עבור $m > 1$ ($g > 1/2$) הרקורסיה מתייצבת לנקודות השבת (fixed points) שניתנות על ידי המשוואה $s = 1 - e^{-ms}$, שלה שני פתרונות: האחד טריוויאלי $s_a = 0$ ואילו השני s_b התלוי ב- m נותן את יחס השרידות. התחלת הרקורסיה ($n=0$) ב- $s_0 = 1$ תיתן את יחס השרידות שמתייצב אסימפטוטית לערך s_b . כאמור לעיל אין פתרון לא טריוויאלי עבור $m \leq 1$, ולכן סיכוי השרידות הוא אפס. ל- $m=2$ סיכוי השרידות הוא 79.7%, ל- $m=3$ 94%, ול- $m=4$ 99%. וודאי שהמצב העדין לסיכוי של היכחדות של ראש שושלת קיים בעיקרו בדורות הראשונים כאשר מספר הצאצאים קטן. כעבור כמה דורות כאשר בדרך כלל $m > 2$ ($g > 1$) מספר הצאצאים היותר גדול מקטין מאוד את סיכוי ההיכחדות של השושלת.

היכחדות של שושלת אינה משפיעה על התוצאות המרכזיות שהצגנו לגבי התפתחות יחס האכלוס של הצאצאים באוכלוסייה. הן נכונות לגבי רוב המשפחות ששורדות כפי שיוסבר בפרק הבא. מכאן נוכל להסיק לגבי השאלה של הסיכוי להיות צאצא של דוד המלך 24 דורות אחיו. אם מצוי אדם אחד שהוא צאצא של דוד המלך או כל אחד מישראל הוא צאצא שלו. כאשר נניח כי שושלת דוד לא פסקה או כעבור 24 דורות וכמובן היום כל אוכלוסיית ישראל הם צאצאיו. דוד חי בסביבות 1000 לפני הספירה, ולכן כולם היו צאצאיו כבר בשנת 400 לפני הספירה, דהיינו בתקופת הבית השני.

נחזור לשרירות שמות משפחה, כמו שושלות הכוהנים בני אהרן או בני לוי שהשתייכות אליהן היא רק דרך בנים. אז הפרמטר m (או g) בחשבון GW יתייחס למספר (או מקדם הגידול) הממוצע למשפחה של בנים בלבד (הם חצי ממספר הילדים הממוצע למשפחה, מכיוון שבקירוב מספר הבנים שווה למספר הבנות) גם סיכוי השרירות שהובא לעיל הוא ממוצע לכלל האוכלוסייה. אך באופן פרטי, ראש שושלת גברים ספציפי שבמשפחתו מספר ילדים (ולכן בנים) גבוה מהממוצע, במיוחד במהלך הדורות הראשונים, יבטיח סיכויי הישרדות גבוהים יותר למשפחתו. לגבי הדוגמה של הכוהנים, יש היום אחוז לא זניח שלהם באוכלוסייה היהודית אף על פי שהמספר הכולל של יהודים גדל רק בצורה מתונה מאוד במהלך הדורות (נראה שהאחוז הניכר הזה היה קיים כבר בתקופת שיבת ציון ותחילת תקופת הבית השני). ניתוח הגידול שלהם מצריך בוודאי לימוד מיוחד. כאן ניתן רק לומר כי משפחות הכוהנים לא היו באחוז המסוים שחושב לעיל של משפחות שלא שררו.

ה. דיון על אנליזה של שושלות ועצי משפחה לאורך הדורות או אחורה

הטיפול הסטטיסטי במודל שלנו נעשה לאורך הדורות ממייסד שושלת אל הצאצאים. כך זה נעשה גם בתהליך Galton-Watson. כאן המקום להבחין בין המודל שלנו לזה של GW. אצלנו התהליך תלוי בשאלה עם מי מתחתן צאצא (צאצא רוד). נישואים עם בן או בת זוג שאינו מהשושלת גותן בממוצע m ילדים, דהיינו גידול פי $2g$ של אוכלוסיית בני הדור הבא. אבל נישואין לבן (בת) זוג שהוא (היא) בתוך השושלת, ואז שניהם צאצאים, מגדילה את הדור הבא רק בחצי מהנ"ל, ב- g . למשל עבור $m=2$ ($g=1$), במשפחה כזו אין גידול במספר הצאצאים בני השבט ברור הבא מכיוון ששני ההורים כמו ילדיהם הם שניים. לכן גידול השושלת מרור לרור נע ממכפלה של $2g$ בדורות הראשונים ל- g . לעומת זאת בתהליך GW אין זה משנה אם בן או בת הזוג הם מתוך השבט או לאו. שם מתמקדים בהתפלגות מספר הילדים, שהוא הגורם שקובע את סיכויי השרירות של השושלת בדורות הראשונים. לכן בשלב של הדורות הראשונים ממילא לא יהיה שוני בין מודל GW למודל שלנו מכיוון שהסיכוי אצלנו לנישואים מחוץ לשושלת הוא כמעט של 100%, ולכן הגידול ההתחלתי של הצאצאים מרור לרור הוא של $2g$.

ניתן גם לנתח את הסטטיסטיקה במהלך לאחור של הדורות. אז נתייחס להסתברות יהיה עבור האבות ולא הצאצאים. הטיפול לאחור שכיח בניתוח עצים משפחתיים בגלל הפשטות והמידע היותר זמין על הדורות האחרונים. כאן מספר ההורים הוא בוודאי 2, אך מסלולים שונים אחורה יכולים לעבור דרך אותם אבות. ניתן לנתח את הסטטיסטיקה והשכיחויות למעבר דרך אבות משותפים וכו'. אלו בוודאי יהיו תלויים באופיין של הקהילות, הניידות והקשר ביניהן וגם במספרי האוכלוסין, בשונה מהתפלגות הצאצאים אותה ניתחנו במאמר זה. סביר שעבור בן קבוצה מסויימת יהיה קשר לאב קדמון מאותה קבוצה בהרבה יותר מסלולים מאשר בן קבוצה

אחרת. לכן המסקנה שכל היהודים הם צאצאי דוד המלך יכולה הייתה להתרחב לאוכלוסייה הכללית, אך ברור שמספר המסלולים באוכלוסייה היהודית המובילים לרוד הוא גדול לאין ערוך. כך אפשר לומר למשל שליהודי באירופה מספר המסלולים כעץ המשפחתי שמגיעים לרש"י (חי בין 1040-1105) הם רבים יותר מאלו של יהודי במזרח התיכון, וההפך לגבי הרמב"ם (חי בין 1138-1204); ועם זאת ניידות בין קהילות, אף אם היא לא הייתה גדולה, 34-38 הדורות (850-950 שנים) שחלפו מתקופת רש"י והרמב"ם הובילו לכך שמעשית כל בני הקהילות הם צאצאי שני האישים הללו.

ניתוח לאחור של סטטיסטיקת אבות נעשה לאחרונה על ידי קבוצת מדענים.⁹ תוצאה מרכזית של עבודתם נותנת את מספר האבות ביחס לכלל האוכלוסייה ברוד קודם i של אדם מסוים ברוד $i=0$, כאשר מספר ילדים למשפחה הוא m והתפלגותם היא פואסונית. התוצאה שלהם היא בריוק זו שמתקבלת בתהליך GW וניתנת על ידי הנוסחה (15) דלעיל; דהיינו $s_{i+1} = 1 - e^{-ms^i}$ זו תוצאה שונה מזו שקיבלנו, ואף על פי שהיא מכילה את מרכיבי ההיכחדות, אין בה החלוקה המהותית בגידול במניין הצאצאים שנובע מנישואים תוך או חוץ שבטיים.

1. סיכום

הצגנו מודל עבור התפלגות הצאצאים במהלך הדורות של אדם מסוים ברוד התחלתי כלשהו שבו אוכלוסייה N_0 . מצאנו שההגעה ליחס שבו מעשית תיהפך כלל האוכלוסייה לצאצאיו תתרחש תוך כ- $4 + \log_2 N_0$ דורות. דהיינו 20 דורות (500 שנים) עבור $N_0 = 10^5$, וכל מכפלה של 10 עבור N_0 מוסיפה לתהליך $1/\log_{10} 2 = 3.32$ דורות. מצאנו שהתהליך, ובמיוחד יחס מספר הצאצאים למספר הכולל של האוכלוסייה אינו תלוי בקצב גידול האוכלוסייה אלא רק במספר ההתחלתי $N_0 \cdot g^n \gg 1$. בתנאי ש-

ברוד שפריסת הצאצאים לא תתרחש לתוך ומחוץ לחברות מאור מבודדות וכי הסתגרות או בידור קהילות יכולים להאט את קצב פריסת הצאצאים, אך רק בצורה מוגבלת ולזמן קצר. ראינו עד כמה מהיר תהליך הפריסה ולכן גם ניידות קטנה ונישואין מעטים בין בני קהילות שונות גורמים די מהר לפריסת הצאצאים. די בכך שאחד (או אחת) מחברי קהילה שהוא צאצא של דוד המלך מהגר או נישא לבן (או בת) קהילה, עיר או מדינה אחרת, ותוך מספר דורות תיהפך כל הקהילה שאליה היגר לצאצאי דוד. ההבדל בזמן פריסת צאצאים מלאה עבור קהילות של אלפים, $10^3 - 10^4$, שבו זמן הפריסה הוא 14-17 דורות (350-425 שנים) לעומת קהילות של מיליונים, $10^6 - 10^7$, שעבורן זמן זה הוא 24-27 דורות (600-675 שנים) ואף למיליארד, 10^9 , שזה 34 דורות (850 שנים), הוא יחסית לא גדול.

התייחסנו בדוגמה מיוחדת לצאצאי דוד המלך. נמצא שכיום מעשית כל אחד מהאוכלוסייה היהודית הוא צאצא של דוד, ובעצם ייחוס כולל כזה לבית דוד היה נכון כבר בתקופת הבית

9 ראו המקורות שבהערה 2 לעיל.

על פילוג צאצאים באוכלוסייה במהלך הדורות

השני. יתר על כן, ייחוס כזה תקף גם לגבי רוב בני דורו של דוד ודורות קודמים פרט לאחוז מסוים של משפחות נכחדות, שאת אומדנן הבאנו במאמר. יוצא אפוא שהיום (כפי שהיה כבר 24 דורות או כ-600 שנים אחרי דוד) או שכולנו צאצאי דוד או שאף לא אחד מאתנו הוא צאצא שלו; או לחלופין – אם יש צאצא אחר של דוד המלך הרי שכולם צאצאיו.