עמוס אלטשולר

השימוש בשבר משולב לחישוב מחזור עיבור השנה

שני מחברים, ח"י בורנשטיין וב' בן־יהודה, עשו שימוש בכלי מתמטי — השבר המשולב — לחישוב מחזור השנים המעוברות בלוח העברי. אמנם שניהם הגיעו למסקנה הנכונה (שכמובן הייתה ידועה מראש), בכל זאת יש פגם באופן בו עשו זאת — נראה שייחסו לשבר המשולב תכונה שאין לו. במאמר מתואר הפגם ומוצעת דרך לתיקונו.

1. מבוא

כבר מאות רבות של שנים מקובל בלוח העברי "המחזור הקטן", שלפיו במחזור של תשע עשרה שנים יש שבע שנים מעוברות, והן השנים השלישית, השישית, השמינית, האחת עשרה, הארבע עשרה, השבע עשרה והתשע עשרה (וסימנך: ג' ו' ח' א' ד' ז' ט'). מחזור זה היה ידוע גם ליוונים (בשנת 433 לפסה"נ הונהג מחזור זה ביוון) ונקרא "המחזור המטוני" על שם מגלהו, מטון, וגם "מחזור הזהב" או "מחזור אלוהי".[1]

מטרת המחזור הזה היא להתאים בין שנות החמה לחודשי הלבנה, שכן אורכה של שנת החמה הוא יותר משנים עשר ופחות משלושה עשר חודשי לבנה. במחזור זה תשע עשרה שנות חמה מכילות כמעט בדיוק מאתיים שלושים וחמישה חודשי לבנה.

אורך שנת החמה קבוע, ואילו אורך חודש הלבנה אינו קבוע, אלא משתנה מחודש לחודש. נדרשו אפוא מן הסתם תצפיות מרובות, במשך תקופה ארוכה, כדי לגלות שתשע עשרה שנה משתוות בקירוב טוב למאתיים שלושים וחמישה חודשי לבנה. ההישג של מטון באמת ראוי לציון.

משחישב היפרכוס במאה השנייה לפני הספירה את האורך הממוצע של החודש, אפשר היה להגיע למחזור הנ"ל באופן פשוט יחסית, על ידי חישוב. אורך השנה מחולק באורך החודש הממוצע הוא שנים עשר שלמים ועוד שארית. אם השארית היא $\frac{M}{N}$, יש לעבר M שנים במחזור של N שנים. אם N גדול מכדי לשמש באופן נוח כמחזור, נחפש שבר $\frac{P}{Q}$ אשר מחד גיסא יהיה קרוב למדי ל-$\frac{M}{N}$ ומאידך גיסא Q יהיה קטן למדי כדי לשמש כמחזור נוח, ונעבר P שנים במחזור

1 ב' בן־יהודה, חשבון הלוח העברי, הוצאת מסדה [1955?], עמ' 55; ח"י בורנשטיין, "עבורים ומחזורים", התקופה כ (תמוז–אלול תרפ"ג), עמ' 285–330, ראה בעמ' 287.

של Q שנים. אפשר לעשות זאת ללא קושי רב על ידי ניסוי ותעייה. באמירה "ללא קושי רב" או "פשוט יחסית" יש הגזמה לא מעטה, שכן השיטה העשרונית נודעה באירופה רק במאה השלוש עשרה, וביצוע החישובים הללו ללא שימוש בשיטה העשרונית — אינו פשוט כלל. אולם הסתייגות זו נכונה לגבי כלל החישובים שנעשו לפני היוודע השיטה העשרונית.

מה הם המספרים שבהם מדובר?

האורך הממוצע של חודש הוא 29 ימים, 12 שעות ו-793 "חלקים", כאשר 1 שעה = 1,080 "חלקים" (משך זמן זה ידוע כ-כט [ימים] יב [שעות] תשצג [חלקים]). אם נהפוך זאת לחלקים נקבל 765,433. האורך הממוצע של חודש הוא אפוא 765,433 חלקים.

אורך שנת החמה בלוח העברי — שנת שמואל — הוא 365 ימים ועוד 6 שעות, ובחלקים — 9,467,280 ומספר זה שווה ל-282,084 + 12*765,433. חילוק מספר זה באורך החודש נותן אפוא 12 ועוד שארית שהיא $\frac{282,084}{765,433}$.

כיום ידוע[2] שאורך שנת החמה הוא רק 365 יום, 5 שעות, 48 דקות ו-46 שניות, כלומר שנת החמה קצרה משנת שמואל ב-11 דקות ו-14 שניות, שהם 202 חלקים, ולכן השארית המתקבלת בחילוק שנה זו באורך החודש היא $\frac{281,882}{765,433}$.

בכל מקרה, מדובר במחזור של 765,433 שנים, וזה כמובן אינו מעשי.

בחיפוש אחר קירוב מתאים, ניתן להיעזר במכשיר מתמטי ששמו "שבר משולב" (Continued fraction). בדורות האחרונים עשו זאת שני מחברים, חיים יחיאל בורנשטיין — שהוא ללא ספק אחד מחשובי החוקרים בנושאי הלוח העברי בדורות האחרונים — במאמרו "עבודים ומחזורים"[3] וד"ר ברוך בן־יהודה.[4] אם מטרת כל אחד מהם הייתה להגיע אל המספר $\frac{7}{19}$ בעזרת השבר המשולב, אכן עשו זאת. אולם אם המטרה הייתה — כפי שסביר לשער — להראות באמצעות השבר המשולב כי $\frac{7}{19}$ הוא הקירוב הטוב ביותר לענייננו, אזי חסרה אצל שניהם חוליה חשובה. מטרתנו כאן היא להצביע על החוליה החסרה ולהשלים את החישוב.

ותחילה נעשה היכרות עם השבר המשולב ותכונותיו הבסיסיות.

2 C. Payne-Gaposchkin, *Introduction to Astronomy*, Prentice-Hall, Inc. 1961, p. 36

3 "עבודים ומחזורים" (לעיל הערה 1), עמ' 287.

4 חשבון הלוח העברי (לעיל הערה 1), עמ' 45.

2. השבר המשולב

נפתח בדוגמה:

ההצגה של המספר $\frac{173}{71}$, למשל, כשבר משולב, היא
$$\frac{173}{71} = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}}$$

ואפשר כמובן גם
$$\frac{173}{71} = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}}}}$$
, שהרי $4=3+\frac{1}{1}$

שלבי החישוב המוליכים להצגה זו הם כדלקמן:

$$\frac{173}{71} = 2+\frac{31}{71} = 2+\cfrac{1}{71/31} = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{31}} = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{31/9}} =$$

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{9}}} = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9/4}}} = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}}$$

צורת כתיבה זו היא כמובן מסורבלת, וניתן להחליפה בסמל שהוא יותר נוח לכתיבה (אך כמובן אינו משנה את אופי החישוב). כך ההצגה הראשונה של $\frac{173}{71}$ כשבר משולב תיכתב כ-[2, 2, 3, 2, 4] והשנייה כ-[2, 2, 3, 2, 3, 1]

באופן כללי: השבר המשולב
$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots\cfrac{1}{a_n}}}}$$
ייכתב בקיצור כ-$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_N]$

(אם $a_N>1$, אפשר להציג את $x=[a_0,a_1,a_2,\dots,a_N]$ גם כ-$x=[a_0,a_1,a_2,\dots,a_N-1,1]$ כפי שראינו בדוגמה לעיל.)

אם נחשב את השבר המשולב מראשו לזנבו, אך נקטע את החישוב, נקבל מספר הנקרא "קירוב" לערך האמיתי x של השבר המשולב.

הקירוב הראשון הוא $K_1 = a_0$, השני $K_2 = [a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1}$, הקירוב הבא הוא

$K_3 = [a_0, a_1, a_2] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}$ הרביעי $K_4 = [a_0, a_1, a_2, a_3]$ וכן הלאה.

לסדרת הקירובים $K_1, K_2, K_3, K_4 \ldots$ יש כמה וכמה תכונות מעניינות ונציין רק את אלה הנוגעות לענייננו:[5]

א. כל קירוב בסדרה זו קרוב לערך המדויק x של המספר המקורי יותר מהקירוב הקודם.

ב. אם $\frac{P}{Q}$ הוא קירוב בסדרה זו (ושבר זה הוא מצומצם), אזי $\frac{P}{Q}$ קרוב לערך המדויק x יותר מכל שבר שמכנהו קטן מ-Q.

ג. הקירובים $K_1, K_3, K_5 \ldots$ ("הקירובים האי-זוגיים") כולם קטנים מ-x, והקירובים $K_2, K_4, K_6 \ldots$ ("הקירובים הזוגיים") כולם גדולים מ-x.

מהתכונות א ו-ג נובע כי $K_1 < K_3 < K_5 \ldots < x < \ldots K_6 < K_4 < K_2$.

3. השימוש בשבר המשולב למחזור העיבור

עתה ניגש למספרים החשובים לענייננו.

הפיתוח של $\frac{282{,}084}{765{,}433}$ שהיא השארית לפי שנת שמואל, ולפיה חישב בן־יהודה, הוא $\frac{282{,}084}{765{,}433} = [0, 2, 1, 2, 2, 25, 3, 8, 1, 1, 29]$ והקירובים הראשונים הם $K_1 = 0,\ K_2 = \frac{1}{2},\ K_3 = \frac{1}{3},\ K_4 = \frac{3}{8},\ K_5 = \frac{7}{19},\ K_6 = \frac{178}{483}$ ומכאן הסיק בן־יהודה ש- $\frac{7}{19}$ הוא הערך המקורב הרצוי לענייננו, ולפיו יש לעבר 7 שנים במחזור של 19 שנה. העובדה שהוא מציין גם את הקירוב הבא, $\frac{178}{483}$, באה לרמז לנו: הנה, זה הוא המועמד הבא אחרי $\frac{7}{19}$, והוא כמובן אינו מתאים, כי מחזור שארכו 483 שנים איננו נוח לשימוש.

אולם, מלכתחילה נשאלת השאלה: מתכונות השברים שמנינו לעיל, אכן נובע ש- $\frac{7}{19}$ קרוב ל- $\frac{282{,}084}{765{,}433}$ יותר מכל שבר שמכנהו קטן מ-19. אך זה עדיין לא שולל את האפשרות שקיים שבר אשר מכנהו גדול אך מעט מ-19 והוא קרוב ל- $\frac{282{,}084}{765{,}433}$ יותר מאשר $\frac{7}{19}$ (למשל אולי $\frac{11}{30}$) ולכן מתאים יותר לענייננו (ומשמעותו 11 שנים מעוברות במחזור של 30 שנים). כדי להשלים את החישוב, עלינו לצאת ממסגרת השברים המשולבים, ולבדוק (ידנית, או בימינו כמובן בעזרת מחשב) את השברים שמכניהם בין 20 ל-482 ולראות אם מי מהם מתאים למטרתנו. (כמובן די לבדוק את המספרים בעלי מכנה קטן למדי, אשר יכול לשמש כאורך של מחזור.) שלב זה חסר אצל בן־יהודה.

5 על הוכחת תכונות אלה ועל טיפול רחב יותר בנושא השבר המשולב, ראה: עמוס אלטשולר, "הלוח ושברו", אלף אפס 23 (הוצאת מכללה ירושלים), תשס"ז 2006, עמ' 10-21.

בבדיקה כזו נמצא כי המספר בעל המכנה הקטן ביותר שגדול מ-19, אשר מרחקו מ- $\frac{282,084}{765,433}$ קטן יותר ממרחקו של $\frac{7}{19}$ מ- $\frac{282,084}{765,433}$ הוא $\frac{94}{255}$, ומאחר שמחזור שאורכו 255 שנים אינו נוח לשימוש, אנו אכן נשארים עם $\frac{7}{19}$ כבחירה הטובה ביותר.

ובאופן דומה לגבי ח"י בורנשטיין:

הפיתוח של $\frac{281,882}{765,433}$, השארית לפי שנת חמה אמיתית, לשבר משולב הוא [0, 2, 1, 2, 1, 1, 17, 6, 1, 9, 1, 29] והקירובים הראשונים הם

$$K_1 = 0,\ K_2 = \frac{1}{2},\ K_3 = \frac{1}{3},\ K_4 = \frac{3}{8},\ K_5 = \frac{4}{11},\ K_6 = \frac{7}{19},\ K_7 = \frac{123}{334}$$

(בורנשטיין השתמש בשנה שאורכה מעט גדול יותר מהערך הנהשב היום לאורך שנה, אולם השינוי קטן והקירובים הראשונים זהים לאלו הנזכרים כאן). כמו בן יהודה, אף בורנשטיין מסתפק בכך שהוא מצביע על הקירוב $\frac{7}{19}$, וכמו בן־יהודה אף בורנשטיין מציין גם את הקירוב הבא כאומר: ראו, המועמד הבא הוא $\frac{123}{334}$, ו-334 אינו מתאים לשמש מחזור.

אף כאן, כמו קודם, יש לבדוק עתה את השברים אשר מכניהם גדולים מ-19 (ועדיין קטנים די הצורך כדי לשמש אורך של מחזור) ולבדוק אם מרחקו של מי מהם מ- $\frac{281,882}{765,433}$ קטן ממרחקו של $\frac{7}{19}$ ממספר זה. כמו אצל בן־יהודה, אף אצל בורנשטיין חסר שלב זה.

ואכן, בדיקה כזו מעלה כי השבר בעל המכנה הקטן ביותר אשר מרחקו מ- $\frac{281,882}{765,433}$ קטן ממרחקו של $\frac{7}{19}$ ממספר זה, הוא $\frac{67}{182}$, ו-182 כמובן אינו מתאים לשמש כאורך של מחזור.

אגב, ראוי לציין כי הפיזור ג' ו' ח' א' ד' ז' ט' של שבע השנים המעוברות במחזור, מסתדר טוב יותר (מבחינת השבר המשולב) כשיוצאים מהאורך האמיתי של שנת החמה מאשר לפי שנת שמואל, שכן הוא מורכב משני הקירובים הקודמים $\frac{4}{11}$ ו- $\frac{3}{8}$ (בסדר הפוך) הקודמים ל- $\frac{7}{19}$ (כלומר: ב-8 השנים הראשונות למחזור נמצאות שלוש השנים המעוברות ג' ו' ח', וב-11 השנים האחרונות למחזור נמצאות ארבע השנים המעוברות הנותרות), בעוד שלפי שנת שמואל $\frac{4}{11}$ אינו קירוב המתקבל מן השבר המשולב.

עוד נציין, כי $\frac{7}{19}$ הוא קירוב אי-זוגי (K_5) בשבר המשולב המתקבל משנת שמואל, ואילו בשבר המשולב המתקבל מהשנה האסטרונומית, $\frac{7}{19}$ הוא קירוב זוגי (K_6). לאור תכונה ג לעיל, נובע מכך כי האורך של השנה הממוצעת הנובעת מהקירוב $\frac{7}{19}$ (והמתקבלת מחילוק 235 החדשים שבמחזור עיבור שלם, ב-19, הלא היא השנה הידועה כ"שנת רב אדא"), קצר משנת שמואל וארוך מן השנה האסטרונומית.

לעומת זאת, לא רק הקירוב $K_6 = \frac{178}{483}$ בפיתוח של שנת שמואל נותן שנה ארוכה משנת שמואל, כפי שנובע מהתכונה ג לעיל, אלא חישוב ישיר מראה שגם השנה המתקבלת מ- $\frac{94}{255}$, הקירוב שאינו מתקבל מן השבר המשולב, ארוכה משנת שמואל. כך גם נותן חישוב ישיר כי

השנה המתקבלת מ- $\frac{67}{182}$ קצרה אפילו מהשנה האסטרונומית. יוצא כי גם מבחינה זו הבחירה בקירוב $\frac{7}{19}$ היא הבחירה הטובה ביותר.