

ערן רביב

בין "ארבעה שערים" ללוח "ס"א ראשים" – הצעה חדשה למציאת סימני הקביעות בעזרת לוח 16 שורות¹

מאמר זה עוסק בהצעה חדשה – טבלת עזר חישובית למציאת סימני הקביעות של שנה, או מספר שנים עוקבות, מתוך מולד הלוח (המחושב) של ראש השנה וידיעת מקומה של השנה במחזור העיבור. במהלך ההיסטוריה של הלוח העברי פותחו "כלים" למציאת סימן השנה בעזרת חישוב פשוט וטבלת עזר. זכות הבכורה שייכת ל-"לוח ארבעה שערים", לוח קדום מימי הגאונים. הלוח השני – "לוח ס"א ראשים" – פותח בתקופת הראשונים והוצג לראשונה במאה ה-יג. במאמר זה נציג בקצרה את לוח ארבעה שערים ואת לוח ס"א ראשים ונעבור להצעה חדשה – לוח בן 16 שורות. נסביר את האלגוריתם לבניית הלוח ואת יתרונו היחסי על פני שני הלוחות ההיסטוריים דלעיל.

לוח ארבעה שערים

גאוני בבל שחיו במאה התשיעית נהגו לקבוע את השנה רק על סמך מולד תשרי וידיעת מספר השנה במחזור הירחי של 19 שנות המחזור, ללא צורך בידיעה ויישום של כללי "הרחיות".

סימן השנה

סימן השנה הוא "קוד" בן 3 אותיות, המכיל בתמצית את אפיונה של השנה. האות הראשונה מציינת את היום בשבוע בו חל א' של ראש השנה, האות השנייה מציינת את מספר הימים בחדשי מרחשוון וכסלו (ח – חסרה, מרחשוון וכסלו בני 29 ימים כל אחד), (ב – כסדרה, מרחשוון 29, כסלו 30 ימים), (ש – שלמה, מרחשוון וכסלו בני 30 ימים כל אחד), והאות השלישית מציינת את היום בו חל פסח. מכיוון שבלוח העברי קיימים 14 סוגי קביעות לסימן השנה, לכן לאחר ידיעת סימן השנה ניתן לעיין באחת מתוך 14 טבלאות מוכנות המפרטות את כל תאריכי השנה ואת המידע הנוסף הנחוץ.²

1 מאמר זה מציג חלק מהתובנות שתועלנה אי"ה בעבודת תזה בהנחיית פרופ' עלי מרזבך, במסגרת תואר שני במסלול "מדע הלכה והינוך" באוניברסיטת בר-אילן.
2 להרחבה ראה: שר-שלום, רחמים. תשס"ט. שערים ללוח העברי. מוסד הרב קוק: ירושלים.

ערן רביכ

רואים אנו שהחלוקה לארבעה שערים נובעת מ- "הימים" ולא מסוגי השנים. בודנשטיין היה, ככל הנראה, הראשון ש"הפך" את הטבלה¹⁷ (Transpose) והציג את העמודות קרי "השערים" כארבעה סוגי השנים במחזור יט.

המבנה המתמטי של לוח ארבעה שערים

הלוח מבוסס על מציאת גבולות תשרי שבהם סימן השנה משתנה עבור כל שנה משנות המחזור. כדי לדעת את סימן שנה n במחזור יש צורך לבדוק גם את קודמתה $n-1$ (בגלל דחיית בט"ו תקפט אחר עיבור), וגם את השנה הבאה במחזור $n+1$.

אי לכך כאשר נבדוק "רצפים" של שלוש שנים, במחזור יט, נקבל ארבעה סוגי שנים: (מקראה: פ – פשוטה, מ- מעוברת, פ* – פשוטה אחר מעוברת).

- פ*, פ, מ (פשוטה בין פשוטה ומעוברת) (שנים: 2,5,10,13,16)
- מ, פ*, פ (פשוטה בין מעוברת ופשוטה) (שנים: 1,4,9,12,15)
- מ, פ, מ (פשוטה בין 2 מעוברת) (שנים: 7,18)
- פ, מ, פ (מעוברת לעולם בין 2 פשוטות) (שנים: 3,6,8,11,14,17,19)

17 'מחלוקת' עמ' 24, רברי ימי העבור האחרונים (תרפ"א - תרפ"ג) עמ' 233.

לוח ארבעה שעורים

מ"ס	מ"ס	רצף 1 - בין מ-1 מ		רצף 2 - בין מ-1 מ-2		רצף 3 - בין מ-2 מ-3		רצף 4 - בין מ-3 מ-4	
		שנים	תלמים	שנים	תלמים	שנים	תלמים	שנים	תלמים
0	18	0	19440	0	19440	0	19440	0	19440
1	9	204	35844	204	35844	204	35844	204	35844
1	20	491	48011	491	48011	491	48011	491	48011
2	15	589	68629	589	68629	589	68629	589	68629
2	18	0	71280	0	71280	0	71280	0	71280
3	9	204	87684	204	87684	204	87684	204	87684
3	18	0	97200	0	97200	0	97200	0	97200
4	11	695	116255	695	116255	695	116255	695	116255
5	9	204	139524	204	139524	204	139524	204	139524
5	18	0	149040	0	149040	0	149040	0	149040
6	0	408	155928	408	155928	408	155928	408	155928
6	9	204	165444	204	165444	204	165444	204	165444
6	20	491	177611	491	177611	491	177611	491	177611

בין "ארבעה שעורים" ללוח "ס"א ראשים"

החישוב הנדרש הוא מציאת מולד תשרי של שנה מבוקשת, ומעיון בטבלה מתקבל סימן השנה. הסבר: מולד תשרי מחושב בחלקים, כל רצף שיוצר מעבר לסימן שנה אחר, פותח שורה חדשה בגבולות בצד שמאל של הטבלה (ומצוין באמצעות חץ שמאלה).

דוגמה: כשמולד תשרי (M) "נופל" בתחום הבא $19440 \leq M < 48011$ וכאחת מהשנים שברצף הראשון, השני או השלישי, קיימות שתי אפשרויות לקביעות השנה: עד (לא כולל) 35844 סימנה **בחג**, מכאן ואילך סימנה **בשה**. אם השנה היא אחת מהשנים שברצף הרביעי אזי בכל התחום סימנה **בחה**.

לוח ס"א ראשים¹⁸

בתחילת המאה ה-יג פורסם לוח חדש ומהפכני – לוח ס"א ראשים.¹⁹ בורנשטיין (תרפ"ב, ד"ה האחרונים)²⁰ מייחס אותו לאחד מבעלי התוספות – הריצב"א – וזאת על סמך עדות אחת הנמצאת בכתב יד של ספר עברונות משנת 1566, שם נכתב כדלהלן:

ועוד תיקן רבי שמשון שניץ יג שורות לידע מהן הקביעות ור' יצחק ב"ר אברהם אחיו תיקן ס"א שורות וחזרות הן ואין צורך בהם אח"כ ורב נחשון גאון תיקן י"ג שורות והן כתובים לפניך וגם אין הרבר נכון לנבוני לב

הפיסקה המצוטטת אינה ברורה: מה הן י"ג השורות של הר"ש משניץ ומה הן י"ג השורות המוזכרות מאוחר יותר שעליהן נאמר "אין הרבר נכון". נראה לנו שקשה לקבוע ברבר מסמרות, במיוחד שזה המקור היחיד למחבר הלוח. ייתכן וי"ג השורות של הר"ש משאנץ הן י"ג השורות של לוח "ארבעה שערים" שניתן לכתבו ב-י"ג שורות כמו שכתבנו לעיל בסעיף המנתח את לוח "ארבעה שערים".

הלוח מובא לראשונה בספר "יסוד עולם" לר"י הישראלי, ושם הוא מכנהו "הלוח שהמציאהו החכמים האחרונים", ללא ציון שם מחברו.

הרעיון המהפכני המונח בבסיסו של לוח זה הוא שעל ידי חלוקת שנות העולם לסדרות בנות 19 שנה כל אחת, נקבל 61 צירופים אפשריים של סימני הקביעות ותו לא!! המצאה חדשנית זאת מאפשרת בחישוב אחד של מולד תשרי של ראש המחזור לרעת את סימני השנה של כל שנות המחזור.²¹ הרוצה להשתמש בלוח יחלק את מספר השנה העברית ל-19, ייקח את השלם וימצא

18 ראה מאמרי (2010) "לוחות ושברי לוחות" – על מולדות ותכונותיהם בתוך מרצבך (עורך). בר"ד 22. רמת גן: אוניברסיטת בר-אילן.

19 לוח ס"א ראשים. הומצא לפי השערת ה"י בורנשטיין, בידי ריצב"א (=ריב"א = רבנו יצחק בן אברהם מרמפייר, צרפת, אחיו של הר"ש משנץ, תלמיד רבנו תם ור"י הזקן, קרוב לשנת 1200).

20 עמוד 292.

21 סימני הקביעות הם: האות הראשונה מייצגת את היום בשבוע בו חל יום א' של ראש השנה. האות השנייה: ח = חסרה מרחשון וכסלו בני 29 ימים, ב = בסדרה, מרחשון 29, כסלו 30 יום, ש = שלמה, מרחשון וכסלו בני 30 יום. בלוח ישנם 14 סוגים שונים של קביעות, 7 לפשוטה ו-7 למעוברת.

בין "ארבעה שערים" ללוח "ס"א ראשים"

בעזרתו את מולד תשרי של ראש המחזור. (האות S מייצגת את השנה העברית לבהר"ד,²² האות M מייצגת את מולד ראש המחזור בחלקים):²³

$$M = [57444 + 69715 * INT(S/19)] \bmod 181440$$

אחרי שהתקבל המולד ניתן לפתוח את לוח "ס"א ראשים, ולברוק בגבולות הצירופים בין אלו גבולות "נופל" המולד שחושב, ונקבל את סימני הקביעות של כל 19 שנות המחזור. **הערה חשובה:** יפה ב"קורות" (תרצ"א) טוען שבכל סדרה בת- n שנים (שידוע מקומן במחזור (ט) שנבחר, נמצא $3n+4$ צירופים אפשריים של סימני השנה²⁴ (עבור $n=19$ נקבל 61 צירופים). כאמור אם מולד ראש מחזור "ינוע" על פני חלקי השבוע השונים נקבל טבלה בת 61 שורות עפ"י גבולות המולדות.

הצעה חדשה – לוח 16 שורות

בלוח "ס"א ראשים ניתן בכל בדיקה לברוק סימני 19 שנות המחזור. לעומתו בלוח 4 ראשים ניתן לברוק בכל פעם רק סימן שנה אחת. עתה נציג שיטה המשלבת בין 2 הלוחות, ולדעתנו "יעילה" יותר משתיהן.

צירופי שנים

במחזור 19 השנים ניתן להבחין ב-2 סוגי צירופים.

הראשון פ,פ,מ (פשוטה, פשוטה, מעוברת) {פ דגושה – פשוטה אחרי מעוברת}, והצידוף השני פ,מ. הצירוף הראשון עונה על שנים: [1.2.3,4.5.6,9.10.11,12.13.14,15.16.17] ואילו הצידוף השני עונה על השנים: [7.8,18.19]. כדלהלן:

22 מולד תורה.

23 בהר"ד = 57444, יתרון מחזור = 69715, שבוע = 181440, כולם בחלקים.

24 עמ' קסח, בהערה המסיימת בכוכבית.

ערן רביב

שנה במחזור	מעוברת/ פשוטה
1	פ
2	פ
3	מ
4	פ
5	פ
6	מ
7	פ
8	מ
9	פ
10	פ
11	מ
12	פ
13	פ
14	מ
15	פ
16	פ
17	מ
18	פ
19	מ

אלגוריתם השיטה

- חשב את השנה במחזור בה הנך עומד – L .
- כאשר S – השנה העברית לבהר"ד – $L = S \bmod 19$
- אם השנה היא בצירוף הראשון (כלומר אחת מהשנים: 1,2,3,4,5,6,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18) חשב מולד תשרי של השנה הראשונה בצירוף (1,4,9,12,15).
 - מעיון בטבלה תוכל לדעת את סימני השנה של 3 שנים.
- אם השנה היא בצירוף השני (כלומר אחת מהשנים: 7,8,18,19) חשב מולד תשרי של השנה הראשונה בצירוף (7,18).
 - מעיון בטבלה תוכל לדעת את סימני השנה של 2 שנים.

חלקים	שנים					פריסת גבולות		
	1	2	3	7	8			
	4	5	6	18	19			
	9	10	11					
	12	13	14					
	15	16	17					
19440	בחג	הכז	בשז	בחג	השג	0	18	0
26328	בחג	השא	גכז	בחג	השג	1	0	408
35844	בשה	זחא	גכז	בשה	זחג	1	9	204
52248	בשה	זשג	החא	בשה	זחג	2	0	408
64415	בשה	זשג	החא	בשה	זשה	2	11	695
68629	גכה	זשג	החא	גכה	זשה	2	15	589
71303	גכה	זשג	השג	גכה	זשה	2	18	23
87684	הכז	בחג	השג	הכז	בחה	3	9	204
104088	חכז	בשה	זחג	הכז	בחה	4	0	408
116255	הכז	בשה	זחג	הכז	בשז	4	11	695
132659	הכז	בשה	זשה	הכז	בשז	5	2	899
139524	השא	גכה	זשה	השא	גכז	5	9	204
149040	זחא	גכה	זשה	זחא	גכז	5	18	0
155928	זשג	הכז	בחה	זחא	גכז	6	0	408
165444	זשג	הכז	בחה	זשג	החא	6	9	204
184499	זשג	הכז	בשז	זשג	השג	7	2	899

הערה: המשבצות המודגשות מציינות מעבר בין סימן שנה אחר לחברו.

אופן בניית הלוח

כאמור ניתן לאפיין את כל 19 שנות המחזור בעזרת 2 שרשראות של צירופים בלבד. המחזור מורכב למעשה משבעה מחזורים קטנים של 2 3 3 ; 2 3 3 של שנים. (הסימן: גג"ב גג"ב) ולפי המולד של ראש המחזור הקטן ניתן לדעת בעזרת הלוח את סימני הקביעות של יתר שנות המחזור הקטן.

ערן רביב

השרשרת הראשונה פ*,פ,מ (פשוטה אחר מעוברת, פשוטה, ומעוברת) והכוכבית מציינת "אחרי מעוברת", שרשרת זו מאפיינת את השנים:

פ*	1	4	9	12	15
פ	2	5	10	13	16
מ	3	6	11	14	17

השרשרת השנייה פ*,מ (פשוטה אחר מעוברת, מעוברת). שרשרת זו מאפיינת את השנים:

פ*	7	18
מ	8	19

במאמרנו בכד"ד 22 (תש"ע) הצגנו בגיליון EXCEL טבלה "אוטומאטית" המקבלת כקלט מולד תשרי ראש מחזור וכפלט מציגה את סימני שנות המחזור, ע"פ כללי הלוח העברי. עתה נפעיל את "מנוע" החיפוש הנ"ל באופן שונה מעט, בהרצה הראשונה נריץ את מולד שנה ראשונה במחזור (שנה 1 למחזור יט, המלמדת לא רק על עצמה אלא גם על שנים 4,9,12,15) חלק אחר חלק, ונברוק את צירוף סימני השנה של שלוש השנים הראשונות, ההרצה תימשך בל עוד צירוף סימני שלוש השנים לא משתנה. כאשר צירוף סימני השנה של שלוש השנים ישתנה, נכתוב את הגבול (בחלקים) ונפתח שורה חדשה עם הצירוף החדש, וחזור חלילה כמניין החלקים בשבוע.

בין "ארבעה שערים" ללוח "ס"א ראשים"

מהרצה זו התקבלה הטבלה הבאה:

חלקים	פריסת גבולות					
	1,4,9,12,15	2,5,10,13,16	3,6,11,14,17	0	18	0
19440	בחג	הכו	בשז	0	18	0
26328	בחג	חשא	גכז	1	0	408
35844	בשה	זחא	גכז	1	9	204
52248	בשה	זשג	החא	2	0	408
68629	גכה	זשג	החא	2	15	589
71303	גכה	זשג	השג	2	18	23
87684	הכז	בחג	השג	3	9	204
104088	הכז	בשה	זחג	4	0	408
132659	הכז	בשה	זשה	5	2	899
139524	חשא	גכה	זשה	5	9	204
149040	זחא	גכה	זשה	5	18	0
155928	זשג	הכז	בחה	6	0	408
184499	זשג	הכז	בשז	7	2	899

התקבלה טבלה בת 13 שורות.²⁶

עתה נפעיל את "מנוע" החיפוש ב-EXCEL, על הצירוף השני. נריץ את מולד שנה שביעית במחזור (המלמדת על עצמה ועל שנה 18) חלק אחר חלק, ונבדוק את צירוף סימני השנה של השנה השביעית והשמינית, ההרצה תימשך כל עוד צירוף סימני שתי השנים לא משתנה. כאשר צירוף סימני השנה של שתי השנים ישתנה, נכתוב את הגבול (בחלקים) ונפתח שורה חדשה עם הצירוף החדש, וחוזר חלילה כמניין החלקים בשבוע.

מהרצה זו התקבלה הטבלה הבאה:

חלקים	פריסת גבולות				
	7,18	8,19	0	18	0
19440	בחג	זשג	0	18	0
35844	בשה	זחג	1	9	204
64415	בשה	זשה	2	11	695
68629	גכה	זשה	2	15	589
87684	הכז	בחה	3	9	204
116255	הכז	בשז	4	11	695
139524	חשא	גכז	5	9	204
149040	זחא	גכז	5	18	0
165444	זשג	החא	6	9	204
184499	זשג	השג	7	2	899

26 בהתאמה לנוסחת יפה $3n+4$, עבור $n=3$.

ערן רביב

גם כאן התקבלה טבלה, לפי נוסחת יפה, בת עשר שורות. עתה נבצע **מיוזג** בין שתי הטבלאות. כדי למזג את הטבלאות נפתח בטבלה העליונה 3 שורות חדשות עם הגבולות הנמצאים בטבלה השנייה ונעדרים מהטבלה הראשונה, וכך קיבלנו את טבלת 16 השורות.

יתרון לוח 16 שורות על פני לוח ארבעה שערים ולוח ס"א ראשים:

יעילות:

נגדיר פרמטר הנקרא "יעילות".

מקובל להגדיר יעילות בשני אופנים:²⁷

- Acting or producing effectively with a minimum of waste, expense, or unnecessary effort.
- Exhibiting a high ratio of output to input.

ובתרגום חופשי:

1. פעולה או ייצור יעיל במינימום השקעה, הוצאה (כספית) או מאמץ בלתי הכרחי.

2. הפלט (התוצאה) גדול מהקלט (ההשקעה) באופן משמעותי.

בנידון דירן ישנם שני **משתנים** שניתן להגדיר כ"השקעה":

א. גודל הטבלה.

ב. מספר החיפושים שצריך לבצע כדי למצוא סימני 19 שנים.

הגדרה: טבלה יעילה היא טבלה מינימאלית בגודלה, וסך החיפושים הנדרשים למציאת סימני 19 שנות המחזור יהיה מינימאלי. במילים אחרות טבלה יעילה תוגדר כטבלה שבה המכפלה בין שני המשתנים תהיה מינימאלית.

כדלהלן:

$$\text{Efficiency} = \frac{1}{\text{Cell}} * \frac{1}{\text{Search}}$$

לאור הגדרה זו נבחן את פרמטר היעילות בשלוש הטבלאות.

טבלת 61 ראשים מכילה 1159 תאים ונדרש חיפוש אחד לשם מציאת סימני השנה של 19 שנים. לוח ארבעה שערים מכיל 52 תאים, וכדי למצוא צירוף של 19 שנים צריך לבצע 19 חיפושים. ואילו בטבלה שלנו יש 80 תאים, וכדי למצוא צירוף של 19 שנים די ב-7 חיפושים.

לוח	שורות	עמודות	סך תאים
4	13	4	52
61	61	19	1159
16	16	5	80

בין "ארבעה שערים" ללוח "ס"א ראשים"

בלוח ס"א ראשים בחיפוש אחר מוצאים את צירופיהן של 19 שנים ולכן נקבל:

$$\text{Efficiency} = \frac{1}{1159} * \frac{1}{1} = \frac{1}{1159}$$

בלוח ארבעה ראשים, כדי למצוא את צירופיהן של 19 שנים, נדרשים 19 חיפושים, ולכן נקבל:

$$\text{Efficiency} = \frac{1}{13 * 4} * \frac{1}{19} = \frac{1}{998}$$

ואילו בלוח המוצע, כדי למצוא את צירופיהן של 19 שנים, נדרשים 5+2, סה"כ 7 חיפושים, ונקבל:

$$\text{Efficiency} = \frac{1}{16 * 5} * \frac{1}{7} = \frac{1}{560}$$

סיכום: הצגנו שיטה חדשה ויעילה יותר למציאת סימני השנה עפ"י חישוב מולד תשרי של "ראש צידוף" בלבד. כפי שרואים בטבלת הסיכום המספר הנמוך ביותר שייך ללוח 16 השורות! טבלת 16 השורות יעילה פי 2 בקירוב משאר הלוחות!

מכפלת: חיפושים, גודל	מספר חיפושים למציאת סימני 19 שנים	סך תאים	עמודות	שורות	לוח
988	19	52	4	13	4
1159	1	1159	19	61	61
560	7	80	5	16	16