רון עדין ויובל רויכמן

צירוף עדים – היבטים מתמטיים

הלכה מפורשת בשלחן ערוך (חושן משפט סימן ל סעיף ג) של צירוף עדויות בערכים שונים מבוססת על חישובים מתמטיים מתוחכמים. במאמר זה נדון בחישובים אלה מכמה נקודות מבט: אלגברית, קומבינטורית, גאומטרית, הסתברותית, וכן מנקודת המבט של תורת הסיבוכיות במדעי המחשב. בפרט נוכיח שאין הבדל מעשי בין האלגוריתמים המוצעים ע״י הרמב״ן וע״י בעל הנימוקי-יוסף. שני אלגוריתמים אלה זהים, למעשה, לשיטת ההפרשים של Karmarkar-Karp.

א. רקע: דין צירוף עדויות

שנינו בברייתא:

> תניא: לעולם אין עדותן מצטרפת עד שיראו שניהם כאחד. רבי יהושע בן קרחה אומר: אפילו בזה אחר זה.[1]

מדובר בעדויות על הלואה, או על הודאת הנתבע בקיום חוב. אמנם יש שני עדים, כנדרש, אך הם ראו את ההלואה (הלואות) או ההודאה (הודאות) בזמנים שונים. רבי יהושע בן קרחה מתיר לצרף את שתי העדויות ולחייב את הנתבע לשלם. בדעת רבי יהושע בן קרחה נחלקו האמוראים בסוגיה שם (סנהדרין דף ל עמוד א – דף לא עמוד א). דעת נהרדעי שאף עדויות על התחייבויות שונות מצטרפות:

> נהרדעי אמרי: בין הודאה אחר הודאה, בין הודאה אחר הלואה, בין הלואה אחר הלואה, בין הלואה אחר הודאה – מצטרפות. כמאן? כרבי יהושע בן קרחה.

דעת נהרדעי אליבא דרבי יהושע בן קרחה נפסקה להלכה.

> בדיני ממונות, אף על פי שלא ראו שני העדים המעשה כאחד – עדותן מצטרפת. כיצד? אמר האחד: בפני הלוהו ביום פלוני, או: בפני הודה לו, ואמר העד האחר: בפני הלוהו ביום אחר, או: הודה לו – הרי אלו מצטרפין. וכן אם אמר האחד: בפני הלוהו, והשני אומר: בפני הודה לו, או שאומר הראשון: בפני הודה לו, והשני אומר: אחר זמן הלוה בפני – הרי אלו מצטרפין.[2]

1 סנהדרין דף ל עמוד א.
2 שולחן ערוך חושן משפט סימן ל סעיף ה.

הסבר דין מופלא זה העסיק ראשונים ואחרונים.[3,4] בדיוננו כאן נתמקד בהיבטים מתמטיים של הדין.

ב. צירוף שני עדים המעידים על סכומים שונים

ברייתא נוספת באותו הקשר מובאת בסוגיה סנהדרין שם:

> תניא, אמר רבי שמעון בן אלעזר: לא נחלקו בית שמאי ובית הלל על שתי כיתי עדים שאחת אומרת מאתים ואחת אומרת מנה – שיש בכלל מאתים מנה. על מה נחלקו? על כת אחת, שבית שמאי אומרים: נחלקה עדותן, ובית הלל אומרים: יש בכלל מאתים מנה.

אף ברייתא זו נפסקה להלכה:

> אפילו אמר האחד מנה הלוהו, והשני אומר מאתים – חייב לשלם מנה, שיש בכלל מאתים מנה.[5]

נסכם: אם שני עדים מעידים על חובות של ראובן לשמעון בסכומים a ו- b בהתאמה, אז הסכום שישלם ראובן לשמעון הוא **ערך התשלום**, שהוא הקטן מביניהם:

$$\min(a,b).$$

על היתרה

$$\max(a,b)-\min(a,b)=|a-b|$$

יש עד אחד בלבד. על-פי ההלכה הידועה (רמב"ם טוען ונטען א, א), עד אחד מחייב את הנתבע שבועה אך לא תשלום בפועל, ועל כן נכנה יתרה זו בשם **ערך השבועה**.

ג. תשובת הרמב"ן – הכללה ליותר משני עדים

נפסק בשולחן ערוך חושן משפט סימן ל סעיף ג:

> ראובן תבע משמעון אלף ות"ק זהובים, ומביא חמישה עדים; אחד אומר: ראיתי שהלוהו ק', ואחד מעיד על ר', ואחד מעיד על ש', ואחד על ת', ואחד על ת"ק. אם העידו כל אחד מהם בעדות מיוחדת, כגון שאמר הראשון: באחד בניסן בשנה הראשונה, והב' אומר בזמן אחר, וכן כולם – משלם ת"ש, וישבע שבועת התורה על מאה, ויגלגל עליו הת"ש שנשארו.[6]

3 עיין במפרשי הבבלי שם דף ל ע"א, בנושאי הכלים בשו"ע חו"מ סי' ל שם, ובפרט בחידושי ר' שמעון יהודה הכהן (שקאפ) כתובות סימן כב ובבא בתרא סימנים כא-כג ובספרו שערי יושר.

4 הסבר הסתברותי מופיע בנספח.

5 רמב"ם הלכות עדות פרק ג הלכה ג ושולחן ערוך חושן משפט סימן ל סעיף ב.

6 ביאור דברי השו"ע: מדובר במצב שבו ברור שהעדים מעידים על הלוואות שונות ואינם מכחישים זה את זה. אין הכרח שהסכומים יהיו שונים.

מקורו של פסק זה בספר התרומות לר' שמואל הסרדי (שער סו אות ב). שם מובא מעשה שהיה בימי רבותיו של ר' יהודה אלברצלוני, עם הפרטים המדויקים המובאים בשו"ע לעיל, "והניח הדבר בספק ולא בירר הדין". ר' שמואל הסרדי העלה מספר דרכים חלופיות לצירוף העדים (המוליכות לסכומים שונים), ושאל על כך את הרמב"ן. בתשובתו פסק הרמב"ן שיש לחייב את הנתבע לשלם ת"ש דינרים, ופרט שתי דרכי צירוף בנוסף לדרך שהציע ר' שמואל הסרדי. נביא אותן כפי שהן מובאות בטור (חו"מ סימן ל):

> לפי שנצרף עד של הר' עם עד של הש' ומשלם ר' מתוך ש', ועוד נצרף עד הת' עם הת"ק ומשלם ת' מתוך ת"ק, ועוד נצרף עד של הק' עם עד של הת"ק בק' הנשארים בעדותו, שמן הדין ראוי לצרפם, שזה אמר הלוהו ק' באחד בניסן וזה אמר הלוהו ת' וק' בזמן אחר ולא גרענו מעדותו כי אם ת', א"כ נשאר לו ק' שראוי לצרפו עם עד הראשון.
>
> וכן ראוי להצטרף עם עד של הש' שנשאר לו ק' בעדותו שלא נשתלם.
>
> ויש עוד דרך אחרת להעלות החשבון לת"ש ולהזקיקו שבועה על המאה ... כיצד? נצרף עד של הת' עם עד של הת"ק ויתחייב על פיהם ת', ואח"כ נצרף הק' שנשאר מן הת"ק עם הק' של העד של הש' ויתחייב בק' – הרי ת"ק; ואח"כ נצרף הר' של העד השני עם ר' שנשארו מהעד של הש' ויהיה בין הכל ת"ש; ועד של הק' אין לו צירוף וזוקק לשבועת התורה על הק', ויגלגלו על הת"ש שנשארו.

אם כן, הפסק נובע מדין צירוף עדות הנזכר לעיל בפרק הראשון. העקרון מנוסח ע"י הרמב"ן כדלקמן:

> וכן עיקר, להעלות החשבון בכל מה שנוכל ולהצריך כל עדות העדים לתועלת התובע.

ר' יוסף ן' חביבא[7] מציע דרך נוספת לצירוף במקרה זה:

> מצטרפין עד ר' ועד ש' לר', וכן מצטרפין עד ת' ועד ת"ק לת', ונוטל ת"ר. אח"כ מצטרפין עד ש' ועד ת"ק למנה, שלא נצטרפו באותו מנה כלל, וגובה מנה. נמצא גובה בין הכל ת"ש.

ר' יואל סירקיס[8] מעיר על הבדל עקרוני בין שתי דרכי הצירוף של הרמב"ן לבין דרך הצירוף של בעל הנימוקי יוסף:

> אפשר דס"ל [לרמב"ן] דלא יתכן לצרף הק' הנשאר מצירוף של עד אחד עם הק' אחרת, שגם הוא נשאר מן הצירוף של עד אחר ... כן נראה לי מדברי רבינו. אבל בנימוקי יוסף פרק "זה בורר" כתב להדיא דמצטרפין הק' הנשאר משל ש' עם הק' הנשאר משל ת"ק, עיין שם.

7 נימוקי יוסף סנהדרין שם.
8 ב"ח ח"מ סימן ל.

התשתית המתמטית להכללות הנ"ל תידון במאמר זה. בפרט, נראה שאין הבדל מעשי ("נפקא מינה") בין השיטות השונות המובאות בב"ח; כלומר, הן מחייבות בסופו של דבר תשלום זהה.[9]

ד. ערך התשלום וערך השבועה

להלן נראה שכדי לחשב את ערך התשלום די לחשב את ערך השבועה. על-פי עקרון הרמב"ן יש "להעלות החשבון בכל מה שנוכל ולהצריף כל עדות העדים לתועלת התובע", כלומר למקסם את ערך התשלום על פני כל דרכי הצירוף האפשריות. נראה כעת שזו בעיה השקולה לבעיית מציאת מינימום לערך השבועה.

נניח ש-n עדים מעידים על חובות של ראובן לשמעון בסכומים $a_1, a_2, \dots, a_n$. כפי שהעיר הרמב"ן, התשלום שישלם ראובן לשמעון תלוי גם בדרך הצירוף של העדים. ישנו קשר לינארי בין ערך התשלום לערך השבועה.

טענה 1

בהינתן סכומי עדויות $a_1, a_2, \dots, a_n$ ודרך צירוף, ערך התשלום p וערך השבועה q מקיימים

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2p + q \ .$$

דוגמאות

(1) במקרה שעליו נשאל הרמב"ן ערכי העדויות הם: 100, 200, 300, 400, 500, ערך התשלום הוא 700 וערך השבועה הוא 100. אכן:

$$100 + 200 + 300 + 400 + 500 = 2 \cdot 700 + 100$$

(2) במקרה של שני עדים המעידים על חיוב של ראובן לשמעון בסכומים a ו- b ניתן להניח, בלא הגבלת הכלליות, ש- $a \le b$. ערך התשלום הוא $p = a$, ערך השבועה הוא $q = b - a$ ומתקיים

$$2p + q = 2a + (b - a) = a + b$$

9 בודק אנונימי של מאמר זה הציע נפקא מינה בין שתי השיטות (למעשה, קושיה על שיטת הנימוקי יוסף): כאשר 3 עדים מעידים, כל אחד, על 100 - נוכל לחלק כל אחת מהעדויות לשני חלקים של 50, ולצרף את החלקים ב-3 זוגות כך שבסה"כ יתקבל ערך תשלום של 150 ולא 100. לפי שיטה זו ניתן לגבות בדוגמה הנ"ל 750 במקום 700. שיטה זו לא הוצעה על ידי הראשונים, ולפיכך אנו מניחים במאמר זה שלא ניתן לחלק עדויות באופן שרירותי.

הוכחת טענה 1

אחרי סיום תהליך צירוף העדויות, לכל פרוטה בעדות של עד כלשהו יש שתי אפשרויות: להיות "פרוטה מצטרפת", כלומר להצטרף לפרוטה בעדות של עד אחר, או לא. במקרה הראשון, שתי הפרוטות המצטרפות נותנות פרוטה אחת מתוך ערך התשלום. במקרה האחרון, יש על הפרוטה עד אחד בלבד ועל-כן היא נכללת בערך השבועה. בסך הכל נספרו כאן, מצד אחד, כל $a_1+a_2+...+a_n$ הפרוטות בכל העדויות, ומצד שני התקבל ערך השבועה ועוד פעמיים ערך התשלום.

מ.ש.ל.

בפרט, ככל שערך התשלום עולה ערך השבועה יורד (ולהיפך). על-כן

מסקנה 2

בהינתן סכומי עדויות, בעית המקסימיזציה של ערך התשלום על פני כל דרכי הצירוף האפשריות (לפי שיטת הרמב"ן או לפי שיטת הנ"י) שקולה לבעית המינימיזציה של ערך השבועה על פני כל הדרכים הללו (בהתאמה).

ה. צירוף עדויות – המבנה האלגברי

בעקבות טענה 1 נתמקד מעתה ב"ערך השבועה",[10] דהיינו סכום החובות עליהם מעיד עד אחד בלבד. נגדיר מסגרת אלגברית פורמלית לערך זה, כפעולה בין שני מספרים (סכומי העדויות).

הגדרה 3

תהי S קבוצת המספרים השלמים האי-שליליים[11] עבור $a,b\in S$ נסמן:

$$[a,b]:=|a-b|\ .$$

עובדה 4

$[\cdot,\cdot]$ היא פעולה בינרית על הקבוצה S, המקיימת:

(1) חוק החילוף (קומוטטיביות): $[a,b]=[b,a]$

(2) קיום איבר נייטרלי: $[a,0]=[0,a]=a$

(3) קיום הפכי (השווה למספר עצמו): $[a,a]=0$

10 בדיון זה נתעלם מההשפעה של גלגול השבועה, וכן מדעת הסמ"ע שעד שנצטרף אינו מחייב שבועה.

11 אפשר גם לדון במספרים ממשיים, או לחילופין להניח שכל המספרים ב- S אינם עולים על גודל נתון M.

הערה

התכונה העיקרית שהפעולה הנ"ל איננה מקיימת היא חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות). למשל:

$[[100,200],300]=200$ בעוד ש- $0=[100,[200,300]]=0$.

התוצאה תלויה, אם כן, בסדר צירוף העדויות. מספר הדרכים לצרף עדויות גדול מאוד, אך דרכים רבות נותנות תוצאה זהה.

דוגמא 5

דרך ראשונה לרמב"ן:[12] $100=[[100,[400,500]],[200,300]]$.

דרך שניה לרמב"ן: $100=[100,[200,[300,[400,500]]]]$.

דרך הנימוקי-יוסף: $100=[100,[[400,500],[200,300]]]$.

הערה

בכל דרכי הצירוף הנ"ל, השלב האחרון הוא מהצורה $100=[0,100]$. שלב זה כמובן אינו משנה את ערך השבועה, ולכן אינו נזכר במפורש במקורות. על משמעותו (ההבדל בין עץ ליער) – ראה בסעיף הבא.

ו. צירוף עדויות – עצים בינריים

בסעיף הקודם ראינו שערך השבועה מתקבל על-ידי פעולה בינרית המקיימת אקסיומות טבעיות. מכיוון שהפעולה אינה אסוציאטיבית, התוצאה של הפעלתה מספר פעמים תלויה בסדר צירוף העדויות. תיאור קומבינטורי נוח לדרכי הצירוף השונות הוא על ידי עצים בינריים.

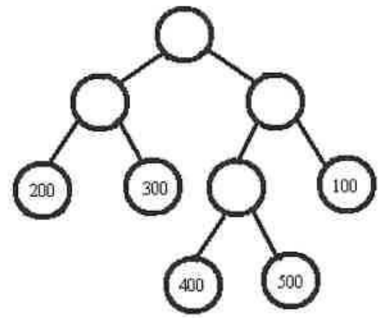
עץ בינרי מלא (בקיצור: עץ בינרי) הוא עץ עם קודקוד מיוחד, **שורש**, שבו כל קודקוד הוא או **עלה** (ללא בנים) או **קודקוד פנימי** (עם שני בנים בדיוק).

מסרק הוא עץ בינרי שבו לכל קודקוד פנימי יש בן אחד לפחות שהוא עלה; באופן שקול: אחרי הורדת העלים נותר עץ עם עלה יחיד (שבו, כמובן, לכל קודקוד פנימי יש בן יחיד).

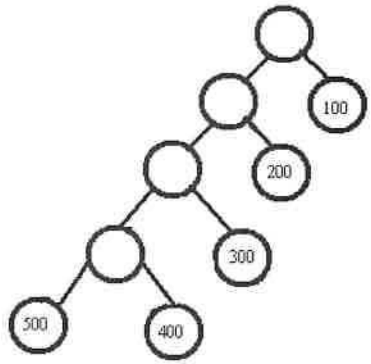
ניתן לקודד כל צירוף עדויות ע"י עץ בינרי, כאשר העלים הם ערכי העדויות וכל קודקוד פנימי מסמן פעולת צירוף. בכל קודקוד נרשום את ערך השבועה המתאים.

12 שלא על-פי הסבר הב"ח. בסעיף הבא יובא מודל ההולם את הסבר הב"ח.

דוגמא 6



עץ בינרי שאינו מסרק

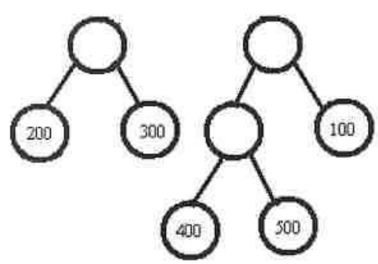


מסרק

העץ הבינרי שאינו מסרק מתאים לצירוף $[[[200,300],[400,500]],100]=100$ ואילו המסרק מתאים לצירוף $[[[[500,400],300],200],100]=100$ (השווה לדוגמא 5 לעיל).

יער בינרי הוא אוסף של עצים בינריים (שאינם קשורים ביניהם). ערך השבועה המתקבל מיער שווה לסכום ערכי השבועה בעצים המרכיבים אותו.

דוגמא 7



יער בינרי

דוגמא זו, שהיא בעצם יער של מסרקים, מתארת את הדרך הראשונה לרמב"ן על-פי הסבר הב"ח:

$$.[200,300]+[[400,500],100]=100+0=100$$

אבחנה 8

על-פי שיטת הנימוקי יוסף ניתן לצרף עדויות על-ידי יער בינרי כללי, בעוד לפי שיטת הרמב"ן (לפי הב"ח) מצרפים עדויות רק על-ידי יער של מסרקים.

שאלה: האם יש "נפקא מינא" בין שתי השיטות?

ראשית, ברור שחיבור שני עצים על ידי הוספת אב משותף לשני שורשיהם יכול רק להקטין את ערך השבועה.

מסקנה 9

לכל יער בינרי קיים עץ בינרי, כך שלכל קבוצת ערכי עדויות $a_1, a_2, ..., a_n$ ערך השבועה המתקבל על-ידי העץ קטן או שווה לערך השבועה המתקבל על-ידי היער.

מכיוון שיש "להעלות החשבון בכל מה שנוכל ולהצריף כל עדות העדים לתועלת התובע" ניתן אם כך להניח (לשיטת הנימוקי יוסף) שהעדים מצורפים על-ידי עץ בינרי ולא על-ידי יער. בפרט, אם מספר העדים הוא n, ניתן להניח שמספר הפעמים שמצרפים עדים הוא $n-1$. לשיטת הרמב"ן, ייתכן שנצטרך להשתמש ביער של מסרקים במקום במסרק בודד. בסעיף הבא נראה (בין השאר) שהשערה זו אינה נכונה, ונוכיח שגם לשיטת הרמב"ן אפשר תמיד לצרף על ידי מסרק בודד.

ז. ערך התשלום למעשה

נכנה בשם **ערך התשלום למעשה לרמב"ן** את ערך התשלום אותו מקבל התובע לפי שיטת הרמב"ן (לפי ביאור הב"ח), דהיינו, את ערך התשלום המקסימלי ביחס לכל צירופי העדויות המותרים לפי הרמב"ן. **ערך התשלום למעשה לנימוקי יוסף** מוגדר באופן דומה.

אבחנה 10

תמיד אפשר לכתוב

$$[a,b] = \pm a \pm b$$

עם בחירה מתאימה של הסימנים. לכן כל צירוף עדויות המתואר על-ידי עץ בינרי (או אפילו יער בינרי) נותן ערך שבועה מהצורה

$$q = \pm a_1 \pm a_2 \ldots \pm a_n$$

עבור בחירה מתאימה של סימנים לערכי העדויות.

משפט 11

בהינתן ערכי עדויות $a_1, a_2, \ldots, a_n$, יהיו $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \in \{+1, -1\}$ סימנים כלשהם, ונסמן

$$q = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n.$$

אזי הטענות הבאות לגבי q הן שקולות:

(1) q הוא ערך שבועה המתקבל ממסרק.

(2) q הוא ערך שבועה המתקבל מעץ בינרי.

(3) $0 \le q \le \max\{a_i \mid \varepsilon_i > 0\}$.

הערה

בתנאי (3) לא מספיק לדרוש $0 \le q \le \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, כפי שמראה הדוגמא הבאה:

$$q = 300 + 300 + 300 - 500 = 400$$

ערך זה אינו יכול להתקבל על-ידי עץ בינרי מ-4 העדויות הנתונות, למרות ש- $q < 500$.

הוכחת משפט 11

(1) $\Leftarrow$ (2): מסרק הוא מקרה פרטי של עץ בינרי.

(2) $\Leftarrow$ (3): יהי q ערך שבועה המתקבל מעץ בינרי. כמובן, $q \ge 0$. את אי-השוויון השני של תנאי (3) ניתן להוכיח באינדוקציה על n: עבור $n = 1$ אין מה להוכיח. אם $n \ge 2$ אז $q = q_+ - q_-$, כאשר $0 \le q_- \le q_+$ הן התוצאות של שני "ענפי" העץ בשלב הלפני-אחרון. בתת-העץ המתאים ל- q_+ יש פחות מ- n עלים, ולכן לפי הנחת האינדוקציה $q_+ \le \max\{a_i \mid \varepsilon_i > 0, i \in I\}$ כאשר $I \subset \{1, \ldots, n\}$ היא קבוצת העלים בתת-העץ של q_+. לכן

$$q \le q_+ \le \max\{a_i \mid \varepsilon_i > 0, i \in I\} \le \max\{a_i \mid \varepsilon_i > 0\}.$$

(3) $\Leftarrow$ (1): יהי $q = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n$ ערך המקיים את תנאי (3). אפשר כמובן להניח כי $n \ge 2$ וכי $a_i > 0$ לכל i. נחלק את העדויות $a_1, \ldots, a_n$ לשתי קבוצות – אלו שעבורן $\varepsilon_i > 0$ ואלו שעבורן $\varepsilon_i < 0$. בתוך כל אחת מהקבוצות נסדר מחדש את העדויות בסדר עולה. ראשית,

שתי הקבוצות אינן ריקות – אחרת

$$q = a_1 + \ldots + a_n > \max\{a_i \mid \varepsilon_i > 0\}$$

נבנה מסרק באופן הבא: בשלב הראשון נציב זו מול זו עדות אחת מכל קבוצה. לאחר מכן, בכל שלב, נציב מול התוצאה בשלב הקודם עדות אחת מהקבוצה שאיננה "מובילה" בסכום עדויותיה באותו שלב. אם יש תיקו, נבחר שרירותית באחת הקבוצות; קל להראות באינדוקציה שבערך השבועה של המסרק המתקבל, כל העדויות מקבוצה אחת הן בעלות אותו סימן וכל העדויות מהקבוצה השניה הן בעלות הסימן ההפוך (אם בשלב מסוים היה תיקו, ניתן לבחור שרירותית איזו קבוצה קיבלה סימן חיובי עד אותו שלב; נדאג לבחור את הקבוצה שאליה שייכת העדות הראשונה אחר התיקו). בנית המסרק עלולה "להיתקע" רק אם בשלב מסוים "נגמרות" כל העדויות באחת הקבוצות, בעוד שהקבוצה השניה "מובילה" ממש (בסכום העדויות שכבר נוצלו) ויש בה לפחות עדות אחת שלא נוצלה. במצב כזה, הקבוצה ה"מובילה" בהכרח מתאימה ל-$\varepsilon_i > 0$, וההפרש (ערך השבועה) המבוקש q גדול ממש מהעדות האחרונה (שכמובן טרם נוצלה) בקבוצה ה"מובילה". בגלל הסדר העולה של העדויות בקבוצה המובילה מצב כזה מחייב $q > \max\{a_i \mid \varepsilon_i > 0\}$, בסתירה להנחה (3).

לדוגמא, אם $q = 30+10+10+10+10-50 = 20$ אז המימוש כמסרק (שבו ניתן להשתמש ב-30 רק בשלב האחרון) הוא $q = [[[[[10,50],10],10],10],30]$.

מ.ש.ל.

מסקנה 12

ערך התשלום למעשה לפי הרמב"ן שווה לערך התשלום למעשה לפי הנימוקי יוסף.

הוכחה

לפי הנימוקי יוסף אפשר להשתמש ביער בינרי, ולפי הרמב"ן צריך דווקא יער מסרקים. מכיוון שכל מסרק הוא עץ בינרי, יערך התשלום למעשה הוא המקסימום של כל האפשרויות – ערך התשלום למעשה לפי הרמב"ן קטן או שווה לערך התשלום למעשה לפי הנימוקי יוסף.

מצד שני, ערך התשלום למעשה לפי הנימוקי יוסף הוא המקסימום של ערך התשלום על כל היערות הבינריים, עבור ערכי העדויות הנתונים. לפי מסקנה 2 ומסקנה 9, ערך זה מתקבל (גם) על עץ בינרי מתאים; ולפי משפט 11 הוא מתקבל (גם) על מסרק מתאים. ערך זה, אם כן, קטן או שווה לערך התשלום למעשה לפי הרמב"ן.

לסיכום: שני ערכי התשלום למעשה שווים זה לזה.

מ.ש.ל.

מסקנה 13

בהינתן ערכי עדויות $a_1, a_2, ..., a_n$, ערכי התשלום האפשריים – הן לפי הרמב"ן והן לפי הנימוקי יוסף – הם כל הסכומים החלקיים $p = a_{i_1} + ... + a_{i_k}$ עבורם קיים $j \notin \{i_1, ..., i_k\}$ כך ש-

$$a_{i_1} + ... + a_{i_k} \le \frac{a_1 + ... + a_n}{2} \le a_{i_1} + ... + a_{i_k} + \frac{a_j}{2}.$$

הוכחה

לפי טענה 1, אם $p = \sum_{i \in I} a_i$ הוא ערך תשלום אז ערך השבועה המתאים הוא $q = \sum_{i=1}^{n} a_i - 2p = \sum_{i \notin I} a_i - \sum_{i \in I} a_i$. בסימוני משפט 11, $I = \{i \mid \varepsilon_i < 0\}$. על-פי משפט 11, q הוא ערך שבועה אפשרי אם ורק אם קיים $j \notin I$ כך ש- $0 \le q \le a_j$. הדרישות המתקבלות עבור p הן, אם כן, $0 \le \sum_{i=1}^{n} a_i - 2p \le a_j$ כלומר $2p \le \sum_{i=1}^{n} a_i \le 2p + a_j$.

מ.ש.ל.

ח. היבטים חישוביים

בעיה 14

מצא אלגוריתם אפקטיבי לחישוב ערך התשלום למעשה.

על-פי הדיון בסעיף הקודם בעיה זו שקולה לבעיה הבאה

בעיה 15

בהינתן n מספרים שלמים $a_1, a_2, ..., a_n$ מצא את הסכום החלקי הקרוב ביותר (מלמטה) למחצית סכומם.

בעיה זו מכונה בשם "בעית החלוקה" Partition Problem (PAR) והיא בעיה מרכזית במדעי המחשב. היא מופיעה ברשימת עשרים ואחת הבעיות NP-complete במאמרו הקלאסי של קארפ [5].

ראוי לציין שבעית החלוקה מופיעה כבר במשנה (מסכת קנים פרק ג משנה ב).[13] ניתוח מתמטי של משנה זו מופיע כנספח ב-[1].

13 תודה לפרופ' משה קופל על ההפניה.

האלגוריתם של הרמב"ן לצירוף עדים שקול לאלגוריתם הבא (המתחיל עם רשימת מספרים וערך שבועה = ערך תשלום = שארית אפס):

1. בחר מספר מהרשימה והשווה אותו לערך השבועה. הוסף לערך התשלום את המינימום שלהם.
2. מחק את המספר שבחרת מהרשימה והחלף את ערך השבועה בערך המוחלט של ההפרש.

האלגוריתם של הנימוקי-יוסף לצירוף עדים שקול לאלגוריתם הבא:

1. בחר שני מספרים מהרשימה והוסף לערך התשלום את המינימום שלהם.
2. החלף ברשימה את שני המספרים הנ"ל בערך המוחלט של הפרשם.

מסקנה 16

האלגוריתמים של הרמב"ן ;של הנימוקי יוסף נותנים קירוב לערך השבועה, החסום מלעיל ע"י הערך המקסימלי של עדות.

קירובים אלה טובים כאשר ערך השבועה קטן ביחס לסכום ערכי העדויות; בפרט, כאשר יש עדים רבים שערכי עדויותיהם הם משתנים מקריים בלתי תלויים שווי התפלגות, יש סבירות גבוהה שהאלגוריתם יתן תוצאה קרובה לאופטימלית.

באופן נסיוני, אלגוריתם הרמב"ן נותן תוצאות אופטימליות גם כאשר מספר העדים קטן וערכי העדויות מסודרים בסדר יורד (כמו בדרך השניה של הרמב"ן).

האלגוריתם של הנימוקי יוסף (בתוספת "פרוצדורות תיקון") נתגלה באופן בלתי-תלוי ע"י שנים מגדולי החוקרים במדעי המחשב, והוא מכונה בספרות המדעית "שיטת ההפרשים" [4]. הנה תיאורה ב-[3]:

A particularly clever algorithm was described in 1982 by Narendra Karmarkar and Richard M. Karp, who were then both at the University of California, Berkeley. It is a "differencing" method: At each stage you choose two numbers from the set to be partitioned and replace them by the absolute value of their difference. This operation is equivalent to deciding that the two selected integers will go into different subsets, without making an immediate commitment about which numbers go where. The process continues until only one number remains in the list; this final value is the discrepancy of the partition. You can reconstruct the partition itself by working backward through the series of decisions. In the search for perfect partitions, the Karmarkar-Karp procedure succeeds even more often than the greedy algorithm.[14]

14 B. Hayes, "The Easiest Hard Problem", *American Scientist*, 2002

ט. נספח 1 – היבט גאומטרי

מי היא תת-הקבוצה של העדים שסכום ערכיה הוא ערך התשלום למעשה?

בהינתן דרך צירוף, נשנה (באופן זעיר) את ערכי העדויות. השינויים הקריטיים בתשובה לשאלה זו קורים כאשר, במרחב ה-n-ממדי מעל הממשיים, עוברים מצד לצד של על-מישור הנתון ע"י משוואה מהצורה $\pm x_1 \pm \ldots \pm x_n = 0$. המרחב מחולק על ידי על-מישורים אלו לתחומים, שבכל אחד מהם ערך התשלום למעשה הוא פונקציה לינארית של ערכי העדויות. בתחומים שונים יש פונקציות שונות.

בעיה 17

מהו מספר התחומים השונים בסידור על-מישורים (hyperplane arrangement) זה?

בבעיה זו עסקו אדלמן ורײנר [2]. חישובים שנעשו על-ידם מצביעים על העדרה של נוסחה פשוטה למספר התחומים.

י. נספח 2 – הסבר הסתברותי לצירוף עדויות

צירוף עדים המעידים על חיובים שונים העסיק ראשונים ואחרונים ועורר את פליאתם. ר' שמעון שקאפ הביא את העקרון לידי אבסורד: "וכי נצרף עדות על קידושין לעדות על חיוב ממוני ?"[15]

ר' יעקב מליסא מציע את ההסבר הבא לדין זה :

> ונראה טעם לזה, דשני עדים בעדות מיוחדת אינן נאמנים רק באופן שאם נאמר שאינו חייב, בעל כרחינו נהיה צריכין לומר ששני עדים משקרין, כגון באחד אומר מנה בניסן ואחד אומר מנה באייר והוא תובע שניהן, דאי נאמר שאינו חייב כלל ע"כ שני עדים משקרין, וזה לא אמרינן.[16]

ניתן לפרש את דבריו באופן הסתברותי כדלקמן: נניח שעדויות של עדים שונים הן משתנים מקריים בלתי תלויים שווי התפלגות. נסמן ב-α את ההסתברות שעד משקר (או טועה), וב-β את רמת הוודאות הדרושה כדי לקבל תביעה. כדי לשבר את האוזן נניח, למשל, כי $\alpha = 0.2$ ו- $\beta = 0.9$.

ראשית נסביר את הדין הקלאסי: כדי לקבל תביעה (או עדות אחרת) יש צורך בשני עדים. מדוע? כי כדי לקבל תביעה יש להאמין לתוכנה בהסתברות לפחות β. ההסתברות שעד אחד משקר (או טועה) היא α, ומכיוון שלפי הנחתנו $1-\alpha = 0.8 < 0.9 = \beta$ אין מקבלים עדות עד אחד. אם שני עדם העידו עדות זהה (על אותו ארוע), הרי שניהם דוברים אמת או

15 חידושי ר' שמעון יהודא הכהן, כתובות סימן כב.

16 נתיבות המשפט ביאורים סימן קמה ס"ק ב.

שניהם משקרים. ההסתברות המותנית ששניהם משקרים היא $\alpha^2/(\alpha^2+(1-\alpha)^2)$, ומכיוון ש-$1-(\alpha^2/(\alpha^2+(1-\alpha)^2))>0.941>0.9=\beta$ מקבלים את עדותם.

ההסבר עבור המקרה של עד אחד המעיד מנה והשני מאתיים הוא אפילו פשוט יותר: כאן העדים מעידים על הלוואות שונות, ולפיכך כל הצירופים אפשריים וההסתברות המותנית שווה להסתברות לכתחילה (המכנה הוא 1). ישנן ארבע אפשרויות לגבי הסכום שהנתבע חייב: 0, 100, 200, 300. ההסתברויות המתאימות הן: α^2, $\alpha(1-\alpha)$, $\alpha(1-\alpha)$, $(1-\alpha)^2$ ההסתברות (המותנית) שהנתבע חייב לפחות מאתיים היא סכום שתי ההסתברויות האחרונות, דהיינו: $\alpha(1-\alpha)+(1-\alpha)^2=1-\alpha=0.8<0.9=\beta$ (ההסתברות שהעד על המאתיים דובר אמת). לכן איננו מחייבים אותו מאתיים. לעומת זאת, ההסתברות שהנתבע חייב לפחות מנה היא סכום שלוש ההסתברויות האחרונות: $2\alpha(1-\alpha)+(1-\alpha)^2=1-\alpha^2=0.96>0.9=\beta$ (ההסתברות שלפחות אחד מהעדים אינו משקר). לכן מחייבים את הנתבע מנה, לא פחות ולא יותר.[17] [18]

מראי מקומות

1. משה קופל, סדר קנים, ביאור חדש למסכת קנים ע"פ תורת החשבון, הוצאת אלומה, ירושלים, 1998.
2. P. Edelman and V. Reiner, unpublished notes, 1991.
3. B. Hayes, "The Easiest Hard Problem", *American Scientist*, 2002.
4. N. Karmarkar and R. M. Karp, "The Differencing Method of Set Partitioning", *Technical Report UCB/CSD 82/113*, University of California at Berkeley: Computer Science Division (EECS), 1982.
5. R. M. Karp, "Reducibility Among Combinatorial Problems". *Complexity of Computer Computations (Proc. Sympos.*, IBM Thomas J. Watson Res. Center, Yorktown Heights, NY, 1972), pp. 85-103. Plenum, New York, 1972.

תודות לפרופ' משה קופל, לרב שבתי רפפורט ולבודק האנונימי על הערותיהם המחכימות.

17 יש לציין שהסבר זה קרוב ברוחו למשפט המושבעים של המרקיז דה קונדורסה (Condorcet's jury theorem), בן תקופתו של ר' יעקב מליסא. תודה לבודק האנונימי על הערתו.

18 הסבר קרוב ברוחו, אך שונה, הוצע ע"י הרשב"ץ כ-400 שנה לפני בעל הנתיבות: אמינות עד אחד היא גבוהה אך אינה מלאה, ולכן די בסיוע כלשהו כדי להקנות לו אמינות מלאה (שו"ת התשב"ץ חלק א סימן עז). תודה לרב שבתי רפפורט על ההפניה.