

אוניברסיטת בר אילן

ניתוח מבנים מתמטיים בלוח העברי

ערן רביב

עבודה זו מוגשת כחלק מהדרישות לשם קבלת תואר מוסמך

במגמה "מדע הלכה וחינוך"

בית הספר לחינוך

רמת-גן

תשע"ג

עבודה זו נכתבה בהנחייתו של פרופ' עלי מרצבך, מהמחלקה
למתמטיקה של אוניברסיטת בר אילן.

תודות

עבודה זו מוקדשת באהבה ובהערצה לאבי מורי ר' ישראל רביב שמקטנות נטע בנו את אהבת הלימוד והעיון, והכניסני ב-'סוד העיבור' ובשערי המחקר. ספרייתו העשירה הביאה אותי בשערי ה"ספר העברי", והוא מלווה ומעודד אותי בלימודי מאז ועד היום, מי ייתן ויזכה לרוב שנים בבריאות טובה יחד עם אמי לאה הי"ו.

תודות למנחה העבודה, פרופ' **עלי מרצבך**, שהנחני והדריכני בדרך טובים, בעצה טובה ובנפש חפצה ותמיד בפנים מאירות.

רבות למדוני ועודדוני במחקר ובכתיבה עמיתי /ידידי המלומדים, איש איש בתחומי- אינג' **יעקב לוינגר** מתל אביב – מחבר הספר החשוב "על השמינית" ומאמרים רבים וחשובים בתחום הלוח העברי וראיית הירח החדש, ר' **רחמים שר- שלום** מנתניה¹ - שפתח שער לרבים לצפונות הלוח בספרו החשוב "שערים ללוח העברי" ובמאמרים רבים וחשובים על "היסטוריית הלוח העברי", אינג' **יוסף יצחק איידלר** מבלגיה- מחבר הספר החשוב "הלכות קדוש החודש עפ"י הרמב"ם" ומאמרים רבים וחשובים נוספים, והרב ד"ר **שי ואלטר** מהמכון ללימוד הלכות קדוש החודש שע"י ישיבת כרם ביבנה, שבנוסף למאמריו מזכה את הרבים בכנסים בנושאי אסטרונומיה יהודית והלוח, לכולם שלוחה הברכה והתודה, מי ייתן ושיתוף הפעולה יגדיל תורה ויאדירה.

ברכה שלוחה לראשי ומייסדי המגמה – "מדע הלכה וחינוך", הרב פרופ' **יגאל שפרן** ופרופ' **עלי מרצבך** – מי ייתן ותרבה התורה והדעת ותרוו ברכה בעמלכם.

תודה וברכה לפרופ' **רון עדין** מהמחלקה למתמטיקה, ולרב ד"ר **זרור פיקסלר** מהפקולטה להנדסה שקראו עבודה זו, הערותיהם והארותיהם עזרו לי להוציא דבר מתוקן מתחת ידי.

¹ שבנוסף קרא עבודה זאת והעיר והאיר בטוב טעם ודעת, וגם על כך שלוחה לו התודה.

תוכן

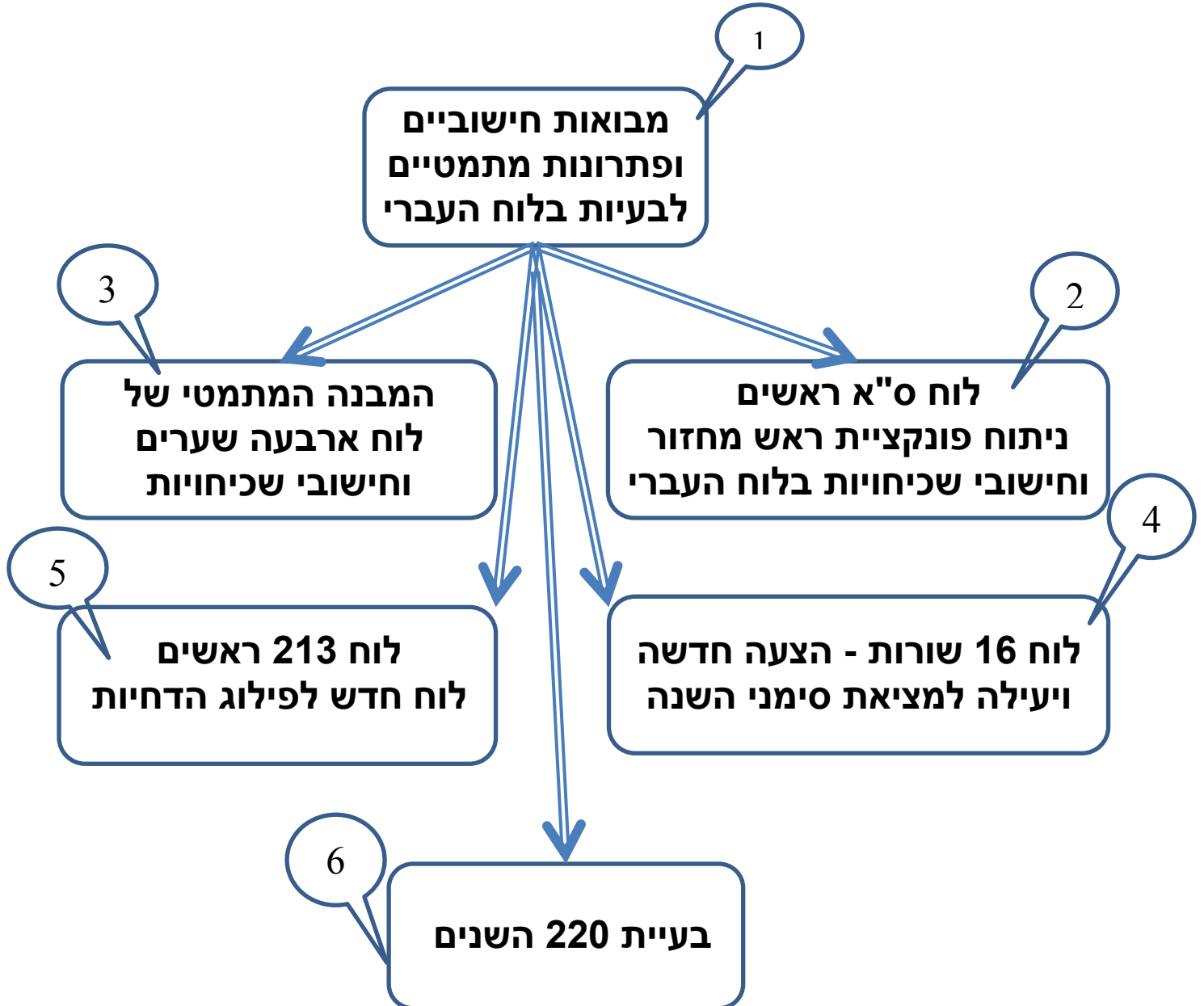
1.....	מבוא
3.....	ספרות המחקר.....
5.....	פרק ראשון – מבואות חישוביים
5.....	קבועים מספריים בלוח העברי :
6.....	מחזוריות הלוח העברי.....
7.....	בעיה מספר 1 :
8.....	בעיה מספר 2 :
8.....	בעיה מספר 3 :
9.....	חישובי מולדות באמצעות אלגוריתם אוקלידס ואלגוריתם אוקלידס המורחב.....
9.....	אלגוריתם אוקלידס.....
9.....	אלגוריתם אוקלידס המורחב.....
11.....	בעיה מספר 1 :
13.....	בעיה מספר 2 :
14.....	בעיה מספר 3 :
18.....	פרק שני - לוחות לסימן השנה
18.....	הקדמה.....
18.....	סימן השנה :
18.....	לוחות :
19.....	לוח ס"א ראשים
21.....	אלגוריתם בניית הלוח :
21.....	שיטת ר' יצחק הישראלי.....
22.....	שיטת בורנשטיין.....
22.....	שיטת רצ"ה יפה.....
23.....	השיטה שלנו.....
24.....	היתכנות מולד ראש מחזור בחלקי השבוע, ולוח ס"א המתוקן.....
25.....	נקודת ההתחלה :

28.....	המרת הגבולות התיאורטיים לגבולות המעשיים :
30.....	חישובי שכיחויות בלוח העברי
31.....	בניית "מנוע חיפוש" בגיליון EXCEL לחישובי גבולות וסימן השנה
36.....	לוח ארבעה שערים
36.....	רקע היסטורי.....
36.....	המקורות הקדומים שבהם מופיע הלוח.....
36.....	אל –כ'וארזמי.....
37.....	רס"ג.....
37.....	מקור השם "ארבעה שערים".....
39.....	המבנה המתמטי של לוח ארבעה שערים.....
40.....	המבנה הפנימי של מחזור י"ט שנים.....
42.....	בדיקת השתנות סימן השנה בארבעת הרצפים.....
43.....	לוח ארבעה שערים – שילוב הטבלאות.....
44.....	לוח ארבעה שערים "מעודכן" וחישובי שכיחויות.....
45.....	פונקציית מולד תשרי.....
51.....	"תיקוני גבולות".....
56.....	לוח 'ארבעה שערים המורחב'.....
57.....	הוכחת נוסחת רצ"ה יפה.....
62.....	פרק שלישי - "בעיית 220 השנים"
62.....	הצעה לפתרון :
68.....	פרק רביעי – לוחות חדשים
68.....	לוח 16 שורות- הצעה חדשה
68.....	צירופי שנים.....
69.....	אלגוריתם השיטה :
70.....	אופן בניית הלוח.....

72.....	יתרון לוח 16 שורות מלוח ארבעה שערים ולוח ס"א ראשים :
74.....	לוח 213 ראשים
74.....	הגדרת אינדקס חדש בן 4 "ביט"
76.....	חישוב שכיחות הדחיות מלוח 213 ראשים
78.....	שכיחות סימני השנים :
80.....	תובנות נוספות מלוח 213 ראשים
81.....	טבלת ה-"מעברים" :
84.....	סיכום ומסקנות
86.....	נספחים
86.....	נספח 1 – חישוב היקריותיו של מולד נתון (בהר"ד)
87.....	נספח 2- לוח 61 ראשים עם גבולות והיקרויות מתוקנים
88.....	נספח 3- לוח 213 ראשים
89.....	נספח 3ב- חישוב שכיחות מלוח 213 ראשים
90.....	ביבליוגרפיה

תקציר עברי

מבנה העבודה-



1. **מבואות חישוביים** –

בפרק זה נעלה הצעות לפתרון בעיות מתמטיות בסיסיות בלוח העברי. נציג פתרונות חדשים ופשוטים למציאת מחזוריות הלוח העברי, נציג כיצד בעזרת אלגוריתם אוקלידס, ואלגוריתם אוקלידס המורחב (למציאת המחלקים המשותפים), ניתן למצוא נוסחה המניבה את היקירויותיו של מולד נתון כל שהוא בלוח העברי.

2. **לוח ס"א ראשים** (פורסם כמאמר עצמאי בבד"ד 22) –

הפרק עוסק בהיתכנות חלות המולד וחישובי שכיחות בלוח העברי.

בלוח העברי השבוע מחולק ל- 7 ימים בני 24 שעות בנות 1080 חלקים כל אחת סה"כ – 181440 חלקים בשבוע. עד כה, מקובל היה להניח שמולד תשרי (או כל מולד אחר) יכול לחול בכל אחד מחלקי השבוע, ובהתאם לכך חושבו שכיחויות בלוח.

בניתוח המוצע, נראה שהיתכנות חלות המולד, בניגוד למקובל עד היום, לא יכולה לחול בכל חלק וחלק מחלקי השבוע אלא רק לפי חוקיות מתמטית שאותה נסביר ונדגים. תופעה זה משפיעה על נושא חישובי שכיחויות בלוח העברי, אך לרוב השפעה זניחה.

כמו כן נסביר כיצד ניתן לחשב לוח ס"א ראשים בעזרת גיליון אלקטרוני EXCEL באופן אוטומאטי ע"י בניית כללי הלוח העברי וחשבון המולדות.

3. **המבנה המתמטי של לוח ארבעה שערים** (חלק מהמחקר, יפורסם אי"ה בבד"ד 28) –

בפרקים הקודמים הראינו שעל מנת לחשב את השכיחות של סוגי השנים בלוח העברי, יש צורך להביא בחשבון שמולד ראש מחזור לא יכול לחול בכל חלק וחלק מחלקי השבוע. כמו כן הצענו לוח ס"א ראשים עם "גבולות מתוקנים" כך שניתן יהיה לחשב ממנו את השכיחות המדויקת של סימני השנים בלוח העברי. בפרק זה נדון בלוח 'ארבעה שערים', לוח קדום מימי הגאונים.

בחלקו הראשון של הפרק נסביר כיצד בנוי לוח ארבעה שערים. אבני היסוד של הלוח נובעים מניתוח של צירופי השנים במחזור י"ט. ננתח כל צירוף כיחידה עצמאית, ונבנה את הלוח.

בחלקו השני של הפרק נציג שיטה שבעזרתה נסיק אילו שינויים עלינו להחיל על אבני הבניין של לוח 'ארבעה שערים' בכדי למצוא את היקרויות סימני השנה בכל אבן בניין ולבסוף, נרכיב לוח ארבעה שערים מורחב המכיל בתוכו את ההיקרויות של סימני השנה, כך שגם ממנו נוכל לחשב את שכיחויות סימני השנה.

4. **לוח 16 שורות** (חלק מתוצאות מחקר זה פורסם בבד"ד 26) –

פרק זה עוסק בהצעה חדשה לטבלת עזר חישובית למציאת סימני הקביעות של שנה, או מספר שנים עוקבות, מתוך מולד הלוח (המחושב) של ראש השנה וידיעת מקומה של השנה במחזור העיבור.

במהלך ההיסטוריה של הלוח העברי פותחו "כלים" למציאת סימן השנה בעזרת חישוב פשוט וטבלת עזר. זכות הבכורה שייכת ל- "לוח ארבעה שערים", לוח קדום מימי הגאונים. הלוח השני - "לוח ס"א ראשים" - פותח בתקופת הראשונים והוצג לראשונה במאה ה-י"ג.

בפרק זה נציג בקצרה את לוח ארבעה שערים ואת לוח ס"א ראשים ונעבור להצעה חדשה ללוח בן 16 שורות. נסביר את האלגוריתם לבניית הלוח ואת יתרונו היחסי על פני שני הלוחות ההיסטוריים דלעיל.

5. **לוח 213 ראשים** (חלק מהמחקר, יפורסם אי"ה בבד"ד 27) –
פרק זה הוא המשכו של מאמר שפורסם בבד"ד - גיליון 22 "לוחות ושברי לוחות" – על מולדות ותכונותיהם".

במאמר הוצגה הבנה חדשה בנוגע לחלות מולד תשרי (של ראש מחזור), שבניגוד להנחה המקובלת, לא יכול לחול בכל חלק וחלק מחלקי השבוע. כנספח למאמר הוצג לוח חדש בן 213 ראשים – לוח המשמש לקביעת סימן השנים בדומה ללוח ס"א ראשים, כאשר בלוח החדש נוספה אות המציינת את סוג הדחייה. חשיבותו של הלוח היא בכך שהוא משמש ככלי הנכון והמדויק לחישובי שכיחות הדחיות בלוח העברי.

בפרק זה נציג וננתח את לוח 213 ראשים, נסביר את מקור המספר 213, ונעלה תובנות נוספות הנובעות מלוח חדש זה.

6. "בעיית 220 השנים" – בפרק זה נציג כיצד בעזרת השיטות והכלים שפותחו במהלך העבודה, אנו מציעים פתרון אנליטי לבעיה שהועלתה ע"י ר' רחמים שר שלום.

מבוא

הגמרא במסכת שבת אומרת:

” אמר רבי שמעון בן פזי אמר רבי יהושע בן לוי משום בר קפרא: כל היודע לחשב בתקופות ומזלות ואינו חושב - עליו הכתוב אומר (ישעיהו ה יב) ”והיה כנור ונבל תף וחליל ויין משתיהם ואת פועל ה' לא יביטו ומעשה ידיו לא ראו”

אמר רבי שמואל בר נחמני אמר רבי יוחנן: מנין שמצוה על האדם לחשב תקופות ומזלות? - שנאמר (דברים ד ו) ושמרתם ועשיתם כי היא חכמתכם ובינתכם לעיני העמים” אשר ישמעון את כל החקים האלה ואמרו רק עם חכם ונבון הגוי הגדול הזה” ; איזו חכמה ובינה שהיא לעיני העמים? - הוי אומר זה חישוב תקופות ומזלות”

(תלמוד בבלי מסכת שבת דף ע”ה).

בהשוואה לתחומי מחקר אחרים, נושא ”הלוח העברי” נחקר מעט, הן מטעם של מיעוט המקורות והן מטעם היות הנושא ”חוצה גבולות” מבחינת תחומי הידע והמחקר הנזקקים לבאים בשעריו.

ראשיתה של העבודה המוצעת, במאמר שהתפרסם בבד”ד 22 (2010). במאמר זה הצענו לרבים כלי עזר ממוחשב שפיתחנו לחישובי מולדות בלוח העברי.

השימוש בכלי שפיתחנו הוביל למסקנה חדשה ומעניינת שמולד תשרי של ראש המחזור לא יכול לחול בכל חלק וחלק מחלקי השבוע, אלא רק לפי חוקיות שאותה הסברנו וניתחנו. בנוסף לכך, ניתחנו באופן מתמטי את ”התנהגות” הפונקציה המתארת את מולד ראש המחזור. ניתוח זה הוביל לחישוב מתוקן של שכיחויות בלוח העברי.

בהמשך למאמר זה, ניתחנו באופן שיטתי את כל הלוחות והמבנים השונים בלוח העברי והתוצאות מוצגות במחקר שלהלן.

בחלקה הראשון של העבודה, נציג הוכחות חדשות וקצרות לתוצאות מספריות ידועות בלוח העברי. החידוש העיקרי בחלק זה יהיה בשימוש באלגוריתם אוקלידס ואלגוריתם אוקלידס המורחב לשם הוכחות מספריות בלוח העברי, וכן הצגות לוגיות חדשות המתבססות בעיקר על המחלק המשותף הגדול של שני מספרים - GCD. בחלק השני של העבודה ננתח את לוח ארבעה שערים ולוח ס”א ראשים, תוך שימוש בכלי עזר ממוחשב שפיתחנו והוצע לרבים במאמר שהתפרסם בבד”ד 22 (2010). בכדי לנתח את לוח ארבעה שערים, ולהציג בו את הגבולות הנכונים הנובעים מגילוי זה, בצענו שינוי קטן מהשיטה שבה נקטנו בנייתוח ס”א ראשים – וגם יחידה זו נשלחה כמאמר עצמאי לבד”ד - (יפורסם אי”ה בגיליון מס’ 28).

כתוצאה מניתוח זה "נולדו" 2 לוחות חדשים – לוח 213 ראשים ולוח 16 שורות. הראשון הוא לוח חדש המצרף לקביעת השנה את סימני הדחיה – נשלח כמאמר עצמאי לבד"ד (יפורסם אי"ה בגיליון מס' 27). מלוח זה ניתן לחשב באופן ישיר את שכיחות הדחיות (מוצג כנספח לעבודה), כמוכן לוח זה הוביל לכמה תובנות חדשות המוצגות אף הן.

הלוח השני ש"נולד" הוא לוח 16 שורות, הפך אף הוא למאמר שפורסם בד"ד 26 (2012), והוא מציג הצעה "יעילה" יותר במציאת סימן השנה מאשר שני הלוחות המסורתיים (ארבעה שערים ולוח ס"א ראשים).

ספרות המחקר

ספרות המחקר בנושאי "הלוח העברי" – כלליו וחוקיו, היא יחסית מצומצמת ודלה. חלק גדול מהספרות המודרנית בתחום היא יותר בגדר "ספרי לימוד", החוזרים על היסודות והחומרים היסודיים המוכרים לכל מתלמד, ופחות בגדר "ספרות מחקר".

ניתן לחלק את תחום המחקר לשלושה חלקים -

1. אסטרונומיה וראיית הירח החדש

איידלר בספרו² מונה 38 חיבורים ופירושים שחוברו סביב חיבורו המקיף של הרמב"ם "הלכות קדוש החודש", ו-50 חיבורים נוספים שחוברו בנושאי אסטרונומיה יהודית. לוינגר³ סוקר גם הוא את הספרות הקלאסית והמודרנית בנושאי ראיית הירח החדש, ומונה גם הוא 24 חיבורים על הל' קדה"ח, 19 מחברי מאמרים בני זמננו, ו-14 אלמנכים ולוחות הרלוונטיים לנדון.

2. חיתום הלוח

בבעיית חיתום הלוח התעסקו – בעיקר בדורות האחרונים במיוחד לאור תעודות מהגניזה- בורנשטיין, סלונימסקי, יפה, אפשטיין, הרב כשר, קאסוטו, סוקניק, עקביא, הרב כהנא, שטרן, לנגרמן, שר שלום, לוינגר, ואלטר ועוד.

3. כללי הלוח הקבוע⁴

בנושא זה, כאמור, באופן יחסי החומר מועט. איידלר, לוינגר, פינסקי, וח. מרצבך, א.ה. פרנקל, וילק, כתבו פרקים בנדון, כל אחד תרם את חלקו מזווית אחרת. בדורנו חלה התעוררות חדשה בתחום, הופיעו כמה ספרים מחקריים חדשים בסוגיות הקשורות ללוח העברי ולהלכות קידוש החודש⁵, הוקם בישיבת כרם ביבנה מרכז לימוד בנושאי זמנים בהלכה והלוח העברי (בהנהלת הרב ד"ר שי ואלטר), קמו צוותים והתאמנו בראיית הירח החדש⁶, וכן הופיעו כמה תוכנות אסטרונומיות חדשות.

בשני התחומים הראשונים התעסקו רבים, בתחום הראשון ראשונים ואחרונים (במיוחד אחרי פירושו המקיף של הרמב"ם – 'הלכות קדוש החודש'), התחום השני זכה לעדנה רבה במיוחד לאור גילויים של מסמכים מהגניזה, שהכילו תאריכים שאינם מתיישבים עם כללי הלוח הקבוע.

² הלכות קדוש החודש על פי הרמב"ם, ירושלים: תשנ"ו.

³ במאמרו – חיזוי ראיית הירח החדש, שיטת הרמב"ם לאור ההלכה ומדע זמננו, תחומין י"ד, אלון שבות: תשנ"ד

⁴ כולל סוגיית "תזוזת חג הפסח מתקפת האביב".

⁵ עקביא ("הלוח ושימוש בכתובות הלוח"), מ.מ. כשר ("תורה שלמה חלק י"ג"), ספרו המקיף של שר שלום ("שערים ללוח העברי"), לוינגר ("על השמינית"), איידלר ("הלכות קדוש החודש על פי הרמב"ם), מאספים ומאמרים – מאמריו של א.א. עקביא בבמות שונות, "יד יצחק", "יודעי בינה" ועוד.

⁶ האגודה הישראלית לצפייה בירח החדש – רוי הופמן, וטוביה כאץ.

התחום השלישי של "כללי הלוח" רוב רובם של המחברים שהתעסקו בו, ניסחו את הכללים והחוקים אך כמעט שאין בנמצא בספרות מחקר הלוח ניתוח מבני – לוגי ומתמטי של ה-"לוח העברי".

וכאן מצאנו אנו "בקעה להתגדר בה".

פרק ראשון – מבואות חישוביים

קבועים מספריים בלוח העברי:

לשם הנוחות המספרית, כל החישובים וההוכחות במהלך עבודה זו יבוצעו בחלקים⁷, לשם כך להלן מוצגת טבלת המרה של כל המספרים "החישוביים" שנשתמש בהם. כל התוצאות החישוביות בעבודה זו בוצעו ע"י שימוש בגיליון אלקטרוני EXCEL, ושימוש בקוד Visual Basic.

$$C5=(INT(H5/(1080*24)))$$

$$E5=(INT(((H5/(1080*24))-C5))*24)$$

$$F5=(H5-(C5*1080*24+E5*1080)$$

A	B	C	D	E	F	G	H	I
3	הגודל	ימים	mod 7	שעות	חלקים		בחלקים	mod(181440)
4	חודש לבנה	29	1	12	793		765433	39673
5	שנה פשוטה	354	4	8	876		9185196	113196
6	שנה מעוברת	383	5	21	589		9950629	152869
7	שנת רב אדא	365	1	5	997.6315789		9467198	32318
8	שנת שמואל	365	1	6	0		9467280	32400
9	מחזור (19 שנה)	6939	2	16	595		179876755	69715
10	מחזור 247 (רמ"ז)	90215	6	23	175		2338397815	180535
11	שבוע		7	0	0		181440	0
12	בהר"ד		2	5	204		57444	57444

$$H4=F4+1080*E4+1080*C4*24$$

טבלה מס' 1

$$I4= MOD(H4,181440)$$

⁷ השעה בלוח העברי מחולקת ל- 1080 חלקים. הרמב"ם כותב (הל' קדה"ח – פרק ו' הלכה ב') שהסיבה לכך היא שהמספר 1080 מתחלק להרבה מספרים, לעני"ד הסיבה לכך היא הצגה של אורך החודש העברי (הממוצע) כשבר מצומצם. אורך החודש הוא 29 ימים, 12 שעות, 44 דקות ו- $1/3$ שניה. לאחר הצגת המספר כשבר מצומצם 44 הדקות ו-3 ושליש שניה הופכים ל- $793/1080$ של שעה, ונראה שזו כוונת הגר"א בהגהותיו לרמב"ם בהלכות קדה"ח, וכן זו כוונתו של עזריה מן האדומים בספרו 'מצרף לכספי', בהוצאת ראם עמי' 126.

מחזוריות הלוח העברי

הלוח העברי מושתת על מחזור בן 19 שנה. מחזור זה נבחר משום שהוא מהווה פתרון מעשי להשוואת שנת החמה מול שנת הלבנה, וככל הנראה כך "נוצרה" שנת רב אדא⁸ ע"י חלוקת 235 חודשי לבנה ב- 19 שנות חמה.

השאלה העומדת לפתחנו היא האם ישנה מחזוריות במולדות הלוח העברי ואם כן כיצד מחשבים אותה.

סוגיה זו עולה לראשונה, במאה ה- י"ג, בספרו של ר' יצחק הישראלי⁹ "יסוד עולם" (נכתב 1310) (מאמר חמישי פרק ד'), אולם ללא הוכחות מספריות.

איידלר (1995) מבאר בהרחבה סעיף זה, אולם הוכחותיו מסורבלות וארוכות.

להלן נציג הוכחות קצרות ופשוטות.

⁸ על שנת רב אדא ראה: שר שלום (תשס"ג) בתוך "יד יצחק" עמ' 126 ואילך.
⁹ המכונה "תלמיד הרא"ש" על אף שהיה מבוגר, וכתב את הספר לבקשתו של הרא"ש.

בעיה מספר 1¹⁰:

לאחר כמה חודשים המולד יחזור על עצמו?

פתרון: המולד נעתק מחודש לחודש בשיעור של 39673 חלקים לפיכך עלינו למצוא את ערכו המינימאלי של X המקיים את המשוואה:

$$X * 39673 \bmod(181440) = 0$$

כאשר X מייצג את סך החודשים שיעברו עד שהמולד יחזור על עצמו, 181440 – שבוע בחלקים.

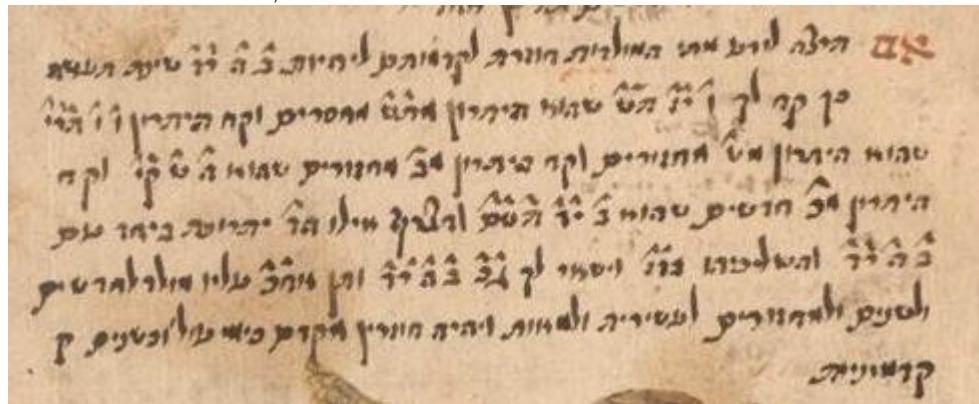
מכיוון שהמחלק המשותף הגדול של שני המספרים (יתרון חודש, ושבוע) הוא 1:

$$\text{GCD}(39673, 181440) = 1$$

אזי יחלפו 181440 חודשים עד שהמולד יחזור על עצמו.

¹⁰ בספר עברונות – כתב יד מהמאה ה-11,

Frankfurt a M - Stadt- und Universitaestbibliothek Ms hebr oct 31, עמ' 17 מצינו התייחסות לבעיה-



כתב היד זמין במרשתת בקישור -

<http://sammlungen.ub.uni-frankfurt.de/mshebr/content/pageview/1862440>

"אם תרצה לידע מתי המולדות חוזרת לקדמותם ליהיות ב ה רד שינת (צ"ל שנית- ע.ר) תעשה כך קח לך ו י"ז ת"ש שהוא היתרון מת"ש מחסרים (צ"ל מחזורים- ע.ר) וקח היתרון ו' ו' תר"י שהוא היתרון מע' מחזורים וקח היתרון מבי' מחזורים שהוא ה' ט' ק"י וקח היתרון מבי' חדשים שהוא ב' י"ד תש"ם ותצרף אילו הדי' יתרונות ביחד עם ב' ה' ר' די' ותשליכהו בז' ז' וישאר לך ג"כ ב' ה' ר' די'.... ותן אח"כ עליו מולד לחדשים ולשנים ולמחזורים לעשירית ולמאות ויהיה חוזרין מקדם כימי עולי וכשנים קדמוניות"

נוסח **דומה** מופיע בכתב יד נוסף, כתב יד של מילר, יהודה בן שמואל רויטלינגן ; 1649, ברלין - ספריית המדינה 3150 OR. OCT.;Berlin - Staatsbibliothek (Preussischer Kulturbesitz) Or. Oct. 3150, בעמוד 32, זמין במרשתת בקישור:

http://digital.staatsbibliothek-berlin.de/dms/werkansicht/?PPN=PPN635432978&PHYSID=PHYS_0035

מספרו בספריה הלאומית F 17300.

הסבר: ה- GCD של שני מספרים ניתן ישירות את "הדילוגים" ב- "שעון המודולו". עבור $GCD(a,b)=1$, אזי רק בחלוף 'a*b' יחזור "מחוג" שעון המודולו לנקודת המוצא.

בעיה מספר 2:

באיזה חודש יקרה הדבר ביחס למולד המוצא?
 פתרון: במחזור של 19 שנה יש 12 שנים פשוטות ו-7 שנים מעוברות סה"כ 235 חודשים.
 מכיוון ש -

$$181440 \bmod(235) = 20$$

אזי בפעם הראשונה שהמולד יחזור על עצמו (לאחר 181440 חודשים) זה יהיה ב"הזזה" של 20 חודשים קדימה במחזור 235 החודשים¹¹. (דוגמא: באם חודש המוצא הוא חודש 5 (שבט שנה 1) בפעם הבאה שיחול אותו מולד יהיה בחודש 25 (תשרי שנה 3)).

בעיה מספר 3:

לאחר כמה פעמים המולד יחזור על עצמו באותו חודש ובאותה שנה במחזור י"ט?
 פתרון: מכיוון שהמחלק המשותף הגדול של שני המספרים (235,20) הוא -

$$GCD(235,20) = 5$$

יידרשו $\frac{235}{5} = 47$ מחזורים בכדי שהמולד יחזור על עצמו באותו חודש.

ז"א שיידרשו - $47 * 181440 = 8527680$ חודשים בכדי שהמולד יחזור "לנקודת ההתחלה".
 לאחר חלוקה ב- 235 נקבל -

$$\frac{8527680}{235} = 36288$$

מחזורים. מש"ל.

36288 מחזורים הם 689472 שנים, וזוהי איפה מחזוריות הלוח.

¹¹ 181440 חודשים שהם 772 מחזורים ו-20 חודשים.

חישובי מולדות באמצעות אלגוריתם אוקלידס ואלגוריתם

אוקלידס המורחב

הקדמה:

אלגוריתם אוקלידס נחשב כאלגוריתם הקדום ביותר, ומשמש כבסיס בתורת המספרים לנושאים שונים ומגוונים כגון הצפנת מידע ועוד. אלגוריתם אוקלידס מגדיר תהליך מתמטי למציאת המחלק המשותף הגדול ביותר בין שני מספרים (GCD= Greatest common divisor).

אלגוריתם אוקלידס

מטרה: מציאת המחלק המשותף המקסימאלי

קלט: $a, b \in \mathbb{Z}$ כך ש- $b \neq 0$.

פלט: $\gcd(a, b)$ (ערך חיובי)

אלגוריתם gcd:

(באפס התהליך מפסיק).

1. אם $a \bmod(b) = 0$ החזר את $|b|$.

2. אחרת – החזר את $\gcd(b, a \bmod(b))$.

אלגוריתם אוקלידס המורחב

מטרה: מציאת המחלק המשותף המקסימאלי ואת הכופלים המתאימים

קלט: $a, b \in \mathbb{Z}$ כך ש- $|a| \geq |b|$ (הנחה $b > 0$).

פלט: $\gcd(a, b)$, ומספרים s, t כך ש- $\gcd(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$

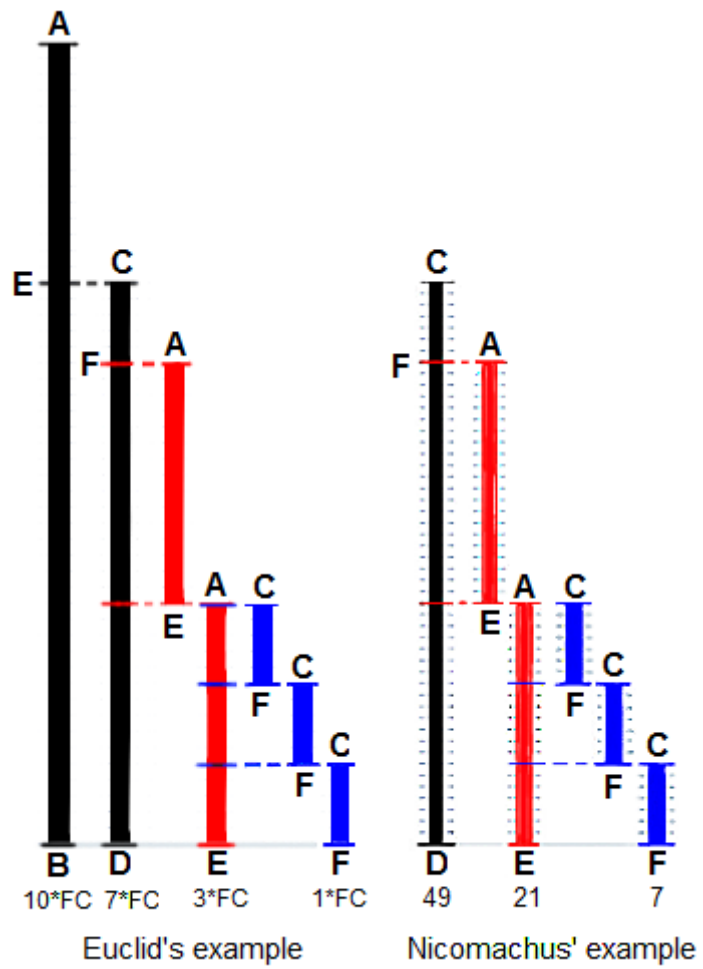
אלגוריתם $extended - gcd$:

1. אם $a_{\bmod b} = 0$ החזר את $(|b|, 0, 1)$.

2. אחרת – סמן $(d', s', t') = extended - gcd(b, a_{\bmod b})$.

3. החזר את $(d', t', s' - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor \cdot t')$ (הנחה $b > 0$).

רצ"ב התהליך בצורה גראפית:



יישום האלגוריתם:

```
function gcd(a, b)
  while b ≠ 0
    t := b
    b := a mod b
    a := t
  return a
```

בעיה מספר 1:

לאחר כמה חודשים (מינימום) החל ממולד נתון, יתקדם המולד בתזוזה של חלק אחד¹²?

בניסוח אחר מהו ה- X המינימאלי עבורו מתקיימת המשוואה –

$$(X * A) \bmod(B) = 1$$

פתרון:

לשם הפתרון נבאר את "אלגוריתם אוקלידס המורחב"

אלגוריתם זה מוצא את ערכי X ו- Y (זוג) עבור המשוואה-

$$A * X + B * Y = GCD(A, B)$$

מכיוון שבדוגמא שלנו a ו- b זרים זה לזה, המכנה המשותף המכסימלי שלהם שווה 1

$(GCD(181440, 39673)=1)$, לכן אצלנו המשוואה היא –

$$A * X + B * Y = 1$$

מכיוון שכפולות של Y הם הם המודולו, משוואה זו ניתנת להיכתב כך-

$$(X * A) \bmod(B) = 1$$

לכן תוצאת האלגוריתם תניב גם כאן תשובה ישירה לבעיה שהוצגה¹³.

הסבר האלגוריתם:

האלגוריתם מבוסס על אבחנה יסודית: לכל b, q, r , המחלקים המשותפים של b ושל r הם גם

המחלקים המשותפים ל- b ול- $bq+r$. לפיכך, לשני הזוגות יש אותו מחלק משותף מקסימלי:

$$(qb+r, b) = (b, r)$$

¹² לבעיה זו התייחסו:

- איידלר בספרו "הלכות קדוש החודש ע"פ הרמב"ם" בעמ' 644 ואילך אך פותר בדרך מסובכת.
- וילק, עמ' 88 מביא את התוצאה כנתון, ללא הוכחה.
- פינסקי, עמ' 216, מביא כנתון, ללא הוכחה.
- מרצבך עמ' רפ"ה, מביא כנתון, ללא הוכחה.

¹³ מכיוון שבמקרה שלנו ה- $gcd=1$, לכן האלגוריתם יניב את ערכו המינימלי של X .

האלגוריתם פועל בשיטת חישוב שבכל צעד מציבים את התוצאה הקודמת וחוזר חלילה ("חזרור")
(Iterative).

האות r מסמלת את השארית (Remainder).

בכל שלב מתקיימת המשוואה –

$$r_i = aX_i + bY_i$$

מתחילים מערכים התחלתיים שהם a ו- b כדלהלן-

$$r_1 = a = a * 1 + b * 0$$

$$r_2 = b = a * 0 + b * 1$$

עתה בכל צעד נחשב את השארית הבאה בתור, כדלהלן-

$$r_i = r_{i-2} - INT\left(\frac{r_{i-2}}{r_{i-1}}\right) * r_{i-1}$$

INT משמעו הערך השלם של תוצאת החילוק.

הצבה בנוסחה הנ"ל -

$$r_i = (ax_{i-2} + by_{i-2}) - \left\lfloor \frac{r_{i-2}}{r_{i-1}} \right\rfloor * (ax_{i-1} + by_{i-1})$$

לאחר כינוס אברים נקבל-

$$r_i = a \left(x_{i-2} - \left\lfloor \frac{r_{i-2}}{r_{i-1}} \right\rfloor x_{i-1} \right) + b \left(y_{i-2} - \left\lfloor \frac{r_{i-2}}{r_{i-1}} \right\rfloor y_{i-1} \right)$$

נממש את האלגוריתם הנ"ל ב- EXCEL ונקבל –

<i>step</i>	r_i	y_i	x_i
1	181440	1	0
2	39673	0	1
3	22748	1	-4
4	16925	-1	5
5	5823	2	-9
6	5279	-5	23
7	544	7	-32
8	383	-68	311
9	161	75	-343
10	61	-218	997
11	39	511	-2337
12	22	-729	3334
13	17	1240	-5671
14	5	-1969	9005
15	2	7147	-32686
16	1	-16263	74377
17	0	39673	-181440
	#DIV/0!		

תזכורת: $r_i = Ax_i + By_i$, ובכל שורה, $B = 181440$, $A = 39673$

לדוגמא: בשורה 11 בטבלה השארית היא 39 עבור $y = 511$, ו- $x = -2337$,

$$181440 * 511 + 39673 * (-2337) = 39$$

ואכן

מהטבלה מתקבל בשורה 16 - שארית 1 עבור $X = 74377$ ו- $Y = -16263$

ז"א שלאחר 74377 חודשים המולד יתקדם בחלק אחד.

בעיה מספר 2:

לאחר כמה חודשים (מינימום) המולד יתקדם ב- n חלקים?

פתרון:

לאחר $n * 74377$ חודשים נקבל תזוזה של n חלקים. בכדי לוודא שזו הפעם הראשונה צריך לבצע מודולו שבוע. ולכן התשובה היא-

לאחר $(74377 \cdot n) \bmod (181440)$ חודשים, המולד יתקדם ב- n חלקים.

בעיה מספר 3:

בעיה: מציאת כל היקרויותיו של מולד נתון במחזוריות הלוח.

פתרון: נסתמך על פתרון הבעיות הקודמות ונמצא את הפעם הראשונה שבה יחול מולד N ממולד בהר"ד.

$N - 57444 \rightarrow$ סך החלקים ממולד בהר"ד.

$74377(N - 57444) \rightarrow$ סך החודשים שיחלפו ממולד בהר"ד ועד למולד N .

על מנת שלא לקבל מספר שלילי (לשם הנוחות) נוסיף בתוך הסוגריים 181440 (שבוע), ונקבל:

$74377(N + 123996) \rightarrow$ סך החודשים שיחלפו ממולד בהר"ד ועד למולד N .

בכדי לקבל את סך החודשים שחלפו ממולד בהר"ד ועד להיקירות הראשונה:

$$74377(N + 123996) \bmod (181440)$$

מכיוון שהחודש של מולד בהר"ד הוא חודש 1 ולא 0 נוסיף לביטוי 1 ונקבל:

$$[74377(N + 123996) + 1] \bmod (181440)$$

בכדי לקבל את כל היקרויות (מסומנות ב- M_n):

$$M_n = [74377(N + 123996) + 1] \bmod (181440) + 181440n$$

כאשר n מקבל את הערכים $n = 0 \dots 46$

נממש את המשוואה בקובץ אקסל הממיר את סך החודשים שעברו ממולד בהר"ד לשנה וחודש.

ונקבל את כל היקרויותיו של מולד נתון.

הקובץ מצורף כנספח 1

$$\text{(MOD((((F5+181440-57444)*74377)+1),181440)}$$

	C	D	E	F	G	H
4	יום	שעה	חלק	המרה לחלקים		
5	2	5	204	57444		
6						
7	היקרות	בחלוף חודשים מצהר"ד	מחזורים שלמים של 19	ועוד חודשים	חודש	שנה במחזור
8	1	1	0	1	תשרי	1

$\text{INT}(C8/235)$
 $C8-D8*235$
 $\text{VLOOKUP}(E8, \text{Sheet2!B\$1:D\$235}, 2, 0)$
 $(\text{VLOOKUP}(E8, \text{Sheet2!B\$1:D\$235}, 3, 0) - D8) * 19 + G8$

דוגמא לשימוש בנוסחה

רמב"ם בהלכות קדוש החודש בפרק ו' הלכה ז' כותב:

"כיצד--הרי שהיה מולד ניסן באחד בשבת בחמש שעות ביום ומאה ושבעה חלקים, סימן להם א'

"ז' ק"ז", נשאלת אם כן השאלה מתי חל המולד שרמב"ם נקט בו?

לשם כך נזין את מולד הרמב"ם כקלט בקובץ האקסל המממש את הנוסחה ונקבל:

קלט מולד מבוקש

מולד הרמב"ם פ"ו ה"ז הל' קדה"ח

יום	שעה	חלק	המרה לחלקים
1	17	107	44387

	בחלוף חודשים מבהר"ד	מחזורים שלמים של 19	ועוד חודשים	חודש	שנה במחזור	שנה עברית	
1	107832	458	202	שבט	17	8719	
2	289272	1230	222	אלול	18	23388	
3	470712	2003	7	ניסן	1	38058	
4	652152	2775	27	כסלו	3	52728	
5	833592	3547	47	תמוז	4	67397	
6	1015032	4319	67	אדר א'	6	82067	
7	1196472	5091	87	תשרי	8	96737	
8	1377912	5863	107	אייר	9	111406	
9	1559352	6635	127	טבת	11	126076	
10	1740792	7407	147	אב	12	140745	
11	1922232	8179	167	אדר שני	14	155415	
12	2103672	8951	187	חשון	16	170085	
13	2285112	9723	207	סיון	17	184754	
14	2466552	10495	227	שבט	19	199424	
15	2647992	11268	12	אלול	1	214093	
16	2829432	12040	32	ניסן	3	228763	
17	3010872	12812	52	כסלו	5	243433	
18	3192312	13584	72	תמוז	6	258102	
19	3373752	14356	92	אדר א'	8	272772	
20	3555192	15128	112	תשרי	10	287442	
21	3736632	15900	132	אייר	11	302111	
22	3918072	16672	152	טבת	13	316781	
23	4099512	17444	172	אב	14	331450	
24	4280952	18216	192	ניסן	16	346120	
25	4462392	18988	212	חשון	18	360790	
26	4643832	19760	232	סיון	19	375459	
27	4825272	20533	17	שבט	2	390129	
28	5006712	21305	37	אלול	3	404798	
29	5188152	22077	57	אייר	5	419468	
30	5369592	22849	77	כסלו	7	434138	
31	5551032	23621	97	תמוז	8	448807	
32	5732472	24393	117	אדר	10	463477	
33	5913912	25165	137	תשרי	12	478147	
34	6095352	25937	157	סיון	13	492816	
35	6276792	26709	177	טבת	15	507486	
36	6458232	27481	197	אלול	16	522155	
37	6639672	28253	217	ניסן	18	536825	
38	6821112	29026	2	חשון	1	551495	
39	7002552	29798	22	תמוז	2	566164	
40	7183992	30570	42	שבט	4	580834	
41	7365432	31342	62	תשרי	6	595504	
42	7546872	32114	82	אייר	7	610173	
43	7728312	32886	102	כסלו	9	624843	
44	7909752	33658	122	אב	10	639512	
45	8091192	34430	142	אדר	12	654182	
46	8272632	35202	162	חשון	14	668852	
47	8454072	35974	182	סיון	15	683521	
בדיקה	48	8635512	36746	202	שבט	17	698191

קיבלנו שלראשונה חל מולד ניסן זה בשנת 38058, כלומר רמב"ם נקט בדוגמא שאינה מעשית אלא רק כדוגמא מספרית בעלמא¹⁴.

¹⁴ בעיה זו הועלתה ע"י אינג' פינסקי. לוינגר ניסה לטעון (בהרצאה – 18.04.2004 בישיבת כרם ביבנה) שאולי נפלה כאן ט"ס וצריך להיות ביום א' אפס שעות וש"ז חלקים (בשם פינסקי). מולד זה חל בחודש ניסן בשנת 4922 ומתאים לתקופת המחבר.

פרק שני - לוחות לסימן השנה

הקדמה

בכדי להקל את החישובים המסורבלים בחשבון המולדות, לאחר חתימת הלוח, החלו לפתח "כלים" שימושיים למציאת סימני השנה. הכללים היסודיים לחישוב א' בתשרי ידועים בשם "ארבעת הדחיות". בכדי לדעת את "סימן השנה" יש צורך לחשב בעזרת כללי הדחיות את ראש השנה הנוכחי ואת ראש השנה הבאה. לעומת זאת שימוש ב- "לוחות"¹⁵ מוכנים מראש, מצריך חישוב אחד בלבד.

סימן השנה:

סימן השנה הוא מעין "קוד" בן 3 אותיות "תווים", המכיל בתמצית את אפיונה של השנה.

האות הראשונה מציינת את היום בשבוע בו חל א' של ראש השנה, האות השנייה מציינת את מספר הימים בחדשי מרחשוון וכסלו {ח – חסרה, מרחשוון וכסלו בני 29 ימים כל אחד}, (כ- כסדרה, מרחשוון 29, כסלו 30 ימים), (ש- שלמה, מרחשוון וכסלו בני 30 ימים כל אחד), והאות השלישית מציינת את היום בו חל פסח.

מכיוון שבלוח העברי 14 סוגים שונים של קביעת השנה, לכן לאחר ידיעת סימן השנה ניתן לעיין באחת מתוך 14 טבלאות מוכנות¹⁶ המפרטות את כל תאריכי השנה, והמידע הנוסף הנחוץ.

לוחות:

הרעיון העומד בבסיס הלוחות הוא, בניית טבלה יחסית פשוטה המציגה את סימני השנה השונים כתלות בחלות "מולד"¹⁷ של חודש תשרי של השנה הנדונה. בכדי להשתמש בטבלאות יש צורך בידיעה מינימאלית ובחישוב פשוט.

החישוב הנדרש הוא, מציאת מולד תשרי של שנה מבוקשת, ומעיון בטבלה מתקבל סימן השנה.

בסעיפים הבאים ננתח את שני הכלים המסורתיים - לוח ס"א ראשים ולוח ארבעה שערים, נסביר את אופן בנייתם, ננתח ונצביע על שימוש "שגוי" שעשו במהלך השנים במידע הגלום בהם.

בהמשך העבודה נציע **שני לוחות חדשים שפיתחנו** (לוח 213 ראשים ולוח 16 ראשים), נציג את היתרונות בלוחות החדשים המוצעים ואת המידע שניתן להפיק מהם.

מבחינה כרונולוגית ה-"כלי" הראשון שפותח היה לוח ארבעה ראשים, אך נדון תחילה בלוח ס"א ראשים, שממנו קל להציג את בעיית "הגבולות", ומאוחר יותר נחזור לדיון בלוח ארבעה ראשים.

¹⁵ "ארבעה שערים", ס"א ראשים וכו'.

¹⁶ לדוגמא - 'שערים' עמ' 56 ואילך.

¹⁷ המונח מולד מתייחס למולד הלוח המחושב ולא למולד האמיתי. ראה מאמרו של לוינגר "3 סוגי מולדות" בתוך יד יצחק, תשס"ג.

לוח ס"א ראשים

בתחילת המאה ה- י"ג פורסם לוח חדשני ומהפכני – לוח ס"א ראשים.¹⁸ בורנשטיין¹⁹ מייחס אותו לאחד מבעלי התוספות הריצב"א וזאת על סמך עדות אחת הנמצאת בקולופון²⁰ של כתב יד של ספר עברונות משנת 1566, שם נכתב כדלהלן:

"ועוד תיקן רבי שמשון שני"ג שורות לידע מהן הקביעות ור' יצחק ב"ר אברהם אחיו תיקן ס"א שורות וחוזרות הן ואין צורך בהם אח"כ ורב נחשון גאון תיקן י"ג שורות והן כתובים לפניך וגם אין הדבר נכון לנבוני לב"

הפיסקה המצוטטת בעייתית לא ברור מה הן י"ג השורות של הר"ש משני"ג מול י"ג השורות המוזכרות מאוחר כשגויות, נראה לנו שקשה לקבוע בדבר מסמרות במיוחד שזה המקור היחידי למחבר הלוח. בורנשטיין (שם) משבש ללא צורך את ביאור הכתוב (ואולי לא ראה את כתב היד במקור אלא הסתמך על העתקה משובשת, או דילג על שורה), ובחשבו ש"ג השורות הם עגול דרב נחשון. נראה שכוונתו בדברו על י"ג השורות של הר"ש משני"ג למספר השורות של לוח "ארבעה שערים" שניתן לכתבו ב- י"ג שורות כמו שנציג אותו להלן בפרק המנתח את לוח "ארבעה שערים".

בכתב יד מאוחר יותר²¹ מצאנו העתקה יותר ברורה ומבוארת של פסקה זו, השופכת אור על ביאור כוונת המחבר כדלהלן:

¹⁸ לוח ס"א ראשים. כאמור מיוחס ל-ריצב"א (=ריב"א= רבנו יצחק בן אברהם מדמפייר, צרפת, אחיו של הר"ש משני"ג, תלמיד רבנו תם ור"י הזקן, קרוב לשנת 1200).

¹⁹ בחיבורו דברי ימי העיבור האחרונים בתוך התקופה טז, בעמוד 292.

²⁰ המילה colophon נכנסה ללטינית מיוונית – κολοφών - שמשמעה 'פסגת הר'.

²¹ מילר, יהודה בן שמואל רויטלינגן; 1649, העתקה היא מכתב יד נושן משנת ש"י"ב (1552) – כפי שהמעתיק כותב. ברלין - ספריית המדינה 3150, OR. OCT.; Berlin - BERLIN Oct. 3150, OR. OCT.;

http://digital.staatsbibliothek-berlin.de/dms/werkansicht/?PPN=PPN635432978&PHYSID=PHYS_0094



תעתיק :

"תיקון רב שמשון שני י"ג שורות לידע מהן הקביעות ור' יצחק בר אברה
 שערס- ע.ר.] ר' יצחק בר אברה'
 אחיו תיקון ס"א שורות והמה חמורות ואין צריך בהן אחכ רב
 נחשון גאון תיקון י"ג שורות והן חוזרין חלילה והן כתובין לפניך
 וגם אין הדבר נכון לנבוני לב לפי שי"ג פעמים ב' יו' תקצה אין הולכין בזו'
 שחסר תתק"ה חלקים וא"א שאותן תתק"ה חלקים לא ישנו בשנים או
 בשלושה מקומות הקביעות בתוך י"ג מחזורים ואפשר שגם הגאון
 ידע החסרון ובשביל שאין חשש בדבר כ"א²² שנים מועטת לא הניח
 בשביל כך למסור הלוח הטובה לעולם והניח הדבר לנבוני לב לסמנים
 בעלמא ולא לסמוך עליהם בלי חשבון כ"א לסמני בעלמא אחר החשבון
 וגם לפעמים הן מוטעי טעות סופר עד כאן מצאתי בספר עברונות
 ישן נושן נכתב בשנת שי"ב לפרט קטן

מפענוח העתקה זו אנו משערים שכוונת המחבר לומר שלוח ס"א הוא מסובך מידי ("והמה
 חמורות") ודי לנו במציאת סימן השנה מלוח ארבעה שערס.

הלוח מובא לראשונה²³ בספר "יסוד עולם" לר"י הישראלי, ושם הוא מכנהו "הלוח שהמציאוהו
 החכמים האחרונים", ללא ציון שם מחברו.

הרעיון המהפכני המונח בבסיסו של לוח זה הוא, שבמידה ונחלק את שנות העולם לסדרות בנות
 19 שנה כל אחת, נקבל 61 צירופים אפשריים של סימני הקביעות ותו לא!! המצאה חדשנית זאת
 מאפשרת בחישוב אחד של מולד תשרי של ראש המחזור לדעת את סימני השנה של כל שנות

²² ראשי תיבות של – "כי אם"
²³ במהדורת דפוס.

המחזור²⁴. הרוצה להשתמש בלוח יחלק את מספר השנה העברית ל-19, ייקח את השלם וימצא בעזרתו את מולד תשרי של ראש המחזור. כדלהלן (האות S מייצגת את השנה העברית לבהר"ד, האות M מייצגת את מולד ראש המחזור בחלקים)²⁵:

$$M = [57444 + 69715 * INT(S/19)] \bmod 181440$$

מצויד במידע זה יפתח את לוח ס"א ראשים, יבדוק בגבולות הצירופים בין אלו גבולות "נופל" המולד שחישב, ויקבל את סימני הקביעות של כל 19 שנות המחזור.

הערה חשובה: יפה ב"קורות" (תרצ"א) טוען שכל סדרה בת- n שנים שנבחר, נמצא $3n+4$ צירופים אפשריים של סימני השנה²⁶, ובהמשך נוכיח טענה זו.

כאמור אם מולד ראש מחזור "ינוע" על פני חלקי השבוע השונים נקבל טבלה בת 61 שורות ע"פ גבולות המולדות.

אלגוריתם בניית הלוח:

נציג ארבע שיטות שונות למציאת לוח ס"א ראשים:

שיטת ר' יצחק הישראלי

כאמור הלוח הוצג לראשונה ע"י ר' יצחק הישראלי בספרו "יסוד עולם". במאמר רביעי פרק י' מבאר המחבר את אופן פיתוח לוח ס"א ראשים מתוך לוח קל"ג מעמדות²⁷. קל"ג מעמדות הוא לוח הבנוי על היסוד שכל שנה משנות המחזור מכילה 7 אפשרויות לסימן השנה²⁸, המעבר מסימן לסימן מאופיין ע"י חציית "גבול" במולד חודש תשרי של השנה. שנות המחזור מחולקות לארבעה מינים כמו בלוח ארבעה שערים. העברת שבעת גבולי המולדות של כל שנה ושנה למולד תשרי של ראש המחזור תניב גבול לראש המחזור.

7 אפשרויות כפול 19 שנות המחזור מניבות טבלה בת 133 אפשרויות.

בבדיקת האפשרויות הוא מוצא ש-17 ראשים חוזרים על עצמם 3 פעמים, 38 ראשים חוזרים על עצמם 2 פעמים, ו-6 ראשים מופיעים פעם אחת בלבד. לאחר מחיקת האפשרויות המופיעות יותר מפעם אחת, נקבל:

²⁴ כאמור סימני הקביעות: האות הראשונה מייצגת את היום בשבוע בו חל יום א' של ראש השנה. האות השנייה: $n =$ חסרה מרחשוון וכסלו בני 29 ימים, $n =$ כסדרה, מרחשוון 29, כסלו 30 יום, $n =$ שלמה, מרחשוון וכסלו בני 30 יום. בלוח ישנם 14 סוגים שונים של קביעות, 7 לפשוטה, ו-7 למעוברת.

²⁵ בהר"ד = 57444p, יתרון מחזור = 69715p, שבוע = 181440p, כולם בחלקים.

²⁶ עמוד קס"ח בהערה המסומנת בכוכבית.

²⁷ הלוח עצמו לא נמצא בכתב היד של הספר והמהדיר גולדברג שחזר אותו. באותה תקופה גם פיליפאוסקי ("מועד מועדים") שחזר את הלוח וכל אחד מהמחברים טען "כולה שלי" (ראה די"ה האחרונים עמ' 291 בהערה 2). הספר יסוד עולם יצא בשתי מהדורות, הראשונה הוצאה ע"י תלמיד הגר"א ר' ברוך שיק (משקלוב), ברלין תקל"ז, לאחר שהדפיס בברלין את שני חיבוריו "עמודי שמים" ו"תפארת אדם", הציע לו הרב צבי הירש לויך להדפיס את "יסוד עולם", מכתב יד שהיה בבעלותו. המהדורה השנייה היא מהדורת גולדברג & רוזנקרנץ הותקנה בפורמט יותר מדעי.

²⁸ ראה בהרחבה להלן בהמשך העבודה בסעיף – "המבנה המתמטי של לוח ארבעה שערים".

סיכום של המספרים 17, 38, ו-6 נותן 61 ראשים.

שיטת בורנשטיין

בורנשטיין (תרפ"ג)²⁹ הציג שיטה קצרה יותר. הוא מעביר את גבולי הדחיות של כל שנה משנות המחזור (כולל שנה 20) למולד ראש מחזור. בכל שנה ישנם ארבעה ימים שראש השנה יכול לחול בהם (ב,ג,ה,ז) ובכל יום יש גבול דחייה כדלהלן:

מעוברת				
חלקים	יום	פריסת גבולות		
19440	ז	0	18	0
71280	ב	2	18	0
97200	ג	3	18	0
149040	ה	5	18	0

אחרי עיבור				
חלקים	יום	פריסת גבולות		
19440	ז	0	18	0
68629	ב	2	15	589
87684	ג	3	9	204
149040	ה	5	18	0

בין מעוברות				
חלקים	יום	פריסת גבולות		
19440	ז	0	18	0
68629	ב	2	15	589
87684	ג	3	9	204
149040	ה	5	18	0

פשוטה אחר פשוטה				
חלקים	יום	פריסת גבולות		
19440	ז	0	18	0
71280	ב	2	18	0
87684	ג	3	9	204
149040	ה	5	18	0

העברת גבולי הדחיות למולד ראש מחזור נעשית ע"י הפחתת יתרון השנים מגבול הדחייה³⁰. כל שנה תורמת 4 ראשים + 4 גבולי הדחיות של השנה הראשונה $\leq 19 \times 4 + 4 = 80$. ממספר זה יש להפחית 19 ראשים שנשנו פעמים, וכך מגיעים ל-61 ראשים.

שיטת רצ"ה יפה

יפה בספרו "קורות חשבון העבור" משפר את שיטת בורנשטיין ומכליל את השיטה למציאת צירופי סימני השנה לא רק ל-19 שנים אלא לכל רצף שנים שהוא.

יפה מסביר³¹ שאמנם לכל שנה ארבעה גבולים³² אבל כל שנה "מייצרת" גבול אחד שכבר נמצא ע"י אחת הדחיות של השנה שקדמה לה, לפיכך קובע יפה שכל צירוף של שנים תמיד יימצאו $3n+4$ ראשים. עבור $n=19$ נקבל כמובן 61.

²⁹ "דברי ימי העבור האחרונים" סעיף ל"ה עמ' 285 ואילך.
³⁰ לא כאן המקום להאריך, העניין מוסבר אצל בורנשטיין בדברי ימי העבור שם וכן אצל שר-שלוס ב"שערים" עמ' 48.

בהמשך נוכיח את נוסחת יפה (בסוף פרק שני לאחר המבנה המתמטי של לוח ארבעה שערים).

השיטה שלנו

מכיוון שאנו כיום משתמשים במחשבים השיטה היא (brute force) קרי הרצת כל חלקי השבוע ומציאת שרשראות של סימני השנה של 19 שנות המחזור (השיטה תובהר בפירוט בהמשך).

כל השיטות למציאת לוח ארבעה ראשים וכן לוח ס"א ראשים **מניחים** ההנחה בסיסית שמולד תשרי של ראש המחזור יכול לחול בכל רגע מרגעי השבוע.

³¹ עמי ר' – ר"א.

³² גבול- ערך של מולד תשרי שממנו והלאה סימן השנה משתנה.

היתכנות מולד ראש מחזור בחלקי השבוע, ולוח ס"א המתוקן

במקום אחר (רביב, 2010) הראנו שבניגוד למקובל, מולד ראש מחזור, לא יכול לחול בכל אחד מחלקי השבוע, ולפיכך "גבולות" של ראשי המחזורים בלוח ס"א ראשים המקובל עד היום, אינם נכונים וצריכים "לעגל" אותם כמוסבר להלן.

נתעלם לרגע, לצורך הדיון, מנקודת ההתחלה- מולד בהר"ד, ובהנחה שמתחילים מאפס, ויתרון המחזור הוא $69715p$ באיזה חלקים יכול לחול מולד ראש מחזור?
הפונקציה המתארת את התכנות תחולת מולד ראש מחזור היא :

$$f(x) = (x * 69715) \bmod(181440)$$

X מציין בכמה מחזורים אנו זזים קדימה, אנו מעוניינים בשארית תוצאת ההכפלה לאחר חלוקה בשבוע, התוצאה המתקבלת היא מספר החלקים בשבוע שבו יחול מולד תשרי של ראש המחזור המבוקש.

מכיוון ש-

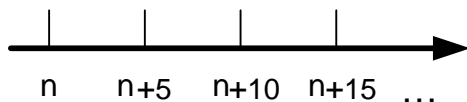
$$\text{GCD}(181440, 69715) = 5$$

משמעות תוצאת ה- GCD היא שלא משנה באיזה מספר נכפיל את יתרון החודש לעולם "בשעון המודולו" נהייה על ערך שהוא כפולות של 5!!

כאשר X משתנה מ 1 עד 36288 (= מספר המחזורים בלוח), תשתנה הפונקציה $f(x)$ כך שתקבל את כל ערכי המספרים המתחלקים ב 5, בין 1 ל 181440 (= מספר החלקים בשבוע) ניכור כי $36288 * 5 = 181440$.

מכאן מתקבל שהפונקציה אינה "על" (ויכולה לחול בכל חלק וחלק) אלא נראית כמו "מסרק" בקפיצות של 5 חלקים.

כמתואר באיור הבא :



כפולות אלו (של שארית מחזור) תמיד מסתיימות בספרה אפס או חמש לסירוגין, לכן במידה ומולד כל שהוא מסתיים בספרה n , לאחר 19 שנה אותו מולד יסתיים ב- $n+5$ חלקים. כלומר

תמיד יהיה "דילוג" של 5 חלקים (בין מולד הנתון {שנה Y} לבין המקביל לו במחזור הבא {שנה $19+Y$ }).

ענה במידה וניקח את שארית החלקים, לאחר חלוקה ב-5, של מולד תשרי של כל שנה ושנה מ-19 שנות המחזור הראשון (המתחיל מבהר"ד) נוכל לדעת מכאן ולהבא את ספרת היחידות (של החלקים) של מולד תשרי של כל שנה ושנה במחזורים הבאים, כפי שיובהר להלן.

נקודת ההתחלה:

ענה נחזור לנקודת ההתחלה בהר"ד (57444), נחלק ב-5 חלקים ונקבל שארית 4.

במחזור 19 שנים המתחיל מבהר"ד, מולד תשרי של כל שנה ושנה, הוא בהתאם למולד תשרי שקדם לו בתוספת יתרון השנה (לפשוטה ד, ח, תתעו, ולמעוברת ה, כא, תקפט).

ענה ניתן לכתוב בניסוח כללי שמולד תשרי של ראש מחזור יהיה תמיד מהצורה: $4+5X$ כאשר X יקבל את הערכים 0 ועד 36287 (מחזוריות הלוח).

בהינתן שארית n (כאשר n יכול לקבל את הערכים 0,1,2,3,4), מולד תשרי במחזור הבא יהיה $n+5$, או בניסוח כללי: $n+5X$ כאשר X יקבל את הערך 0 ועד ל-36287 (מחזוריות הלוח).

ספרת היחידות תהיה n או $(n+5) \bmod 10$ לסירוגין.

להלן המחזור המתחיל מבהר"ד –

	יום בשבוע	מספר ימים	שעה	חלק	חלקים	partMOD(5)	partMOD(5)+5
מולד בהר"ד	2	2	5	204	57444	4	9
מולד ו, י"ד	6	356	14	0	9242640	0	5
תשרי שנה 3	3	710	22	876	18427836	1	6
תשרי שנה 4	2	1094	20	385	28378465	0	5
תשרי שנה 5	0	1449	5	181	37563661	1	6
תשרי שנה 6	4	1803	13	1057	46748857	2	7
תשרי שנה 7	3	2187	11	566	56699486	1	6
תשרי שנה 8	0	2541	20	362	65884682	2	7
תשרי שנה 9	6	2925	17	951	75835311	1	6
תשרי שנה 10	4	3280	2	747	85020507	2	7
תשרי שנה 11	1	3634	11	543	94205703	3	8
תשרי שנה 12	0	4018	9	52	104156332	2	7
תשרי שנה 13	4	4372	17	928	113341528	3	8
תשרי שנה 14	2	4727	2	724	122526724	4	9
תשרי שנה 15	1	5111	0	233	132477353	3	8
תשרי שנה 16	5	5465	9	29	141662549	4	9
תשרי שנה 17	2	5819	17	905	150847745	0	5
תשרי שנה 18	1	6203	15	414	160798374	4	9
תשרי שנה 19	6	6558	0	210	169983570	0	5

טבלה מס' 2

הסבר: החישוב שבטבלה נעשה ע"י הוספת החלקים משנה לשנה בהתאם למספרה הסידורי במחזור 19 השנים. החלקים מומרים לימים שעות וחלקים. בכל שורה מוצג מולד תשרי של השנה משנות המחזור הראשון בלוח.

כידוע מחזור 19 השנים בנוי מ-7 שנים מעוברות בנות 13 חודשים, ו-12 שנים פשוטות בנות 12 חודשים, סה"כ 235 חודשי לבנה המשתווים עם 19 שנות חמה (רב אדא).

מיקום השנים המעוברות סימנו ג,ו,ח,א,ד,ז, ט (שלישית שישית שמינית וכו')³³ ולפיכך בטבלה דלעיל תוספת החלקים בין שנה ושנה הוא לפשוטה 9185196 ולמעוברת 9950629.

עמודות "שארית החלקים" partMOD(5) ו-partMOD(5)+5

הוספנו 2 עמודות partMOD(5) ו-partMOD(5)+5, הנתון בעמודות אלו מציין את סיפרת היחידות האפשרית לכל אחת מ-19 שנות המחזור (לכל שנה 2 אפשרויות בלבד).

מתקבל, שלעולם מולד תשרי של ראש מחזור(השנה הראשונה) יסתיים בספרות 4 או 9 חלקים, מולד תשרי של שנה שנייה במחזור יסתיים בספרות 0 או 5 וכן הלאה.

מכאן נובע שעלינו לשנות את גבולות הראשים בלוח ס"א ראשים כדלהלן:

לדוגמא, נעיין בשורה הראשונה של לוח ס"א ראשים, במידה ומולד תשרי של ראש המחזור יחול –

יום	שעה	חלק	
1	0	408	מ-
1	5	333	ועד (לא כולל)

³³ בחירת שנים אלו, נובעת מכלל היסודי בלוח - ראה "על השמינית" לאינג' לוינגר, מהד' אינטרנט תשס"ז <http://www.daat.ac.il/daat/vl/tohen.asp?id=162>

המרת הגבולות התיאורטיים לגבולות המעשיים:

בסעיפים הקודמים הראנו שמולד תשרי של ראש מחזור לא יכול לחול בכל רגע מרגעי השבוע אלא רק ברגעים המסתיימים ב- 4 או 9. ולכן בדוגמא דלעיל (שורה ראשונה בלוח ס"א ראשים)–

הגבול התחתון לא יהיה 1,0,408 אלא יהיה החל מ- (וכולל) - 1,0,409.

הגבול העליון לא יהיה 1,5,333 אלא יהיה עד (ולא כולל) 1,5,334.

מספר ההיקריות האפשרי, מתוך חלקי השבוע, לראש מחזור זה הוא לא-
 $31653-26328 = 5325$ ³⁴, אלא חייבים להתחשב בדילוגים של ה- 5 חלקים (תופעת ה-"סריגי").

את החישוב יש לבצע ב- 2 שלבים, בשלב הראשון עלינו להמיר את הגבולות "הקלאסיים" לגבולות המעשיים, ובשלב השני עלינו להתחשב בתופעת המסרק כדלהלן:

את ההמרה ניתנת לביצוע בעזרת שתי נוסחאות פשוטות כדלהלן:

גבול ההתחלה יתקבל בעזרת הנוסחה הבאה:

$$4 + 5 * \left\{ \text{INT} \frac{\text{part}}{5} \right\}$$

כאשר part הם מספר החלקים של ראש המחזור הנוכחי.

לדוגמא הצבת 408 תיתן 409, וכן הלאה.

גבול הסיום (עד ועד בכלל) יתקבל מהנוסחה הבאה:

$$4 + 5 * \left\{ \left(\text{INT} \frac{\text{part}}{5} \right) - 1 \right\}$$

כאשר part הם מספר החלקים של ראש המחזור הבא. לדוגמא הצבת 333 תניב 329.

אם נחזור לדוגמא שלנו (שורה ראשונה בלוח) אזי מספר ההיקריות יהיה כדלהלן:

החל ממולד $26329p = 1d, 0h, 409p$

עד מולד $31649p = 1d, 5h, 329p$ (עד ועד בכלל!).

ובקפיצות של 5 חלקים (תופעת ה-"מסרק").

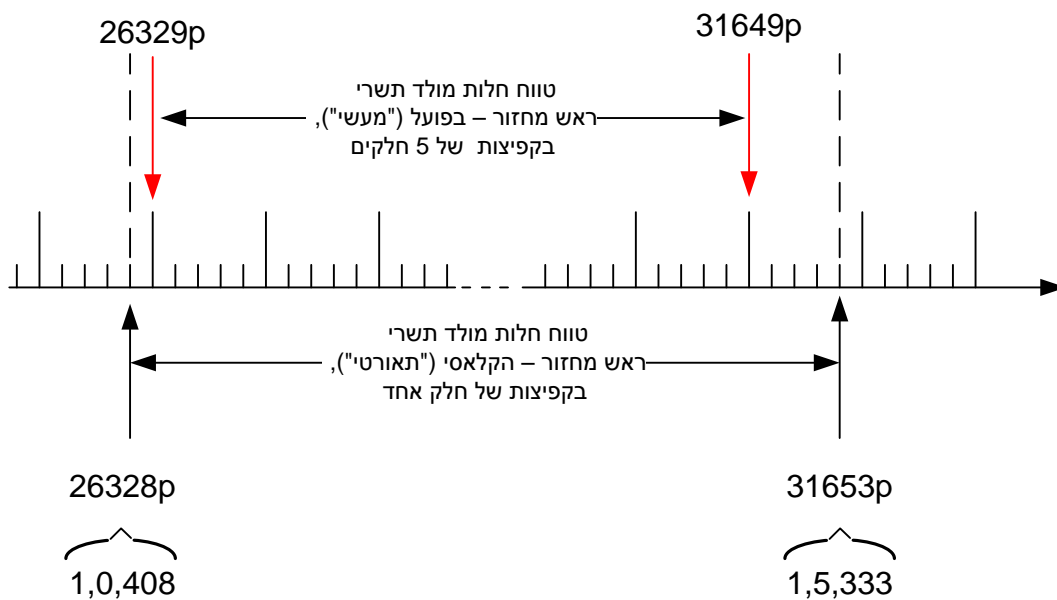
³⁴ גבול עליון ותחתון לאחר המרתם לחלקים, וחיסור ביניהם.
28

ז"א לשורה זו סך של – 1065 היקריות (ההפרש לחלק לחמש ועוד אחד), מתוך 36288 היקריות אפשריות בשבוע (ולא 181440 היקריות).

תרשים:

בתרשים הרצ"ב, פרסנו על סרגל הזמן את הגבולות של שורה ראשונה של לוח ס"א ראשים, ציינו את הגבולות הקלאסיים המופיעים בלוח, ואת הגבולות המעשיים. כאן מומחשות שתי התופעות גם יחד. האחת שינוי הגבולות, והשנייה סך ההיקריות.

השנתות הקטנות מצינות כל חלק וחלק והשנתות הגבוהות יותר מצינות את החלקים המסתעפים בספרה 4 או 9 (קפיצות של 5 חלקים).



לוח ס"א ראשים עם הגבולות המתוקנים מופיע בנספח 2.

חישובי שכיחויות בלוח העברי

עד כה, בכל הספרות המצויה על הלוח העברי, כל חישובי השכיחויות תמיד הניחו הנחת יסוד שמולד תשרי יכול לחול בכל רגע ורגע מרגעי השבוע ובהתאם לכך חושבו כל "השכיחויות" בלוח.

מהאמור לעיל נובע שהנחה זו הינה הנחה שגויה ביסודה, ובכדי לחשב את השכיחויות הנכונות צריך לנקוט בשיטה אחרת מהחשבון שהיה נהוג עד כה.

דוגמא:

ר' רחמים שר שלום (שערים עמוד 37):

"הדחיות ומידת שכיחותן" כותב: "המולד האמצעי, על פיו קובעים את מולדות החודשים בלוח העברי, יכול לחול בכל חלק, בכל שעה ובכל יום מימות השבוע. ומכיוון שגורם הדחייה נקבע עפ"י הרגע המדויק בו חל המולד האמצעי של תשרי- לכן, יהיו סיכויים לדחיות לפי היחס של גבולות הזמן של כל דחייה ודחייה ביחס ל- 168 שעות השבוע. לדוגמא ... דחית בט"ו תקפ"ט היא

$$\frac{491}{2 \cdot 1080}$$
 בגבולות שבין ב-טו-תקפט לבין ב-יח, ורק ב- 7 מתוך 19 שנה לכן תופסת דחייה זו $\frac{491}{2 \cdot 1080}$ שעות מתוך 168 שעות השבוע שהם 0.54%".

בדומה לכך בנוגע לשכיחות סימני הקביעות (שם בעמוד 46) כותב: "לדוגמא הסימן בחה תופס את תחומי הזמן השבועי ז- יח עד א-כ-תצ בשנים מעוברות. במילים פשוטות הסימן בחה תופס את הזמן שבין שעה יח של יום שבת עד שעה כ-ו-תצ חלקים של יום ראשון ב-7 מתוך 19 השנים.

$$\frac{490}{1080} * \frac{7}{19}$$
 החישוב יהיה $\frac{490}{1080} * \frac{7}{19}$ מחולק ב-168".

אנו רואים שהן חישובי הדחיות והן חישובי שכיחות סימני השנה חושבו בהנחת "רציפות" מולד תשרי.

לאחר שנתקן את גבולות סימני לוח ס"א ראשים, ונחשב את סך ההיקרויות עבור כל סימן שנה ושנה, נוכל אפוא לחשב את שכיחות סימני השנה המדויקים.

אולם כיצד נחשב את שכיחות הדחיות? לשם כך נקטנו שיטה חדשה המוסברת בלוח 213 ראשים בהמשך העבודה.

בניית "מנוע חיפוש" בגיליון EXCEL לחישובי גבולות וסימן השנה

בשלב הראשון נכין טבלה המכילה את כללי הלוח העברי ל- 19 שנות המחזור.

חלקה הראשון של הטבלה מכיל טבלה המחשבת את מולדות תשרי של כל שנה ושנה משנות המחזור בהתבסס על מולד תשרי של השנה הראשונה. כלומר מולד תשרי של השנה השנייה במחזור מתקבל מהוספת 9185196 חלקים למולד תשרי של השנה הראשונה (שנה פשוטה בחלקים), וכן הלאה.

החישובים כולם נעשים בחלקים, ולשם הנוחות מוצגים גם בימים, שעות, וחלקים.

חלקה הראשון של הטבלה מכיל חישובי מולדות של תשרי של כל שנה מ- 19 שנות המחזור.

כדלהלן:

$$D1 = \text{mod}(E1, 7)$$

$$H1 = \text{מולד המוצא} + A1$$

$$J1 = E2 - E1$$

עמודה \ שורה	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
	שנה	מעוברת?	מעוברת אחרי	יום בשבוע	ימים	שעות	חלקים	המרה לחלקים	חלקים ושעות	מס' ימי השנה
1	1	0	1	1	8	0	409	207769	409	354
2	2	0	0	5	362	9	205	9392965	9925	354
3	3	1	0	2	716	18	1	18578161	19441	384
4	4	0	1	1	1100	15	590	28528790	16790	355
5	5	0	0	6	1455	0	386	37713986	386	354
6	6	1	0	3	1809	9	182	46899182	9902	384
7	7	0	1	2	2193	6	771	56849811	7251	354
8	8	1	0	6	2547	15	567	66035007	16767	384
9	9	0	1	5	2931	13	76	75985636	14116	354
10	10	0	0	2	3285	21	952	85170832	23632	355
11	11	1	0	0	3640	6	748	94356028	7228	384
12	12	0	1	6	4024	4	257	104306657	4577	354
13	13	0	0	3	4378	13	53	113491853	14093	354
14	14	1	0	0	4732	21	929	122677049	23609	384
15	15	0	1	6	5116	19	438	132627678	20958	355
16	16	0	0	4	5471	4	234	141812874	4554	354
17	17	1	0	1	5825	13	30	150998070	14070	384
18	18	0	1	0	6209	10	619	160948699	11419	354
19	19	1	0	4	6563	19	415	170133895	20935	384

העמודה הנקראת מסי ימי השנה – הכוונה לפני הפעלת כללי הדחיות.

החלק השני של הטבלה מכיל את חוקי הדחיות, מספר ימי השנה לאחר הכלת חוקי הדחיות, וחישוב סימן השנה באופן אוטומטי, כדלהלן:

העמודה הנקראת סך התזוזה משמעה בכמה ימים נדחה יום ראש השנה בעקבות הדחיות.

$K1=J1-R1+R2$

$M1=IF(OR(D1=1,D1=4,D1=6),1,0)$

$R1=M1+N1+O1+2*P1+2*Q1$

חוקי הדחיות										
	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
	ימי השנה לאחר החוקים	יום בשבוע לאחר דחייה	חוק 1	חוק 2	חוק 3	חוק 4	חוק 5	התזוזה	אינדקס	המרת אינדקס הלוח לסימני הלוח
1	353	2	1	0	0	0	0	1	233	בחג
2	355	5	0	0	0	0	0	0	551	השא
3	384	3	0	1	0	0	0	1	340	גכז
4	355	2	1	0	0	0	0	1	255	בשה
5	353	0	1	0	0	0	0	1	031	זחא
6	384	3	0	0	0	0	0	0	340	גכז
7	355	2	0	0	0	0	0	0	255	בשה
8	383	0	1	0	0	0	0	1	033	זחג
9	355	5	0	0	0	0	0	0	551	השא
10	354	3	0	1	0	0	0	1	345	גכה
11	385	0	0	0	0	0	0	0	055	זשה
12	355	0	1	0	0	0	0	1	053	זשג
13	354	5	0	0	0	1	0	2	540	הכז
14	383	2	0	0	1	0	0	2	235	בחח
15	355	0	1	0	0	0	0	1	053	זשג
16	354	5	1	0	0	0	0	1	540	הכז
17	383	2	1	0	0	0	0	1	235	בחח
18	355	0	0	0	0	0	0	0	053	זשג
19	385	5	1	0	0	0	0	1	553	השג

$N19=IF(AND(I19>=19440,D19=2),1,0)$

$O19=IF(AND(I19>=19440,OR(D19=3,D19=5,D19=0)),1,0)$

$P19=IF(AND(B19=0,D19=3,I19<19440,I19>=9924),1,0)$

$Q19=IF(AND(C35=0,E35=3,J35<19440,J35>=9924),1,0)$

הסבר על המרת כללי הדחיות לחמשה כללים :

חוק 1 – מתאים לדחיית "לא אדו ראש" – הכלל נשאר כשהיה ועבור ימים 1,4,6, התנאי מתקיים ובעמודה M יופיע 1 (פרמטר לוגי המציין הזזת יום אחד).

חוק 2 – אם היום שווה 2 וסך החלקים והשעות גדול שווה ל- 19440 (מולד זקן ביום ב'), התנאי מתקיים ובעמודה N יופיע 1 (פרמטר לוגי המציין הזזת יום אחד).³⁵

חוק 3 – עבור ימים 0,5,3 וסך החלקים והשעות גדול שווה ל- 19440 (מולד זקן בימים ג',ה',ז'), התנאי מתקיים ובעמודה O יופיע 1 (פרמטר לוגי המציין הזזת שני ימים).

חוק 4 – אם השנה פשוטה, והיום שווה 3, וסך החלקים והשעות גדול שווה ל- 9924³⁶ וקטן מ- 19440 התנאי מתקיים ובעמודה P יופיע 1 (פרמטר לוגי המציין הזזת שני ימים).

חוק 5 – אם השנה אחרי מעוברת והיום שווה 2 וסך החלקים והשעות גדול שווה ל- 16789³⁷ וקטן מ- 19440 התנאי מתקיים ובעמודה Q יופיע 1 (פרמטר לוגי המציין הזזת יום אחד).

אינדקס (עמודה S) – $(L17\&RIGHT(K17,1) \&IF(L18-2<0,7+L18-2,L18-2))$, האינדקס בנוי מצירוף של שלוש ספרות. הראשונה יום ר"ה = יום בשבוע אחרי הדחייה, השנייה הספרה הימנית של ימי השנה אחרי החוקים, והשלישית יום בשבוע של ראש השנה הבאה לאחר הדחייה פחות 2 ימים (אם התוצאה שלילית מוסיפים 7).

המרת האינדקס לסימן השנה (עמודה T)

המרת סימן השנה :

3	ח
4	כ
5	ש

³⁵ 19440 – מספר חלקים המתאים ל- 18 שעות.

³⁶ 9924 – מספר חלקים בהתאמה ל- ט' ר"ד.

³⁷ 16789 – מספר חלקים בהתאמה ל- ט"ו תקפ"ט.

- ביישום זה המחשב מריץ בעמודה H1 את הערכים מ- 26329 ועד 207764 (סה"כ 181440 אפשרויות) {או כל תחום גבולות אחר שנבחר}. מעבר זה סורק באופן ממוחשב את כל האפשרויות הקיימות ע"י מעבר על כל "החלקים" של השבוע (7*24*1080). נקודת ההתחלה נבחרה כראש מחזור 1:00:409.³⁸
- בכל פעם נוצר אפיון המתאים ל- H1 המוזן, המחשב כותב את האפיון בדף עבודה נפרד הפעם בשורות. בכל תזוזה של חלק המחשב בודק האם נוצר אפיון חדש במידה ולא אזי ממשיך הלאה במידה וכן אזי נכתבת שורה חדשה המציינת אפיון מחזור חדש.

הקוד ב- VISUAL BASIC

```
(Sub I()
```

```
Dim myres As Boolean
```

```
Dim cntRes As Integer
```

```
cntRes = 1
```

```
myres = True
```

```
Sheets("table").Select
```

```
For i = 26329 To 207764 Step 5
```

i - משתנה המייצג את מספר החלקים שיוזנו כמולד ראש המחזור.

STEP – משמעו "הקפיצה" בכל לולאה. Step=5, משמעו קפיצה של 5 חלקים וזאת עקב התופעה שמולד ראש מחזור תמיד יהיה מהצורה 4+5X, כמוסבר לעיל.

```
Sheets("table").Cells(17, 9) = i
```

```
myres = True
```

```
For j = 1 To 19
```

³⁸ מראש נבחרה "נקודת גבול" בכדי שלא לקבל 62 שורות כך שהאחרונה משלימה את הראשונה.

j – משמעו גודל הסדרה הנבדקת. עבור לוח ס"א ראשים הסדרה 19, עבור לוח רמ"ז המשתנה j יקבל את הערכים מ-1 ועד 247.

```
If Cells(j + 16, 21) <> Sheets("res").Cells(cntRes, j + 1) Then
```

```
myres = False
```

```
Exit For
```

```
End If
```

```
Next j
```

```
If myres = False Then
```

```
cntRes = cntRes + 1
```

```
Sheets("res").Cells(cntRes, 1) = i
```

```
For j = 1 To 19
```

```
Sheets("res").Cells(cntRes, j + 1) = Cells(j + 16, 21)
```

```
Next j
```

```
End If
```

```
Next i
```

```
End Sub
```

לוח ארבעה שערים

רקע היסטורי

מתוך כל לוחות העזר, לחישובי מולדות, "זכות הבכורה" מגיעה ללוח ארבעה שערים.

גאוני בבל הנהיגו במאה התשיעית, את מציאת קביעת השנה רק על סמך מולד תשרי, וידיעת מספר השנה במחזור הירחי של 19 שנות המחזור, ללא צורך בידיעה ויישום של כללי "הדחיות".

המקורות הקדומים שבהם מופיע הלוח

במקורות הקדומים הלוח מובא באופן מילולי, לעיתים אף בהשמטת חלק מהנתונים, או בהצגת נתונים שגויים. במאה ה-19 החלו בהצגה טבלאית של לוח זה.

אל – כ'וארזמי

המקור הקדום ביותר בו אנו מוצאים את הלוח הוא חיבורו, בערבית, של מתמטיקאי ותוכן מוסלמי בשם **אל-כ'וארזמי**. אל כ'וארזמי חיבר מאמר על הלוח העברי בשנת (ד' תקפ"ה) 824 למניין האזרחי, ובו בין היתר הוא מביא את כללי לוח ארבעה שערים. המקור פורסם ע"י Kennedy³⁹ כבר בשנת 1964, ותורגם לעברית ע"י י"צ לנגרמן (תשמ"ז). מאמרו של לנגרמן העלה מחדש את הדיון ההיסטורי בשאלת זמן חיתום הלוח כפי שאנו מכירים אותו היום⁴⁰.

לנגרמן מנסה לערער את התיאוריה של בורנשטיין, המאחר את חיתום הלוח וזאת מתוך העובדה שחיבורו של אל כ'וארזמי פורסם עוד קודם מכתבו המפורסם של ראש הגולה (ד' תקצ"ו) (שנשתברו עליו קולמוסים רבים⁴¹ ובו קביעת השנה, שונה מכללי הלוח שלנו).

שר-שלום (תשמ"ח) חולק על לנגרמן, ומשער שלוח ארבעה שערים נכנס מאוחר יותר לחיבורו של אל-כ'וארזמי⁴². הנקודה המרכזית שמעלה שר שלום היא שבחיבור זה **נעדרת** נקודת ההתחלה למניין המולדות, ולכן גם אם הכללים שפורסמו היו ידועים, עדיין ללא נקודת ההתחלה אי אפשר לקבוע את סימן השנה. אחרים⁴³ ניסו לדלות מפרטים נוספים בחיבור זה את נקודת ההתחלה למולדות, אולם ככל הנראה סעיף זה עדיין טעון ליבון.

³⁹ E.S.Kennedy, 'AL-Khwarizmi on the Jewish Calendar', Scripta Mathematica 27(1964)

⁴⁰ בורנשטיין בכמה פרסומים הביא ראיות לאיחור חתימת הלוח, הרב כשר (תו"ש חי"ג) מנסה להפריך את הוכחותיו של בורנשטיין. (ובהמשך רבים וטובים כתבו עוד בנדון, ואכמ"ל).

⁴¹ ראה: סיכום במאמר "בחזרה למכתב ראש הגולה" (ואלטר) בתוך "יד יצחק" והערות שר שלום שם.

⁴² במאמריו המאוחרים חזר בו שר שלום מהשערה זו לאחר שהגיע למסקנה שלוח ד' השערים יכול היה להיווצר ולהיות שימושי בכל חשבון מולדות. ראה – שר-שלום, רחמים. מלומדים מוסלמים במאה ה-9 על הלוח העברי, סיני קמ"ד, עם השלמות ותיקונים מאת המחבר באתר דעת-2009 (עמוד 4, סעיף 13 והערה 6). בקישור הבא:

http://www.daat.ac.il/daat/shabat/luach/sarshalom_muslim.pdf

⁴³ לוינגר, בלר (ראה שם אצל שר- שלום במהדורת האינטרנט בהערה 46).

רס"ג

כתשעים שנה מאוחר יותר פרצה "המחלוקת" המפורסמת בין רס"ג ובן מאיר, בהקשר לקביעת השנים ד' תרפ"ב-ד.

רס"ג הוא המקור היהודי הראשון⁴⁴ שפרסם את הלוח בפירושו לספר יצירה⁴⁵, קרוב לשנת 925. ארבעת השערים הובאו גם אצל רב עמרם גאון⁴⁶, אלבירוני⁴⁷, ר' יוסי אלנהרואני (בתקופת רס"ג), בספר העבור לאברהם בר' חייא הנשיא, ועוד⁴⁸.

מקור השם "ארבעה שערים"

בספרות המודרנית לוח "ארבעה שערים" מוצג כשארבעת השערים המופיעים בעמודות, מייצגים ארבעה סוגים של שנים ב- 19 שנות המחזור. בניגוד לכך במקורות הקלאסיים השם "ארבעה שערים" נלקח מארבעת הימים "הכשרים" לקבוע בהם את ראש השנה: **ב,ה,ג,ז**, וכך כותב "הנשיא"⁴⁹ – אברהם בר' חייא, בספר העבור⁵⁰:

"והימים הראויים לקבוע תשרי הן יום שני ויום שלישי ויום חמישי ויום שבת וסימניהון בגה"ז ונקרין **ארבעה שערים** (ההדגשה שלי ע.ר.) מפני שהקיבוע בהן הולך מיום אל יום ושאר ימי השבוע אין חוששין להן מפני שאינם ראויים, וכל אחד מאלו הארבעה שערים מתחלף על שלשה עניינים, יכול תהייה השנה חסרה ויכול תהיה כסדר ויכול שלמה הן בפשוטה והן במעוברת, וכשאתה כופל אלו ארבעה שערים בשלשה חילופי השנים יעלה בידך י"ב סימנים וכן סימני השנים המעוברות, וכשאתה בא לבדיקת העיון הזה תמצא בהן סימנים שהן יכולין להמצא ויוצאין לידי מעשה, וסימנין שהן יכולין להמצא ואינן יוצאין לידי מעשה, וסימנין שאינן יכולין להמצא ולא יוצאין לידי מעשה ואנו בודקין על הסימנים האלו בארבעה השערים"

רואים אנו שהחלוקה לארבעה שערים נובעת מ-"הימים" ולא מסוגי השנים.

⁴⁴ לפיכך היו ששערו שממציא הלוח הוא רס"ג (ברנשטיין, "מחלוקת" עמ' 25 בשם מעבר קדמון בסוף מחזור רומי כ"י, ובעקבותיו גרץ "דברי ימי היהודים").

⁴⁵ שכטר הו"ל לוח ארבעה שערים מגניזת מצרים. (הובא גם אצל בורנשטיין (מחלוקת) עמ' 99, ועמ' 25 בהערה 2.

⁴⁶ דברי ימי העבור עמ' 232 בהערה 1 בשם מרכס – "אוטרזוכונגן צום סדור דעס גאון רב עמרם" (ברלין 1908 עמ' 18).

⁴⁷ איש מדע מוסלמי 973-1048. הובא בתרגום האנגלי (עמ' 150) של הספר "מסורות העבר" (בתרגום חופשי) –

The chronology of ancient nations: an English version of the Arabic text of the Athâr-ul-Bâkiya of Albîrûnî, or "Vestiges of the Past" /collected and reduced to writing by the author in A.H. 390-1, A.D.

1000 ; translated and edited, with notes and index, by Dr. C. Edward Sachau : London

⁴⁸ מחלוקת עמ' 23 בהערה.

⁴⁹ מתמטיקאי, אסטרונום, ופילוסוף, פעל במאה ה-12 בברצלונה שבספרד. בעברית נוסף לשמו תואר הכבוד "הנשיא", כמו כן כונה בשם "Savasorda" מונח שהשתרבב מתרגום קלוקל של תואר הכבוד בערבית- "צאחב א-שרטה", שפירושו "מפקד המשמר" או "ראש השלישים". ועוד – זיסקינד, קלרה. 2004. חיבורים מתמטיים של שני חכמי ספרד. בתוך "קשר חם. טכניון: חיפה.

⁵⁰ השער התשיעי, במהד' פיליפאווסקי .

לוח ארבעה שערים בכל המקורות הקדומים לא מופיע בכתובה טבלאית מודרנית אלא בניסוח מילולי המגדיר את הגבולות השונים בהתאם ליום.

בורנשטיין היה הראשון ש"הפך" את הטבלה⁵¹ (Transpose) והציג את העמודות קרי "השערים" כארבעה סוגי **השנים** במחזור י"ט.

⁵¹ 'מחלוקת' עמ' 24, דברי ימי העבור האחרונים עמ' 233.

המבנה המתמטי של לוח ארבעה שערים⁵²

הלוח מבוסס על מציאת גבולות תשרי של כל שנה משנות המחזור שבהם סימן השנה משתנה.

בשיטה הקלאסית חישוב סימן השנה מצריך סדרה של חישובים:

- מציאת מולד תשרי של השנה המבוקשת.
- מציאת מולד תשרי של השנה העוקבת.
- החלת הדחיות על 2 השנים ומציאת יום ראש השנה בכל אחת מהן.
- חישוב הימים שבין 2 ראשי השנים לצורך מציאת אורכם של חודשי מרחשוון וכסלו.

למציאת סימן השנה בעזרת לוח ארבעה שערים דרושים לנו שני נתונים בלבד:

- מולד תשרי של השנה המבוקשת.
- מספר השנה במחזור י"ט.

עיון בטבלה בשורה המתאימה יניב באופן מידי את סימן השנה המבוקשת.

על מנת להבין את המבנה הלוגי של לוח זה, נבחן את המבנה הפנימי של מחזור 19 השנים בלוח העברי.

⁵² פרק זה נשלח לפרסום כיחידה עצמאית תחת הכותרת: "המבנה המתמטי של לוח ארבעה שערים וחישובי שכיחויות בלוח העברי", יפורסם בבד"ד 28, מרצבך (עורך), תשע"ד.

המבנה הפנימי של מחזור י"ט שנים

כפי שניתן לראות להלן ניתן להגדיר ארבעה "רצפים" כשבכל רצף שלוש שנים, כדלהלן:

שנות המחזור	פ,מ,פ	פ,פ,מ	מ,פ,פ	מ,פ,מ
1	1	1	19	1
2	2	2	1	2
3	3	3	2	3
4	4	4	3	4
5	5	5	4	5
6	6	6	5	6
7	7	7	6	7
8	8	8	7	8
9	9	9	8	9
10	10	10	9	10
11	11	11	10	11
12	12	12	11	12
13	13	13	12	13
14	14	14	13	14
15	15	15	14	15
16	16	16	15	16
17	17	17	16	17
18	18	18	17	18
19	19	19	18	19
	1			

(מקראה: פ – פשוטה, מ- מעוברת, פ* - פשוטה אחר מעוברת).

- פ* (פ,מ) מ (פשוטה בין פשוטה ומעוברת) [שנים: 2,5,10,13,16]
- מ, (פ,פ) פ (פשוטה בין מעוברת ופשוטה) [שנים: 1,4,9,12,15]
- מ, (פ*,פ) מ (פשוטה בין 2 מעוברות) [שנים: 7,18]
- פ, (מ) פ (מעוברת לעולם בין 2 פשוטות) [שנים: 3,6,8,11,14,17,19]

השנה הנבדקת היא האות האמצעית ברצף דלעיל (מוקפת).

אם נסדר את סוגי השנים לפי האפשרויות השונות של צירופים נקבל:

ברצף פשוטה-מעוברת- פשוטה נקבל את השנים-

2	5	7	10	13	16	18
3	6	8	11	14	17	19
4	7	9	12	15	18	1

ברצף פשוטה-פשוטה-מעוברת נקבל את השנים-

1	4	9	12	15
2	5	10	13	16
3	6	11	14	17

ברצף מעוברת-פשוטה- פשוטה נקבל את השנים-

19	3	8	11	14
1	4	9	12	15
2	5	10	13	16

ברצף מעוברת-פשוטה-מעוברת נקבל את השנים-

6	17
7	18
8	19

העולה מכך, שעל מנת לבדוק את סימני כל 19 שנות המחזור נוכל להסתפק בבדיקת **4 שנים בלבד** כשכל אחת מהן תלמד לא רק על עצמה אלא על התנהגות כל יתר השנים השייכות לאותו רצף.

לדוגמא בדיקת השתנות סימן השנה של השנה ה- 2 במחזור, על פני חלקי השבוע, תלמד אותנו על השתנות סימן כל הדומות לה קרי -השנים 5,10,13,16.⁵³

⁵³ כמובן שבשיטה זו אין צמצום לכפולות של 5.

בדיקת השתנות סימן השנה בארבעת הרצפים

נבצע בדיקה⁵⁴ נפרדת עבור כל "רצף" מארבעת הרצפים שלעיל, ונקבל טבלאות כדלהלן:

עבור הרצף הראשון פ*,פ, מ, נקבל:

פריסת גבולות				
חלקים	שנה 2	יום	שעה	חלק
19440	בחג	0	18	0
35844	בשה	1	9	204
71280	גכה	2	18	0
87684	הכז	3	9	204
139524	השא	5	9	204
149040	זחא	5	18	0
165444	זשג	6	9	204

טבלה מס' 1

עבור הרצף השני מ, פ*,פ, נקבל:

פריסת גבולות				
חלקים	שנה 1	יום	שעה	חלק
19440	בחג	0	18	0
35844	בשה	1	9	204
68629	גכה	2	15	589
87684	הכז	3	9	204
139524	השא	5	9	204
149040	זחא	5	18	0
155928	זשג	6	0	408

טבלה מס' 2

עבור הרצף השלישי מ, פ*,מ, נקבל:

פריסת גבולות				
חלקים	שנה 7	יום	שעה	חלק
19440	בחג	0	18	0
35844	בשה	1	9	204
68629	גכה	2	15	589
87684	הכז	3	9	204
139524	השא	5	9	204
149040	זחא	5	18	0
165444	זשג	6	9	204

טבלה מס' 3

⁵⁴בדיקה הכוונה – בדיקת השתנות סימן השנה, "במשך" כל חלקי השבוע (181440).

עבור הרצף הרביעי פ, מ, פ, נקבל:

פריסת גבולות				
חלקים	שנה 3	יום	שעה	חלק
19440	בחה	0	18	0
48011	בשז	1	20	491
71280	גכז	2	18	0
97200	החא	3	18	0
116255	השג	4	11	695
149040	זחג	5	18	0
177611	זשה	6	20	491

טבלה מס' 4

שילוב של ארבע הטבלאות לטבלה אחת, יניב את לוח ארבעה שערים.

הערה: בכל אחת מהטבלאות יש 7 שורות בלבד⁵⁵ שילוב ארבע הטבלאות מחייב לפתוח שורות כמספר הגבולות השונים של כל ארבע הטבלאות דלעיל, כך שבלוח ארבעה שערים יהיו 13 שורות, כדלהלן בטבלה מס' 5.

לוח ארבעה שערים – שילוב הטבלאות

				רצף 1 - בין פ ו-מ	רצף 2- בין מ ו-פ	רצף 3 - בין מ	רצף 4 – שנים מעוברות
פריסת גבולות			בחלקים	שנים	שנים	שנים	שנים
יום	שעה	חלק		2,5,10,13,16	1,4,9,12,15	7,18	3,6,8,11,14,17,19
0	18	0	19440	בחג			בחה
1	9	204	35844	בשה	בשה	בשה	
1	20	491	48011		גכה	גכה	גכה
2	15	589	68629	הכז			
2	18	0	71280		השא		
3	9	204	87684	זחא	זחא	זחא	זחג
3	18	0	97200				
4	11	695	116255	זשה	זשה	זשה	
5	9	204	139524				
5	18	0	149040				זשה
6	0	408	155928				
6	9	204	165444				זשה
6	20	491	177611				

טבלה מס' 5

⁵⁵ בכל רצף של n שנים נקבל $3n+4$ שורות (יפה, קורות חשבון העבור - עמוד קס"ח בהערה המסומנת בכוכבית). [ראה הוכחה להלן בעמוד 57 ואילך]. יש לציין שכל שנה ברצף הנבחר ידוע אם היא פשוטה או מעוברת.

דוגמא לשימוש בלוח ארבעה שערים :

מולד תשרי של שנת תשע"ב חל ב-3-23-158 (יום ג' בשבוע, שעה 23, 158 חלקים).

שנת תשע"ב היא השנה ה-15 במחזור⁵⁶. נמצא את הגבול המתאים בעמודה הנקראת "פריסת גבולות", נמצא את השנה ה-15 במחזור ברצף השני ויתקבל סימן השנה ה,כז, (יום א' בתשרי ביום חמישי, חודשי השנה כסדרן, פסח בשבת).

				רצף 1 - בין פ ו-מ	רצף 2 - בין מ ו-פ	רצף 3 - בין מ	רצף 4 - שנים מעוברות
				שנים 2,5,10,13,16	שנים 1,4,9,12,15	שנים 7,18	שנים 3,6,8,11,14,17,19
פריסת גבולות				בחלקים	שנים	שנים	שנים
יום	שעה	חלק	בחלקים				
0	18	0	19440	בחג			בחה
1	9	204	35844	בשה	בשה	בשה	בשז
1	20	491	48011		גכה	גכה	
2	15	589	68629	הכז	הכז	הכז	החא
2	18	0	71280		זחא	זחא	
3	9	204	87684	זשג	זשג	זשג	זשה
3	18	0	97200		זשג	זשג	
4	11	695	116255	זשג	זשג	זשג	זשה
5	9	204	139524	זשג	זשג	זשג	זשה
5	18	0	149040	זשג	זשג	זשג	זשה
6	0	408	155928	זשג	זשג	זשג	זשה
6	9	204	165444	זשג	זשג	זשג	זשה
6	20	491	177611	זשג	זשג	זשג	זשה

לוח ארבעה שערים "מעודכן" וחישובי שכיחויות

על מנת לבצע חישוב שכיחות לכל סימן שנה, לכאורה היה עלינו "לחשב" את "השטח היחסי" שכל סימן שנה תופס בטבלה. השטח היחסי משמעו השטח המבוקש חלקי השטח של הטבלה כולה.

לדוגמא סימן השנה **הכז** מופיע ברצפים : 1,2,3 (12 מתוך 19 שנות המחזור), ובגבולות מ- 87684 עד (ולא בכלל) 139524 ז"א שהשטח היחסי של סימן הכז בטבלה הוא :

$$\frac{12 * (139524 - 87684)}{19 * 181440}$$

במונה כתבנו את 'שטח' הכז ואילו במכנה כתבנו את 'שטח' הטבלה כולה (19 שנות המחזור ככול שבוע).

מסקנותינו הקודמות⁵⁷ העלו (ביחס ללוח ס"א ראשים) ששיטה זו אינה מניבה את התוצאה המדויקת משום שמולד תשרי של ראש מחזור לא יכול לחול בכל רגע מרגעי השבוע.

⁵⁶ ע"פ הנוסחה - $5772 \bmod(19) = 15$.
⁵⁷ ראה הערה 2.

בניגוד ללוח ס"א ראשים כאן עלינו לבדוק חלות מולד תשרי של כל שנה מ- 19 שנות המחזור. לשם כך ננתח את הפונקציה המתארת את מולד תשרי של כל שנה ושנה.

פונקציית מולד תשרי

מולד תשרי של ראש מחזור ייראה מהצורה:

$$f(x) = [57444 + (x * 69715)] \bmod(181440)$$

57444 – בהר"ד, 69715 – יתרון מחזור, 181440 – שבוע.

הסבר- נצא ממולד המוצא בהר"ד ונתקדם בקפיצות של 69715 חלקים כל פעם. (mod(181440) - פירושו ניכוי השבועות השלמים).

מכיוון שהמחלק המשותף הגדול של שני המספרים הוא $GCD(181440, 69715) = 5$

לכן קפיצות של מחזור על פני שבוע, יניבו "רווחים" של 5 ביניהן, לכן את הפונקציה המתארת מולד ראש מחזור ניתן לכתוב כדלהלן:

$$\{f(x)|x\} = 4 + 5x$$

כאשר המשתנה x מקבל את הערכים 0 עד $36287 \leq$ מחזוריות הלוח.

הסבר: ממולד בהר"ד השארנו את השארית לאחר החלוקה ב- 5 (הזזנו את שעון המודולו לערך הנמוך ביותר כך שעבור $x=0$ נקבל $f(x)=4$, ואילו עבור $x=36287$ נקבל $f(x) = 181439$).

אמור מעתה שמולד תשרי של ראש מחזור לעולם יסתיים בספרה 4 עבור X זוגי, או בספרה 9 עבור X אי זוגי !!

עתה נשאלת השאלה כיצד נראית הפונקציה המתארת מולד תשרי של שאר השנים במחזור שאינן "ראש מחזור".

לשם פתרון בעיה זו נעזר בטבלת מולד תשרי של 19 שנות המחזור הראשונות בלוח:

	יום בשבוע	מספר ימים	שעה	חלק	בחלקים
מולד בהר"ד	2	2	5	204	57444
מולד ו, י"ד	6	356	14	0	9242640
תשרי שנה 3	3	710	22	876	18427836
תשרי שנה 4	2	1094	20	385	28378465
תשרי שנה 5	0	1449	5	181	37563661
תשרי שנה 6	4	1803	13	1057	46748857
תשרי שנה 7	3	2187	11	566	56699486
תשרי שנה 8	0	2541	20	362	65884682
תשרי שנה 9	6	2925	17	951	75835311
תשרי שנה 10	4	3280	2	747	85020507
תשרי שנה 11	1	3634	11	543	94205703
תשרי שנה 12	0	4018	9	52	104156332
תשרי שנה 13	4	4372	17	928	113341528
תשרי שנה 14	2	4727	2	724	122526724
תשרי שנה 15	1	5111	0	233	132477353
תשרי שנה 16	5	5465	9	29	141662549
תשרי שנה 17	2	5819	17	905	150847745
תשרי שנה 18	1	6203	15	414	160798374
תשרי שנה 19	6	6558	0	210	169983570

מכיוון שבין כל שנה במחזור n לבין המקבילה לה במחזור n+1 תמיד יחלפו 235 חודשים, לכן כל שנה מהווה מעין ראש מחזור ולכן "יתרון מחזור" = 69715 תקף גם כאן!

מעיון בשני המחזורים הראשונים נראה מיד את ספרת היחידות האפשרית עבור כל שנה במחזור :

	יום בשבוע	שעה	חלק	בחלקים
מולד בהר"ד	2	5	204	57444
מולד ו, י"ד	6	13	1080	9242640
תשרי שנה 3	3	22	876	18427836
תשרי שנה 4	2	20	385	28378465
תשרי שנה 5	0	5	181	37563661
תשרי שנה 6	4	13	1057	46748857
תשרי שנה 7	3	11	566	56699486
תשרי שנה 8	0	20	362	65884682
תשרי שנה 9	6	17	951	75835311
תשרי שנה 10	4	2	747	85020507
תשרי שנה 11	1	11	543	94205703
תשרי שנה 12	0	9	52	104156332
תשרי שנה 13	4	17	928	113341528
תשרי שנה 14	2	2	724	122526724
תשרי שנה 15	1	0	233	132477353
תשרי שנה 16	5	9	29	141662549
תשרי שנה 17	2	17	905	150847745
תשרי שנה 18	1	15	414	160798374
תשרי שנה 19	6	0	210	169983570
תשרי שנה 20	4	21	799	127159
תשרי שנה 21	2	8574	595	9312355
תשרי שנה 22	6	15	391	18497551
תשרי שנה 23	5	12	980	28448180
תשרי שנה 24	2	21	776	37633376
תשרי שנה 25	0	6	572	46818572
תשרי שנה 26	6	4	81	56769201
תשרי שנה 27	3	12	957	65954397
תשרי שנה 28	2	10	466	75905026
תשרי שנה 29	6	19	262	85090222
תשרי שנה 30	4	4	58	94275418
תשרי שנה 31	3	1	647	104226047
תשרי שנה 32	0	10	443	113411243
תשרי שנה 33	4	19	239	122596439
תשרי שנה 34	3	16	828	132547068
תשרי שנה 35	1	1	624	141732264
תשרי שנה 36	5	10	420	150917460
תשרי שנה 37	4	7	1009	160868089
תשרי שנה 38	1	16	805	170053285

את סך החלקים של מולד תשרי נחלק ב- 5 וניקח את השארית :

מסקנה : מולד תשרי של שנה כל שהיא יחול בהתאם ל- 2 העמודות בצד ימין של הטבלה הבאה :

שנה	בחלקים	partMOD(5)	partMOD(5)+5
מולד בהר"ד	57444	4	9
מולד ו, י"ד	9242640	0	5
תשרי שנה 3	18427836	1	6
תשרי שנה 4	28378465	0	5
תשרי שנה 5	37563661	1	6
תשרי שנה 6	46748857	2	7
תשרי שנה 7	56699486	1	6
תשרי שנה 8	65884682	2	7
תשרי שנה 9	75835311	1	6
תשרי שנה 10	85020507	2	7
תשרי שנה 11	94205703	3	8
תשרי שנה 12	104156332	2	7
תשרי שנה 13	113341528	3	8
תשרי שנה 14	122526724	4	9
תשרי שנה 15	132477353	3	8
תשרי שנה 16	141662549	4	9
תשרי שנה 17	150847745	0	5
תשרי שנה 18	160798374	4	9
תשרי שנה 19	169983570	0	5

טבלה מסי 6

העולה מהאמור שהפונקציה המתארת מולד תשרי (כל שהוא ולא רק "ראש מחזור") תמיד תהייה מהצורה :

$$f(x) = a + 5x$$

כאשר a מציינת את ספרת היחידות של החלקים של מולד תשרי (partMOD(5) , בטבלה 6 דלעיל)

כפי שמולד תשרי של ראש מחזור נראה :

$$f(x) = 4 + 5x$$

מולד תשרי של השנה שמספרה 2 בכל מחזור יראה :

$$f(x) = 0 + 5x$$

וכן יתר הפונקציות המתארות את מולד ראש המחזור, בהתאמה.

מצוידים במידע זה נחזור לבדיקת הרצפים המרכיבים את טבלת 'ארבעה שערים'.

בדיקת הרצף הראשון (פ, *פ, מ):

הטבלה הראשונה מכילה את הגבולות עבור השנים 2,5,10,13,16. (מודגש באפור בטבלה).

מעיון בטבלה מס' 5 אנו למדים ששנים אלו מסתיימות בחלקים כדלהלן:

שנה	חלקים
תשרי שנה 1	4,9
תשרי שנה 2	0,5
תשרי שנה 3	1,6
תשרי שנה 4	0,5
תשרי שנה 5	1,6
תשרי שנה 6	2,7
תשרי שנה 7	1,6
תשרי שנה 8	2,7
תשרי שנה 9	1,6
תשרי שנה 10	2,7
תשרי שנה 11	3,8
תשרי שנה 12	2,7
תשרי שנה 13	3,8
תשרי שנה 14	4,9
תשרי שנה 15	3,8
תשרי שנה 16	4,9
תשרי שנה 17	0,5
תשרי שנה 18	4,9
תשרי שנה 19	0,5

באופן מפתיע קיבלנו **כיסוי מלא** של כל החלקים!! שנה 2 מסתיימת ב- 0 או 5, שנה 5 ב- 1 או 6 וכן הלאה. **כלומר עבור, סך ההיקריות הנובעות מהרצף הראשון, יהיה שווה לסך כל החלקים שבין הגבולות של טבלה זו (השנים ברצף זה מודגשות).**

בדיקת הרצף השני (מ, *פ, פ):

הטבלה השנייה מתייחסת לשנים: 1,4,9,12,15 גם כאן מקבלים בדיוק כיסוי מלא של כל החלקים (השנים ברצף זה מודגשות).

שנה	חלקים
תשרי שנה 1	4,9
תשרי שנה 2	0,5
תשרי שנה 3	1,6
תשרי שנה 4	0,5
תשרי שנה 5	1,6
תשרי שנה 6	2,7
תשרי שנה 7	1,6
תשרי שנה 8	2,7
תשרי שנה 9	1,6
תשרי שנה 10	2,7
תשרי שנה 11	3,8
תשרי שנה 12	2,7
תשרי שנה 13	3,8
תשרי שנה 14	4,9
תשרי שנה 15	3,8
תשרי שנה 16	4,9
תשרי שנה 17	0,5
תשרי שנה 18	4,9
תשרי שנה 19	0,5

בדיקת הרצף השלישי (מ, פ*, מ):

רצף זה מתייחס לשנים 7, ו-18 במחזור.

שנה 7, מסתיימת בחלקים 1 או 6, ואילו שנה 18 ב-4 או 9. כאן כבר **לא ניתן** לומר שסך ההיקרויות שווה לסך החלקים.

להלן טבלה המכילה את הגבולות המתוקנים לשנה 7 ולשנה 18 (בהתאם לחלות מולד תשרי שלהן), ואת חישובי ההיקרויות בהתאם.

חלקים	שנה 7/18	פריסת גבולות			שנה 7			שנה 18			סיכום
					מ-	עד (ולא בכלל)	סך היקריות	מ-	עד (ולא בכלל)	סך היקריות	
19440	בחג	0	18	0	19441	35846	3281	19444	35844	3280	6561
35844	בשה	1	9	204	35846	68631	6557	35844	68629	6557	13114
68629	גכה	2	15	589	68631	87686	3811	68629	87684	3811	7622
87684	הכז	3	9	204	87686	139526	10368	87684	139524	10368	20736
139524	השא	5	9	204	139526	149041	1903	139524	149044	1904	3807
149040	זחא	5	18	0	149041	165446	3281	149044	165444	3280	6561
165444	זשג	6	9	204	165446	200881	7087	165444	200884	7088	14175
בדיקה							36288	36288			

טבלה מסי 7

הסבר לטבלה מספר 7:

"תיקוני גבולות"

שנה 7:

ראשית עלינו "לתקן" את הגבולות בהתאם להיקרות ספרת היחידות של החלקים. שנה 7 שכאמור מולד תשרי שלה תמיד יהיה מהצורה $5X + 1$, יכול להסתיים או ב-1 או ב-6 ולכן כאשר אנו רוצים לחשב את ההיקריות של שנה זו, עלינו "לעגל" את מולד ההתחלה של הגבול כלפי מעלה כך שישתיים בספרה-1 או בספרה-6.

נוסחת המרה לגבולות 'מי ו- 'עדי (עד לא בכלל):

כאשר סך החלקים = P, את הגבול החדש נסמן ב-Z, בצורה הכללית מולד תשרי תמיד יהיה מהצורה $5X + a$, נוסחת המרה לגבול תהייה:

$$Z = p + [a + 5 - p \bmod 5] \bmod 5$$

הסבר לנוסחה:

P הוא מספר כל שהוא, ועלינו להביאו לצורה שספרת היחידות שלו תהייה a או a + 5.

לשם כך עלינו להוסיף למספר P את סך החלקים החסרים.

$p \bmod 5$ - נותן את שארית החלקים לאחר חלוקה ב-5.

נפחית את השארית הני"ל, מ- $a + 5$ (הוספנו 5 ע"מ שלא יהיה מספר שלילי, ועקב כך צריך גם להוסיף שוב $\text{mod } 5$, למקרה שהמספר בסוגריים מעל 5).

עבור המקרה הפרטי של שנה 7, $a=1$ ולכן נוסחת ההמרה תהייה:

$$Z = p + [6 - p \text{ mod } 5] \text{ mod } 5$$

בדיקה: אם P מסתיים בספרה '1' או '6' אזי $p \text{ mod } 5 = 1$ ולכן $Z = P$.

אם P מסתיים בספרה '7' או '2' אזי $p \text{ mod } 5 = 2$ ולכן $Z = P + 4$

אם P מסתיים בספרה '8' או '3' אזי $p \text{ mod } 5 = 3$ ולכן $Z = P + 3$

אם P מסתיים בספרה '9' או '4' אזי $p \text{ mod } 5 = 4$ ולכן $Z = P + 2$

אם P מסתיים בספרה '0' או '5' אזי $p \text{ mod } 5 = 0$ ולכן $Z = P + 1$

הערה: מכיוון שהטבלה "מעגלית", גבול "עד" מהשורה האחרונה נבנה על ידי הוספת 181440 חלקים לגבול שבשורה הראשונה, כלומר $181440 + 19411$ נותן 200881.

שנה 18:

באופן דומה נבדוק לגבי שנה 18. שנה 18 מסתיימת בספרה '4' או בספרה '9'.

מולד תשרי שלה תמיד מהצורה $5X + 4$.

כאשר אנו רוצים לחשב את ההיקרויות שלו עלינו את המולד התחלה של הגבול "לעגל" כלפי מעלה כך שישתיים בספרה- '4' או ב-'9'.

נוסחת המרה לגבולות 'מי ו- 'עד' (ולא בכלל):

כאשר סך החלקים = P , את הגבול החדש נסמן ב- Z

$$Z = p + [9 - p \text{ mod } 5] \text{ mod } 5$$

ניתן להראות את נכונות הנוסחה באופן דומה.

לאחר שחישבנו בנפרד את ההיקרויות לשנה 7 ולשנה 18 סיכמנו בעמודה הנקראת סיכום את סך ההיקרויות של סימני השנים שברצף השלישי.

בדיקת הרצף הרביעי (פ, מ, פ) :

רצף זה מתייחס לשנים המעוברות במחזור .

שנה	חלקים
תשרי שנה 1	4,9
תשרי שנה 2	0,5
תשרי שנה 3	1,6
תשרי שנה 4	0,5
תשרי שנה 5	1,6
תשרי שנה 6	2,7
תשרי שנה 7	1,6
תשרי שנה 8	2,7
תשרי שנה 9	1,6
תשרי שנה 10	2,7
תשרי שנה 11	3,8
תשרי שנה 12	2,7
תשרי שנה 13	3,8
תשרי שנה 14	4,9
תשרי שנה 15	3,8
תשרי שנה 16	4,9
תשרי שנה 17	0,5
תשרי שנה 18	4,9
תשרי שנה 19	0,5

כדי לחשב כאן את ההיקריות נבדוק גם כאן את ספרת היחידות של החלקים בשנים הני"ל.

נמצא שבנוסף לרצף 0,1,2,3,4, מופיע עוד '0' ועוד '2'.

ולכן צריכים לחשב את סך החלקים שבין הגבולות (בדומה לרצף הראשון והשני) **להוסיף** לסך ההיקריות את התוספת הנובעת מהכפילות של הספרה '2' והספרה '0'.

להלן טבלה המכילה את הגבולות המתוקנים לשנה 8 (מסתיימת ב- 2) ולשנה 17 (מסתיימת ב- 0) (בהתאם לחלות מולד תשרי שלהן), ואת חישובי ההיקריות בהתאם.

$$K45 = (045 + \text{MOD}(((7 - \text{MOD}(045, 5))))), 5$$

$$N45 = 045 + \text{MOD}(((5 - \text{MOD}(045, 5))))), 5$$

	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q
						שנה 8			שנה 17			
	חלקים	שנה 3	פריסת גבולות			מ-	עד (ולא בכלל)	סך היקרויות	מ-	עד (ולא בכלל)	סך היקרויות	סיכום
45	19440	בחה	0	18	0	19442	48012	5714	19440	48015	5715	11429
46	48011	בשז	1	20	491	48012	71282	4654	48015	71280	4653	9307
47	71280	גכז	2	18	0	71282	97202	5184	71280	97200	5184	10368
48	97200	החא	3	18	0	97202	116257	3811	97200	116255	3811	7622
49	116255	השג	4	11	695	116257	149042	6557	116255	149040	6557	13114
50	149040	זחג	5	18	0	149042	177612	5714	149040	177615	5715	11429
51	177611	זשה	6	20	491	177612	200882	4654	177615	200880	4653	9307

בדיקה $\xrightarrow{36288}$ $\xrightarrow{36288}$

שנה 8:

באופן הדומה לחישוב דלעיל כאן הנוסחה לגבולות תהייה:

$$Z = p + [7 - p \text{ mod } 5] \text{ mod } 5$$

שנה 17:

באופן הדומה לחישוב דלעיל כאן הנוסחה לגבולות תהייה:

$$Z = p + [5 - p \text{ mod } 5] \text{ mod } 5$$

לאחר שבדקנו את ההיקרויות של כל ארבעת הרצפים נסכם בטבלה את ההיקרויות של כל סימן וסימן, כדלהלן:

טבלת סיכום ההיקרויות של כל סימני השנים

סימן השנה	היקרויות מרצף ראשון	היקרויות שני מרצף	היקרויות שלישי מרצף	היקרויות מרצף רביעי		סך הקרויות	באחוזים	
בחג	16404	16404	6561			39369	5.710021582	
בשה	35436	32785	13114			81335	11.79670821	
גכה	16404	19055	7622			43081	6.248404576	
הכז	51840	51840	20736			124416	18.04511278	
השא	9516	9516	3807			22839	3.312534809	
זחא	16404	6888	6561			29853	4.329835004	
זשג	35436	44952	14175			94563	13.71527778	
מ	בחה			28571	11429	40000	5.801540889	
מ	בשז			23269	9307	32576	4.7247749	
מ	גכז			25920	10368	36288	5.263157895	
מ	החא			19055	7622	26677	3.869192658	
מ	השג			32785	13114	45899	6.657123132	
מ	זחג			28571	11429	40000	5.801540889	
מ	זשה			23269	9307	32576	4.7247749	
	שורת בדיקה	181440	181440	72576	181440	72576	689472	100

טבלה מס' 8

הסבר לטבלה מס' 8 :

הרצפים הראשון והשני מכילים את כל החלקים של השבוע ולכן מהטבלאות דלעיל חושבה ההיקרות ע"י החסרת גבול עליון מהגבול התחתון, ואכן בשורת הבדיקה סיכום העמודה מורה על 181440^{58} .

עמודת הרצף השלישי נלקחה מהעמודה הימנית בטבלה הפרטנית של הרצף. שורת הבדיקה מצביעה על $72576 = 36288 * 2$.

עמודת הרצף הרביעי בנויה מסך החלקים בשבוע בתוספת ההיקרויות של השנים ה"כפולות" גם כאן שורת הבדיקה מצביעה על $72576 = 36288 * 2$.

סיכום הסיכומים במשבצת הימנית התחתונה מצביע על 689472 שהם 19 שנה כפול $36288 =$ מחזוריות השנים בלוח הקבוע.

⁵⁸ כסך החלקים בשבוע.

בדיקת השוואה – התוצאות שקיבלנו אכן זהות לתוצאות חישובי השכיחויות מלוח ס"א ראשים⁵⁹!!

הערה: השנים המעוברות מסומנות ע"י האות 'מ' בצד שמאל של סימן השנה.

חישוב שכיחות הסימנים:

לאחר שבנינו את טבלת ההיקרויות עבור כל סימן וסימן, ניתן לשלב נתונים אלו בטבלה אחת ונקבל:

לוח 'ארבעה שערים המורחב'

רצף 1 - בין פ ו-מ			רצף 2- בין מ ו- פ			רצף 3 - בין 2 מ			רצף 4 – שנים מעוברות		
מולד תשרי בחלקים	שנים 2,5,10, 13,16	סך היקרויות	מולד תשרי בחלקים	שנים 1,4,9 12,15	סך היקרויות	מולד תשרי בחלקים	שנים 7,18	סך היקרויות	מולד תשרי בחלקים	שנים 3,6,8,11, 14,17,19	סך היקרויות
19440	בחג	16404	19440	בחג	16404	19440	בחג	6561	19440	בחה	40000
35844	בשה	35436	35844	בשה	32785	35844	בשה	13114	48011	בשז	32576
			68629	גכה	19055	68629	גכה	7622	71280	גכז	36288
71280	גכה	16404	87684	הכז	51840	87684	הכז	20736	97200	החא	26677
87684	הכז	51840	87684	הכז	51840	87684	הכז	20736	116255	השג	45899
139524	השא	9516	139524	השא	9516	139524	השא	3807	149040	זחג	40000
149040	זחא	16404	149040	זחא	6888	149040	זחא	6561	165444	זשג	14175
165444	זשג	35436	155928	זשג	44952	165444	זשג	14175	177611	זשה	32576

קיבלנו טבלה שבה ניתן לראות את ההיקרויות של כל סימן שנה בהתאם לשנה במחזור.

מטבלה מס' 8 דלעיל, ניתן באופן פשוט לחשב את שכיחות הסימנים.

⁵⁹ במאמרנו - רביב, ערן. 2010. לוחות ושברי לוחות – על מולדות ותכונותיהם. עמ' 54-31. בתוך עלי מרצבך (עורך). בדיד 22. רמת גן: אוניברסיטת בר-אילן.

הוכחת נוסחת רצ"ה יפה

לאחר שניתחנו את המבנה המתמטי של לוח ארבעה שערים, נוכל להשתמש באותם כלים על מנת להוכיח את נוסחת יפה.

יפה טוען שלכל רצף שנים שנבחר⁶⁰, להלן מסומן באות- n , נוכל לייצר לוח בן $3n+4$ שורות המכילות את כל הצירופים השונים האפשריים בלוח העברי עבור רצף השנים הנתון. וכך למשל עבור רצף של 19 שנים נוצר לוח 61 ראשים, עבור 247 שנים (עגול רמ"ז = עגול דרב נחשון גאון) ייווצר לוח בן 745 שורות בלבד, וכן הלאה.

הוכחה:

בפרקים הקודמים ראינו שלכל שנה נתונה יש 7 סוגי קביעות שונות לשנה פשוטה ו-7 למעוברת.

השיטה:

נראה שכאשר יוצאים משנה נתונה כל שהיא, המכילה 7 גבולות לסימני השנה, השנה העוקבת תיצור 3 גבולות חדשים שלא הוגדרו ע"י גבולות שנת המוצא.

לאחר שנראה זאת נוכל לכתוב שעבור כל רצף נתון של שנים השנה הראשונה "יתרום" 7 גבולות ואילו כל יתר השנים "יתרמו" רק 3 גבולות חדשים כל אחת ולכן סך האפשרויות יהיו $7+3*(n-1)= 3n+4$.

עבור הרצף הראשון פ*, פ, מ, (נבחר את שנה 2 כמייצגת) נקבל:

גבולות שנה 2:

פריסת גבולות				
חלקים	שנה 2	יום	שעה	חלק
19440	בחג	0	18	0
35844	בשה	1	9	204
71280	גכה	2	18	0
87684	הכז	3	9	204
139524	השא	5	9	204
149040	זחא	5	18	0
165444	זשג	6	9	204

⁶⁰ יש לסייג אמירה זו בגבול עליון שהרי יש מחזוריות בלוח העברי, ולכן בשלב מסוים של קבוצת שנים גדולה יהיו "קיפולים", ניתן לומר שלקבוצת שנים נתונה, בת n שנים, יהיו לכל היותר $3n+4$ צירופים אפשריים.

עתה נחסיר מגבולות השנה העוקבת יתרון פשוטה, ונבדוק אלו גבולות כבר נמצאו ע"י השנה הקודמת ואלו גבולות "חדשים" נוצרו, כדלהלן:

חלקים	שנה 3	פריסת גבולות			לאחר הורדת יתרון פשוטה	פריסת גבולות		
		יום	שעה	חלק		יום	שעה	חלק
19440	בחה	0	18	0	87684	3	9	204
48011	בשז	1	20	491	116255	4	11	695
71280	גכז	2	18	0	139524	5	9	204
97200	החא	3	18	0	165444	6	9	204
116255	השג	4	11	695	3059	0	2	899
149040	זחג	5	18	0	35844	1	9	204
177611	זשה	6	20	491	64415	2	11	695

רואים מיד שהשנה העוקבת תורמת רק 3 גבולות חדשים (מסומנים באפור), זאת אומרת שהגדרת הגבולות של סימני השנה של שנה 2 במחזור (כמייצגת פ,פ,מ), הגבילה את הגבולות החדשים שנוצרו ע"י השנה הבאה לשלוש אפשרויות נוספות בלבד.

עבור הרצף השני מ, פ*,פ, נקבל:

גבולות שנה 1:

חלקים	שנה 1	פריסת גבולות		
		יום	שעה	חלק
19440	בחג	0	18	0
35844	בשה	1	9	204
68629	גכה	2	15	589
87684	הכז	3	9	204
139524	השא	5	9	204
149040	זחא	5	18	0
155928	זשג	6	0	408

עתה נחסיר מהשנה העוקבת יתרון פשוטה, ונבדוק אלו גבולות כבר נמצאו ע"י השנה הקודמת ואלו גבולות "חדשים" נוצרו, כדלהלן:

חלקים	שנה 2	פריסת גבולות			לאחר הורדת יתרון פשוטה	פריסת גבולות		
		יום	שעה	חלק		יום	שעה	חלק
19440	בחג	0	18	0	87684	3	9	204
35844	בשה	1	9	204	104088	4	0	408
71280	גכה	2	18	0	139524	5	9	204
87684	הכז	3	9	204	155928	6	0	408
139524	השא	5	9	204	26328	1	0	408
149040	זחא	5	18	0	35844	1	9	204
165444	זשג	6	9	204	52248	2	0	408

רואים מיד שהשנה העוקבת תורמת רק 3 גבולות חדשים (מסומנים באפור), זאת אומרת שהגדרת הגבולות של סימני השנה של שנה 1 במחזור (כמייצגת מ,פ,פ), הגבילה את הגבולות החדשים שנוצרו ע"י השנה הבאה לשלוש אפשרויות נוספות בלבד .

עבור הרצף השלישי מ, פ*, מ, נקבל:

גבולות שנה 7:

חלקים	שנה 7	פריסת גבולות		
		יום	שעה	חלק
19440	בחג	0	18	0
35844	בשה	1	9	204
68629	גכה	2	15	589
87684	הכז	3	9	204
139524	השא	5	9	204
149040	זחא	5	18	0
165444	זשג	6	9	204

עתה נחסיר מהשנה העוקבת יתרון פשוטה, ונבדוק אלו גבולות כבר נמצאו ע"י השנה הקודמת ואלו גבולות "חדשים" נוצרו, כדלהלן:

חלקים	שנה 8	פריסת גבולות			לאחר הורדת יתרון פשוטה	פריסת גבולות		
		יום	שעה	חלק		יום	שעה	חלק
19440	בחה	0	18	0	87684	3	9	204
48011	בשז	1	20	491	116255	4	11	695
71280	גכז	2	18	0	139524	5	9	204
97200	החא	3	18	0	165444	6	9	204
116255	השג	4	11	695	3059	0	2	899
149040	זחג	5	18	0	35844	1	9	204
177611	זשה	6	20	491	64415	2	11	695

רואים מיד שהשנה העוקבת תורמת רק 3 גבולות חדשים (מסומנים באפור), זאת אומרת שהגדרת הגבולות של סימני השנה של שנה 7 במחזור (כמייצגת מ,פ,מ), הגבילה את הגבולות החדשים שנוצרו ע"י השנה הבאה לשלוש אפשרויות נוספות בלבד .

עבור הרצף הרביעי פ, מ, פ, נקבל:

גבולות שנה 3 :

חלקים	שנה 3	פריסת גבולות		
		יום	שעה	חלק
19440	בחה	0	18	0
48011	בשז	1	20	491
71280	גכז	2	18	0
97200	החא	3	18	0
116255	השג	4	11	695
149040	זחג	5	18	0
177611	זשה	6	20	491

עתה נחסיר מהשנה העוקבת יתרון מעוברת, ונבדוק אלו גבולות כבר נמצאו ע"י השנה הקודמת ואלו גבולות "חדשים" נוצרו, כדלהלן :

חלקים	שנה 4	פריסת גבולות			לאחר הורדת יתרון מעוברת	פריסת גבולות		
		יום	שעה	חלק		יום	שעה	חלק
19440	בחג	0	18	0	48011	1	20	491
35844	בשה	1	9	204	64415	2	11	695
68629	גכה	2	15	589	97200	3	18	0
87684	הכז	3	9	204	116255	4	11	695
139524	השא	5	9	204	168095	6	11	695
149040	זחא	5	18	0	177611	6	20	491
155928	זשג	6	0	408	3059	0	2	899

רואים מיד שהשנה העוקבת תורמת רק 3 גבולות חדשים (מסומנים באפור), זאת אומרת שהגדרת הגבולות של סימני השנה של שנה 3 במחזור (כמייצגת פ,מ,פ), הגבילה את הגבולות החדשים שנוצרו ע"י השנה הבאה לשלוש אפשרויות נוספות בלבד.

מש"ל.

פרק שלישי - "בעיית 220 השנים"

הניתוח הכללי שהוצג, יכול לשמש ככלי לחישוב 'מופעים' בלוח העברי. להלן 2 דוגמאות ליישום השיטה שהוצגה לעיל.

את השאלה שאלני ר' רחמים שר- שלום מנתניה, ולהלן תשובתי אליו. ככל הנראה שמורה לנו זכות ראשונים, והמתודה המוצעת כאן היא הראשונה שהוצגה לפתרון בעיה מעין זו⁶¹.

שאלת ר' רחמים שר – שלום :

א. לבדוק מהו המולד בהפרש של 220 שנה (שבהן 2721 חודשים ולא 2722!).
לדוגמא: מולד תשרי השנה הוא x מה יהיה המולד
בתשרי בעוד 220 שנה בהן 2721 חודשים?

ב. ברוב השנים חוזרים סימני הקביעות אחרי 220 שנה. האם תוכל לחשב מהו אחוז השנים בהן חוזרים סימני הקביעות?

הצעה לפתרון:

כתוצאה מהשיטות והכלים שפותחו לעיל בעבודה זו – להלן פתרון מוצע לבעיה שהוצגה :

$$\text{כיוון ש- } 2721=235*11+136=235*11+7*12+4*13$$

מעניין אותנו רצף של 11 שנים המכיל 4 שנים מעוברות.

רצף זה מתקיים כמעט תמיד, למעט אם נתחיל את הספירה בשנה ה- 17 למחזור (שאז יהיו 5 שנים מעוברות).

אי לכך בדומה לחישוב שבצענו לעיל בבדיקת השכיחויות הנובעת מלוח 4 שערים, נוכל להתבסס על טבלה 8 (בעמ' 55), בתיקון הרצף הרביעי בלבד!

אם ברצף הרביעי נוריד את שנה 17⁶², אזי נקבל "טבלה 8" מתוקנת המכילה את סך ההיקירויות במחזור הלוח העברי, שבהן מתקיים הנתון המבוקש של 2721 חודשים.

⁶¹ שר שלום כתב מאמר בנושא: "התאריך הלועזי והשימוש בו בלוח השנה היהודי" ולשם כך היה זקוק לתוצאה המספרית הנ"ל (ראה במאמרו בהערה מס' 9).

מאמרו פורסם באתר דעת בכתב העת לימודים גליון מס' 3 כסלו תשע"ב, ונמצא במרשתת בקישור – http://www.daat.ac.il/daat/ktav_et/maamar.asp?ktavet=2&id=1283

⁶² מהטבלה בעמוד 54 לעיל.

שלב א' – תיקון טבלה 8

בשלב זה אנו מעוניינים למצוא מהו סך המקרים בלוח העברי שבהם בחלוף 220 שנים עברו 2721 חודשים.

	סימן השנה	היקריות מרצף ראשוני	היקריות מרצף שני	היקריות מרצף שלישי	היקריות מרצף רביעי	סך הקריות	
	בחג	16404	16404	6561		39369	
	בשה	35436	32785	13114		81335	
	גכה	16404	19055	7622		43081	
	הכז	51840	51840	20736		124416	
	השא	9516	9516	3807		22839	
	זחא	16404	6888	6561		29853	
	זשג	35436	44952	14175		94563	
מ	בחה				28571	5714	34285
מ	בשז				23269	4654	27923
מ	גכז				25920	5184	31104
מ	החא				19055	3811	22866
מ	השג				32785	6557	39342
מ	זחג				28571	5714	34285
מ	זשה				23269	4654	27923
	שורת בדיקה	181440	181440	72576	181440	36288	653184

טבלה מס' 9

המשבצות המסומנות הצבועות בכחול מציינות את ההיקריות לאחר הסרת "התרומה" של שנה מס' 17.

מסקנת ביניים: ב- 653184 שנים מתוך 689472 מתקיימת הדרישה של 2721 חודשים מתשרי שנה 1 לתשרי שנה "221".

שלב ב' – בדיקת סימני השנה

מכיוון ש-

$$(2271 * 39673) \bmod (181440) = 174873$$

$$181440 - 174873 = 6567p$$

כעבור 2721 חודשים שארית חלות המולד היא $6567p$ -

עתה, נבדוק בכל רצף בטבלה 4 כמה התאמות יהיו לסימן השנה כאשר "מזיזים" את הגבולות ב- 6567 חלקים אחורה.

רצף ראשון:

ברצף זה, כפי שכתבנו לעיל היתכנות המולד היא בכל חלק וחלק ולכן בכל סימן שנה, יהיו התאמות כעבור 220 שנה, כמספר החלקים פחות 6567 כדלהלן:

סימן השנה	היקריות מרצף ראשון	התאמה לאחר 220 שנה
בחג	16404	9837
בשה	35436	28869
גכה	16404	9837
הכז	51840	45273
השא	9516	2949
זחא	16404	9837
זשג	35436	28869

רצף שני:

בדומה לרצף הראשון:

סימן השנה	היקריות מרצף שני	התאמה לאחר 220 שנה
בחג	16404	9837
בשה	32785	26218
גכה	19055	12488
הכז	51840	45273
השא	9516	2949
זחא	6888	321
זשג	44952	38385

רצף שלישי (שנים 7,18):

ברצף זה היתכנות חלות המולד היא בחלקים 1 ו-6, 4 ו-9 ולכן עלינו "לתקן" את הגבולות ע"פ הנוסחאות שפיתחנו ולחשב את ההתאמות בכל סימן וסימן כדלהלן:

שנה 7/18	גבולות סימני השנה בחלקים	בהפחתת 6567 חלקים	תחומי התאמה בשנה 7			שנה 18			סיכום
			מ-	עד (ולא בכלל)	סך היקריות	מ-	עד (ולא בכלל)	סך היקריות	
בחג	19440	12873	19441	29281	1968	19444	29279	1967	3935
בשה	35844	29277	35846	62066	5244	35844	62064	5244	10488
גכה	68629	62062	68631	81121	2498	68629	81119	2498	4996
הכז	87684	81117	87686	132961	9055	87684	132959	9055	18110
השא	139524	132957	139526	142476	590	139524	142474	590	1180
זחא	149040	142473	149041	158881	1968	149044	158879	1967	3935
זשג	165444	158877	165446	194316	5774	165444	194314	5774	11548

194313

54192

הסבר :

כיוון שלאחר 220 שנים המולד מוזז ב- 6567 חלקים (אחורה) תחום ההתאמה ייראה כדלהלן :

להמחשה נבחר את השורה הראשונה בטבלה, הקו העליון (בדיאגרמה שלהלן) מציין את תחום סימן השנה בחג בשנה שממנה מתחילים את הספירה. המספרים בשני קצות הקו מציינים את תחום המולדות אילו המולד בשנה זו היה חל בכל חלק וחלק.

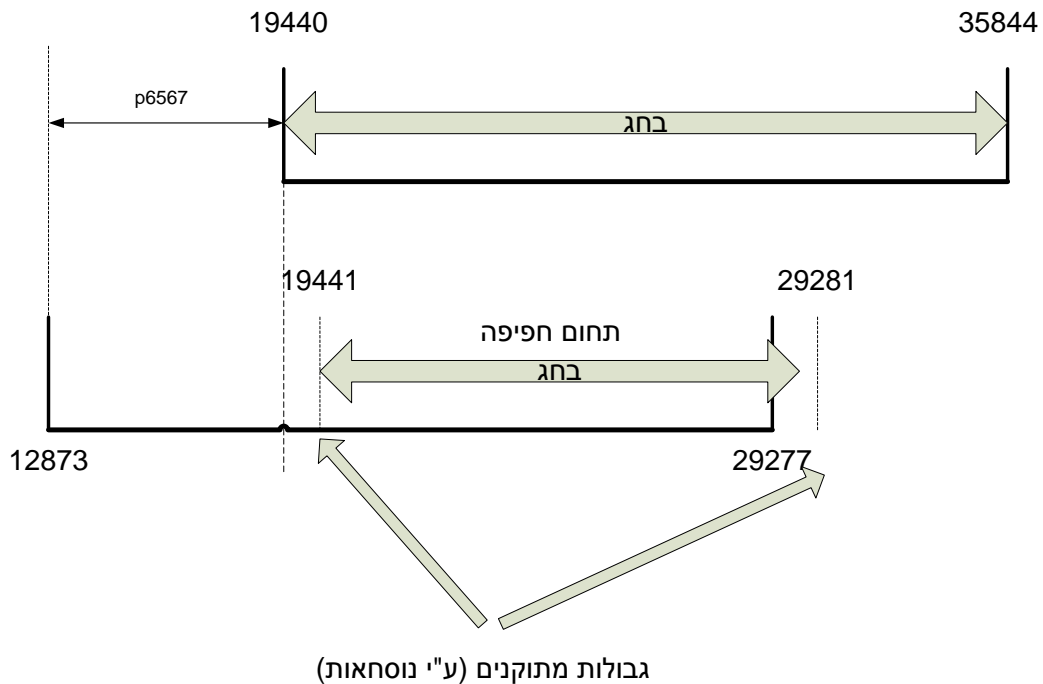
הקו התחתון מציין את תחום המולדות לאחר 2721 חודשים.

בכדי לחשב את תחום ההתאמה עלינו לתקן את הגבולות כך שיתאימו לחלקים שבהם מולד תשרי של שנה זו יכול לחול בהם.

לאחר תיקון שני המספרים (בעזרת הנוסחאות דלעיל) ההפרש של שני הגבולות לחלק ל- 5 יציין את סך ההתאמות לשורה.

החישוב עבור שנה 7 "מעגל" את הגבולות לסיומת ב- 1 או 6, ועבור השנה 18 לסיומת ב- 4 או 9.

סכום ההתאמות ייתן את התוצאה עבור הרצף השלישי, ונרשם בטבלת הסיכום שלהלן.



רצף רביעי (שנים מעוברות ללא שנה 17):

בדומה לחישוב בחלק הראשון (רצף רביעי בלוח ארבעה ראשים) צריכים לחשב את סך החלקים שבין הגבולות (בדומה לרצף הראשון והשני) ולהוסיף לסך ההיקרויות את התוספת הנובעת מהכפילות של הספרה '2' בלבד.

מההיקרויות של רצף החלקים נפחית 6567 (כברצף הראשון והשני) [ולכן כדוגמה מהסימן בחה נוריד מ- 28571 6567 חלקים ונקבל 22004] וכן הלאה. מהתוספת עבור הספרה 2 (שנה 8), נתקן את הגבולות כברצף שלישי ונקבל:

שנה 3	גבולות סימני השנה בחלקים	בהפחתת 6567 חלקים	תחומי התאמה בשנה 8		
			מ-	עד ולא בכלל	סך התאמות לשורה
בחה	19440	12873	19442	41447	4401
בשז	48011	41444	48012	64717	3341
גכז	71280	64713	71282	90637	3871
החא	97200	90633	97202	109692	2498
השג	116255	109688	116257	142477	5244
זחג	149040	142473	149042	171047	4401
זשה	177611	171044	177612	195227	3523

195223

טבלת סיכום :

סימן השנה	היקריות מרצף ראשון	התאמה לאחר 220 שנה	היקריות מרצף שני	התאמה לאחר 220 שנה	היקריות מרצף שלישי	התאמה לאחר 220 שנה	היקריות מרצף רביעי		התאמה לאחר 220 שנה		סך הקריות
בחג	16404	9837	16404	9837	6561	3935					39369
בשה	35436	28869	32785	26218	13114	10488					81335
גכה	16404	9837	19055	12488	7622	4996					43081
הכז	51840	45273	51840	45273	20736	18110					124416
השא	9516	2949	9516	2949	3807	1180					22839
זחא	16404	9837	6888	321	6561	3935					29853
זשג	35436	28869	44952	38385	14175	11548					94563
בחה							28571	5714	22004	4401	40000
בשז							23269	4654	16702	3341	32576
גכז							25920	5184	19353	3871	36288
החא							19055	3811	12488	2498	26677
השג							32785	6557	26218	5244	45899
זחג							28571	5714	22004	4401	40000
זשה							23269	4654	16702	3523	32576
שורת בדיקה	181440	135471	181440	135471	72576	54192	181440	36288	135471	27279	653184

קיבלנו אם כן **487884** התאמות לאחר 220 שנה (תשרי שנה 221), מתוך 653184 (השנים שבהן מתקיים שלאחר קפיצה של 2721 חודשים מגיעים לחודש תשרי). ובאחוזים:

74.6931951793063%
 וביחס לכלל השנים במחזוריות הלוח 689472 :
70.76197438040%

פרק רביעי – לוחות חדשים

לוח 16 שורות- הצעה חדשה⁶³

בלוח ס"א ראשים ניתן בכל בדיקה לבדוק סימני 19 שנות המחזור. לעומתו בלוח 4 ראשים ניתן לבדוק בכל פעם רק סימן שנה אחת. עתה נציג שיטה המשלבת בין 2 הלוחות, ולדעתנו "יעילה" יותר משניהן.

צירופי שנים

במחזור 19 השנים ניתן להבחין ב- 2 סוגי צירופים.

הראשון פ,פ,מ (פשוטה, פשוטה, מעוברת) {ההדגשה – פשוטה אחרי מעוברת}, והצירוף השני פ,מ. [1.2.3,4.5.6,9.10.11,12.13.14,15.16.17 : הצירוף הראשון עונה על שנים :

ואילו הצירוף השני עונה על השנים [18,19,.7.8].

כדלהלן :

שנה במחזור	מעברת /פשוטה
1	פ
2	פ
3	מ
4	פ
5	פ
6	מ
7	פ
8	מ
9	פ
10	פ
11	מ
12	פ
13	פ
14	מ
15	פ
16	פ
17	מ
18	פ
19	מ

⁶³ סעיף זה פורסם כמאמר עצמאי תחת הכותרת: בין "ארבעה שערים" ללוח "ס"א ראשים" – הצעה חדשה למציאת סימני הקביעות בעזרת לוח 16 שורות, בד"ד 26 (מרצבך עורך), ניסן תשע"ב.

בלוח ס"א ראשים ניתן בכל בדיקה לבדוק סימני 19 שנות המחזור. לעומתו בלוח 4 ראשים ניתן לבדוק בכל פעם רק סימן שנה אחת. עתה נציג שיטה המשלבת בין 2 הלוחות, ולדעתנו "יעילה" יותר משתייהן, כדלהלן:

אלגוריתם השיטה:

- חשב את השנה במחזור בה הנך עומד - L.
- כאשר $S - \text{השנה העברית לבהר"ד} = L = S \text{ mod } 19$
- אם השנה היא בצירוף הראשון (כלומר אחת מהשנים: 1,2,3,4,5,6,9,10,11,12,13,14,15,16,17) חשב מולד תשרי של השנה הראשונה בצירוף (1,4,9,12,15).
 - מעיון בטבלה תוכל לדעת את סימני השנה של 3 שנים.
- אם השנה היא בצירוף השני (כלומר אחת מהשנים: 7,8,18,19) חשב מולד תשרי של השנה הראשונה בצירוף (7,18).
 - מעיון בטבלה תוכל לדעת את סימני השנה של 2 שנים.

לוח 16 שורות

שנים						פריסת גבולות		
חלקים	1	2	3	7	8			
	4	5	6	18	19			
	9	10	11					
	12	13	14					
	15	16	17					
19440	בחג	הכו	בשז	בחג	השג	0	18	0
26328	בחג	השא	גכו	בחג	השג	1	0	408
35844	בשה	זחא	גכו	בשה	זחג	1	9	204
52248	בשה	זשג	החא	בשה	זחג	2	0	408
64415	בשה	זשג	החא	בשה	זשה	2	11	695
68629	גכה	זשג	החא	גכה	זשה	2	15	589
71303	גכה	זשג	השג	גכה	זשה	2	18	23
87684	הכו	בחג	השג	הכו	בחה	3	9	204
104088	הכו	בשה	זחג	הכו	בחה	4	0	408
116255	הכו	בשה	זחג	הכו	בשז	4	11	695
132659	הכו	בשה	זשה	הכו	בשז	5	2	899
139524	השא	גכה	זשה	השא	גכו	5	9	204
149040	זחא	גכה	זשה	זחא	גכו	5	18	0
155928	זשג	הכו	בחה	זחא	גכו	6	0	408
165444	זשג	הכו	בחה	זשג	החא	6	9	204
184499	זשג	הכו	בשז	זשג	השג	7	2	899

אופן בניית הלוח

ניתן לאפיין את כל 19 שנות המחזור בעזרת 2 שרשראות של צירופים בלבד.

המחזור מורכב למעשה משבעה מחזורים קטנים של

2 3 3 3 ; 2 3 3 של שנים (הסימן: גג"ב גג"ב) ולפי המולד של

ראש המחזור הקטן ניתן לדעת בעזרת הלוח את סימני הקביעות של יתר שנות המחזור הקטן.

השרשרת הראשונה פ*,פ,מ (פשוטה אחר מעוברת, פשוטה, ומעוברת) [הכוכבית מציינת "אחרי מעוברת"], שרשרת זו מאפיינת כאמור את השנים:

פ*	1	4	9	12	15
פ	2	5	10	13	16
מ	3	6	11	14	17

השרשרת השנייה פ*,מ (פשוטה אחר מעוברת, מעוברת).

שרשרת זו מאפיינת את השנים:

פ*	7	18
מ	8	19

בראש העבודה הצגנו בגיליון EXCEL טבלה "אוטומאטית" המקבלת כקלט מולד תשרי ראש מחזור וכפלט מציגה את סימני שנות המחזור, ע"פ כללי הלוח העברי.

עתה נפעיל את "מנוע" החיפוש הנ"ל באופן שונה במעט, בהרצה הראשונה נריץ⁶⁴ את מולד שנה ראשונה במחזור (שנה 1 למחזור י"ט, המלמדת לא רק על עצמה אלא גם על שנים 4,9,12,15) חלק אחר חלק, ונבדוק את צירוף סימני השנה של שלוש השנים הראשונות, ההרצה תימשך כל עוד צירוף שלושת השנים לא משתנה. כאשר צירוף סימני השנה של שלוש השנים ישתנה, נכתוב את הגבול (בחלקים) ונפתח שורה חדשה עם הצירוף החדש, וחוזר חלילה כמניין החלקים בשבוע.

⁶⁴ הרצה אוטומאטית ע"י קוד ב- Visual Basic.

מהרצה זו התקבלה הטבלה הבאה :

חלקים	1,4,9,12,15	2,5,10,13,16	3,6,11,14,17	פריסת גבולות		
19440	בחג	הכז	בשז	0	18	0
26328	בחג	השא	גכז	1	0	408
35844	בשה	זחא	גכז	1	9	204
52248	בשה	זשג	החא	2	0	408
68629	גכה	זשג	החא	2	15	589
71303	גכה	זשג	השג	2	18	23
87684	הכז	בחג	השג	3	9	204
104088	הכז	בשה	זחג	4	0	408
132659	הכז	בשה	זשה	5	2	899
139524	השא	גכה	זשה	5	9	204
149040	זחא	גכה	זשה	5	18	0
155928	זשג	הכז	בחה	6	0	408
184499	זשג	הכז	בשז	7	2	899

התקבלה טבלה בת 13 שורות (בהתאמה לנוסחת יפה $3n+4$).

עתה נפעיל את "מנועי" החיפוש ב- EXCEL, על הצירוף השני, נריץ את מולד את שנה שביעית במחזור (המלמדת על עצמה ועל שנה 18) חלק אחר חלק, ונבדוק את צירוף סימני השנה של השנה השביעית והשמינית, ההרצה תימשך כל עוד צירוף שתי השנים לא משתנה. כאשר צירוף סימני השנה של שתי השנים ישתנה, נכתוב את הגבול (בחלקים) ונפתח שורה חדשה עם הצירוף החדש, וחוזר חלילה כמניין החלקים בשבוע.

מהרצה זו התקבלה הטבלה הבאה :

חלקים	7,18	8,19	פריסת גבולות		
19440	בחג	השג	0	18	0
35844	בשה	זחג	1	9	204
64415	בשה	זשה	2	11	695
68629	גכה	זשה	2	15	589
87684	הכז	בחה	3	9	204
116255	הכז	בשז	4	11	695
139524	השא	גכז	5	9	204
149040	זחא	גכז	5	18	0
165444	זשג	החא	6	9	204
184499	זשג	השג	7	2	899

גם כאן התקבלה טבלה בהתאמה לנוסחת יפה, טבלה, בת עשר שורות.

עתה נבצע מיזוג בין שתי הטבלאות ע"מ לקבל טבלה אחת. בכדי למוזג את הטבלאות נפתח בטבלה העליונה 3 שורות חדשות עם הגבולות הנמצאים בטבלה השנייה ונעדרים מהטבלה הראשונה, וכך קיבלנו את טבלת 16 השורות.

יתרון לוח 16 שורות מלוח ארבעה שערים ולוח ס"א ראשים:

יעילות:

נגדיר פרמטר הנקרא "יעילות".

מקובל להגדיר יעילות בשני אופנים⁶⁵.

a. Acting or producing effectively with a minimum of waste, expense, or unnecessary effort.

b. Exhibiting a high ratio of output to input.

ובתרגום חופשי:

1. פעולה או ייצור יעיל באמצעות מינימום יתירות, הוצאה (כספית) או מאמץ בלתי הכרחי.

2. יחס גבוה של פלט (התוצאה) מול הקלט (ההשקעה).

בנדון דידן ישנם שני משתנים שניתן להגדיר כ"השקעה" – א. גודל הטבלה ב. מספר החיפושים שצריך לבצע בכדי למצוא סימני 19 שנים.

הגדרה: טבלה יעילה תחשב טבלה מינימאלית בגודלה ושסך החיפושים הנדרשים למציאת סימני 19 שנות המחזור יהיה מינימאלי. במילים אחרות טבלה יעילה תוגדר כטבלה שבה המכפלה בין שני המשתנים תהייה מינימאלית.

כדלהלן:

$$\text{Efficiency} = \frac{1}{\text{Cell}} * \frac{1}{\text{Search}}$$

לאור הגדרה זו נבחן את פרמטר היעילות בשלושת הטבלאות.

טבלת 61 ראשים מכילה 1159 תאים ונדרש חיפוש אחד לשם מציאת סימני השנה של 19 שנים. לוח ארבעה שערים מכיל 52 תאים, ובכדי למצוא צירוף של 19 שנים צריך לבצע 19 חיפושים. ואילו בטבלה שלנו יש 80 תאים, ובכדי למצוא צירוף של 19 שנים די ב- 7 חיפושים.

לוח	שורות	עמודות	סך תאים
4	13	4	52
61	61	19	1159
16	16	5	80

בלוח ס"א ראשים, בחיפוש אחד מוצאים את צירופם של 19 שנים ולכן נקבל:

$$\text{Efficiency} = \frac{1}{1159} * \frac{1}{1} = \frac{1}{1159}$$

בלוח ארבעה ראשים, בכדי למצוא את צירופם של 19 שנים, נדרשים 19 חיפושים, ולכן נקבל:

$$\text{Efficiency} = \frac{1}{13*4} * \frac{1}{19} = \frac{1}{998}$$

ואילו בלוח המוצע, בכדי למצוא את צירופם של 19 שנים, נדרשים 5+2, סה"כ 7 חיפושים, ונקבל:

$$\text{Efficiency} = \frac{1}{16*5} * \frac{1}{7} = \frac{1}{560}$$

סיכום: הצגנו שיטה חדשה ויעילה יותר למציאת סימני השנה ע"פ חישוב מולד תשרי של "ראש צירוף" בלבד. כפי שרואים בטבלת הסיכום המספר הנמוך ביותר שייך ללוח 16 השורות!

טבלת 16 השורות יעילה פי 2 ~ משאר הלוחות!

מכפלת: חיפושים, גודל	מספר חיפושים למציאת סימני 19 שנים	סך תאים	עמודות	שורות	לוח
988	19	52	4	13	4
1159	1	1159	19	61	61
560	7	80	5	16	16

לוח 213 ראשים⁶⁶

נחזור לבעיית חישובי שכיחות הדחיות. בכדי לחשב שכיחות זו נקטנו בגישה חדשה המוצגת להלן:
בנינו בגיליון EXCEL, כמוסבר לעיל, לוח המקבל כקלט את מולד ראש תשרי בחלקים, ומוציא כפלט את סימני השנה של המחזור כולו, ע"פ כללי הלוח.

הגדרת אינדקס חדש בן 4 "ביט"

סימן השנה המסורתי מכיל כאמור סימן בן 3 אותיות. לאינדקס זה הוספנו ספרה נוספת = < אינדקס חדש המציין את הדחייה.

אינדקס	משמעותו
1	לא אדו
2	מולד זקן(ביוסב') ⁶⁷
3	מולד זקן(בימים ג',ה',ז') ⁶⁸
4	גטרד
5	בטו תקפט
0	ללא דחייה

לאחר ההרצה של כל חלקי השבוע (בקפיצות של 5⁶⁹) התקבל לוח חדש בן 213 ראשים (מצורף כנספח 3).

⁶⁶ פרק זה נשלח לפרסום כיחידה עצמאית תחת הכותרת: "לוח 213 ראשים", יפורסם בבד"ד 27, מרצבך (עורך), תשע"ג.

⁶⁷ ראה לעיל בהסבר חוק 2.

⁶⁸ ראה כנ"ל בהסבר חוק 3.

⁶⁹ בהתאם להתכנות מולד תשרי של ראש מחזור כמוסבר לעיל.

סימני השנה "החדשים"

סימני השנה המקובלים מסתכמים ב- 14 סימנים 7 לפשוטה ו- 7 למעוברת, לאחר הוספת "אינדקס" הדחייה נקבל סך אפשרויות כדלהלן:

פשוטה	מעוברת
בחג1	בחה1
בחג3	בחה3
בשה0	בשז0
בשה1	בשז1
גכה0	גכז0
גכה2	גכז2
גכה5	
הכז0	
הכז1	
הכז3	
הכז4	
	החא1
	החא3
השא0	השג0
	השג1
זחא1	זחג1
זחא3	זחג3
זשג0	זשה0
זשג1	זשה1
16	14

מתקבלים 16 סימני שנה לפשוטה, ו-14 סיני שנה למעוברת.

הערות:

- יש לשים לב לעובדה המעניינת שסימן השנה היחיד שמתקבל רק כשהוא "ללא דחייה" הוא הסימן - השא. סימן זה הוא הנדיר מכל סימני הקביעות והוא יוכל לבוא רק אחרי שנה חסרה.

- דחיית בט"ו תקפ"ט היא רק בשנה פשוטה (אחר עבור) וגם דחיית גטר"ד רק בפשוטה ולכן הספרה 4 או 5 נמצאת רק בעמודה של הסימנים של שנה "פשוטה".

מסתבר שכל שורה בלוח ס"א ראשים עשויה להכיל כמה אפשרויות של דחיות ולכן הלוח המתקבל מכיל שורות נוספות (בהמשך, בסעיף "לוח 213 ראשים השלמה", נבאר כיצד התקבלו 213 ראשים).

לדוגמא: השורה הראשונה בלוח ס"א ראשים שבולותיה מ- 1d, 0h, 408p ועד (ולא בכלל) 1d, 5h, 334p, מתחלקת ל- 5 שורות שונות כדלהלן⁷⁰:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	גבולות
1בחג	0השא	2גכז	1בשה	1זחא	0זכז	0בשה	1זחג	0השא	2גכה	0זשה	1זשג	4הכז	3בחה	1זשג	1הכז	1בחה	0זשג	1השג	1 0 409
1בחג	0השא	2גכז	1בשה	1זחא	0זכז	0בשה	1זחג	0השא	0גכה	0זשה	1זשג	4הכז	3בחה	1זשג	1הכז	1בחה	0זשג	1השג	1 2 539
1בחג	0השא	2גכז	1בשה	1זחא	0זכז	0בשה	1זחג	0השא	0גכה	0זשה	1זשג	4הכז	1בחה	1זשג	1הכז	1בחה	0זשג	1השג	1 2 564
1בחג	0השא	2גכז	1בשה	1זחא	0זכז	0בשה	1זחג	0השא	0גכה	0זשה	1זשג	4הכז	1בחה	0זשג	1הכז	1בחה	0זשג	1השג	1 4 1054
1בחג	0השא	2גכז	1בשה	1זחא	0זכז	0בשה	1זחג	0השא	0גכה	0זשה	1זשג	4הכז	1בחה	0זשג	1הכז	1בחה	0זשג	1השג	1 4 1074

השנה המבדילה בין כל שורה מודגשת ע"י הוספת צבע רקע לתוכן התא. לדוגמא: בשורה הראשונה אנו רואים ששנה עשירית במחזור סימנה גכה בצירוף הספרה 2 המציינת דחיית מולד זקן ביום ב', ואילו שנה עשירית בשורה השנייה סימנה גם גכה אולם לא דחייה, וזאת מהסיבה שמולד תשרי של השנה העשירית "גולש" לכיוון יום ג' כאשר מולד ראש המחזור מגיע ליום 1 שעה 2 ו- 539 חלקים.

לסיכום אנו רואים שלמרות שבכל השורות שבדוגמא דלעיל שלוש האותיות המציינות את סימן השנה המסורתי הן זהות, ה-"ביט" הנוסף שהצמדנו (אינדקס הדחייה) הוא שונה בין שורה לשורה. בהמשך ננתח את כל "המעברים" האפשריים בין הסימנים השונים.

חישוב שכיחות הדחיות מלוח 213 ראשים

מלוח זה ניתן לחשב בקלות את שכיחות הדחיות. עלינו להכפיל כל צירוף בסך ההיקרויות של כל שורה, ולסכם את התוצאות. הסבר: לדוגמא "לא אדו" – בשורה הראשונה מצינו 9 שנים שלהן מוצמד האינדקס 1. נכפיל במספר ההיקרויות של שורה זו (458) ונקבל 4122. נחזור על חישוב זה עבור כל השורות בלוח, נסכם את התוצאות ונקבל 295488. מספר זה מבטא את סך החלקים כך ובמידה ומולד תשרי נופל בהם, אזי חלה דחיית אדו. בכדי לקבל את השכיחות עלינו לחלק בסך החלקים האפשריים לחלות מולד תשרי (סך החלקים שבוע לחלק ל- 5⁷¹ כפול 19⁷² = 689472).

בניסוח כללי חישוב שכיחות הדחיות מתוך לוח 213 ראשים:

נסמן כדלהלן: שורה – n, עמודה – m, היקרויות שורה (משקל) – q, דחייה – d, שכיחותה של כל דחייה תיוצג ע"י המשוואה:

⁷⁰ הגבולות בטבלה הם גבולות מתוקנים ולכן הגבול העליון מתחיל ב- 409 חלקים ולא ב- 408.
⁷¹ חלות מולד תשרי.
⁷² שנות המחזור.

$$\rho = \frac{1}{689472} \sum_{n=1}^{213} \sum_{m=1}^{19} q_{nd=0,1,2,3,4,5}$$

הסבר : בכל שורה נסכם את מספר הפעמים שמופיעה הדחייה ונכפיל בהיקרות השורה (q_n), נחזור על הפעולה עבור כל השורות ונסכם את התוצאות.

השכיחות המדויקת של הדחיות, כפי שחושבו מלוח זה, בהשוואה לחישוב המקובל :

לא אדו	זקן	גטרד	בטותקפט	ללא דחייה	הדחייה	
295488	98496	22839	3712	268937	סך היקריות בלוח מתוך 689472	חישוב מדויק
42.8571	14.286	3.3125	0.53838	39.0062	באחוזים	
1477440	492480	114192	18557	1344691	סך היקריות בלוח מתוך 3447360	חישוב מקורב
42.8571	14.2857	3.3124	0.5383	39.0064	באחוזים	
0	0	3	3	-6		הפרש

ההפרש הוא מתוך 3447360 ז"א לדוגמא שנים ללא דחייה ההפרש הוא : $-\frac{6}{3447360}$

וכן השאר בהתאמה⁷³.

ניתן לראות תוצאת המעבר לחישוב "המדויק" מניבה שורות עם הפרש חיובי ושורות עם הפרש שלילי כך שחלק מהסטיות הנובעות מההנחה השגויה מתקזזות מאליהן, ובתוצאה הסופית רואים שההפרשים אכן זניחים.

⁷³ שורת ההפרש היא הפרש בסך ההיקרויות לאחר נירמול.
77

שכיחות סימני השנים:

להלן טבלת השוואה של חישובי שכיחות סימני השנים, בין השיטה המקובלת לבין השיטה המדויקת שהצגנו אנו⁷⁴:

חישוב מלוח ס"א ראשים בהנחת "רציפות" מולדות תשרי														
סימן שנה	החא	בשז	בחג	זחא	גכז	בשה	זחג	השא	גכה	זשה	הכז	בחה	זשג	השג
סך היקרויות	133385	162883	196848	149268	181440	406675	199997	114192	215405	162883	622080	199997	472812	229495
שכיחות ב- %	3.8692	4.7249	5.7101	4.3299	5.2632	11.7967	5.8015	3.3124	6.2484	4.7249	18.0451	5.8015	13.7152	6.6571

חישוב מלוח ס"א ראשים ללא הנחה - חישוב מדויק														
סימן השנה	החא	בשז	בחג	זחא	גכז	בשה	זחג	השא	גכה	זשה	הכז	בחה	זשג	השג
סך היקרויות	26677	32576	39369	29853	36288	81335	40000	22839	43081	32576	124416	40000	94563	45899
שכיחות ב- %	3.8692	4.7248	5.7100	4.3298	5.2632	11.7967	5.8015	3.3125	6.2484	4.7248	18.0451	5.8015	13.7153	6.6571

גם כאן, תוצאת המעבר לחישוב "המדויק" מניבה שורות עם הפרש חיובי ושורות עם הפרש שלילי כך שחלק מהסטיות הנובעות מההנחה השגויה מתקזזות מאליהן, ובשורה התחתונה רואים שההפרשים אכן זניחים.

בבדיקה רואים ההפרשים הם לא יותר מאשר $\pm \frac{3}{3447360}$, עובדה שאכן "מתירה" לבצע את החישוב בשיטה הישנה.

דוגמאות מנורמלות:

דחיית גטר"ד ע"פ החישוב הרגיל היא $\frac{114192}{3447360}$ ⁷⁵, ואילו לפי החישוב המדויק (הנובע מהגבולות

האמתיים) התוצאה היא (לאחר הכפלה ב- 5 בכדי לקבל אותו מכנה) - $\frac{114195}{3447360}$

⁷⁴ חשוב לציין שהמכנה (יסד ההיקרויות) שונה בין 2 הטבלאות (יחס של 5).
⁷⁵ המספר 3447360 הוא מספר החלקים בשבוע כפול 19 שנות המחזור.

דחיית בטו תקפט ע"פ החישוב הרגיל היא $\frac{18557}{3447360}$, ואילו לפי החישוב המדויק (הנובע

מהגבולות האמיתיים) התוצאה היא (לאחר הכפלה ב- 5 בכדי לקבל אותו מכנה) - $\frac{18560}{3447360}$

תובנות נוספות מלוח 213 ראשים

כאמור בלוח 213 ראשים התווספו גבולות חדשים המבטאים את העובדה שלמרות שסימן השנה לא השתנה, הדחייה השתנתה.

דוגמא שורה ראשונה של ס"א ראשים מתחלקת לחמש שורות כדלהלן :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	גבולות		
1בחג	0שא	2גכז	1בשה	1זחא	0זכז	0בשה	1זחג	0שא	2גכה	0זשה	1זשג	4זכז	3בחה	1זשג	1זכז	1בחה	0זשג	1השג	1	0	409
1בחג	0שא	2גכז	1בשה	1זחא	0זכז	0בשה	1זחג	0שא	2גכה	0זשה	1זשג	4זכז	3בחה	1זשג	1זכז	1בחה	0זשג	1השג	1	2	539
1בחג	0שא	2גכז	1בשה	1זחא	0זכז	0בשה	1זחג	0שא	2גכה	0זשה	1זשג	4זכז	1בחה	1זשג	1זכז	1בחה	0זשג	1השג	1	2	564
1בחג	0שא	2גכז	1בשה	1זחא	0זכז	0בשה	1זחג	0שא	2גכה	0זשה	1זשג	4זכז	1בחה	0זשג	1זכז	1בחה	0זשג	1השג	1	4	1054
1בחג	0שא	2גכז	1בשה	1זחא	0זכז	0בשה	1זחג	0שא	2גכה	0זשה	1זשג	4זכז	1בחה	0זשג	1זכז	1בחה	0זשג	0השג	1	4	1074

אנו רואים שסימני השנים בכל השורות דלעיל זהים, אולם בין שורה לשורה "אינדקס" הדחייה משתנה. לדוגמא בשנה 19 במחזור עד השורה הרביעית סימן השנה הוא **השג1** כלומר דחיית אדו = המולד חל ביום ד', ואילו בשורה האחרונה סימן השנה עובר ל- **השג0** כלומר ללא דחייה. זה מתרחש מפאת התקדמות מולד ראש המחזור (ובעקבותיו כל מולדות תשרי של 19 השנים). המולד יוצא מחלות דחיית אדו ונכנס למצב ללא כל דחייה.

ננסה להבין כיצד אנו מגיעים ל- 213 שורות, ראשית עלינו לבחון את סך המעברים האפשריים בין אינדקס לאינדקס (הכוונה למעבר בין שני סימנים שרק אינדקס הדחייה מתחלף בהם אולם שלושת האותיות הראשונות של סימן הקביעה זהה). לשם כך בטבלה הרצ"ב מופיעה רשימה של כל המעברים האפשריים, כל מעבר מסומן באיזה שנה, משנות המחזור, הוא יכול לחול, והמכפלה בסך השנים מאותו סוג מניבה את סך השורות שיתווספו כתוצאה מהמעבר. סיכום כללי ייתן את סך השורות הנוספות בלוח ס"א ראשים, כדלהלן :

טבלת ה- "מעברים":

באם נבחן את כל המעברים המתרחשים בין סימני הדחיות, ללא שינוי בסימן השנה, מתקבל:

סימן השנה	עובר מדחייה-	לדחייה -	בפשוטה	במעוברת	במוצאי מעוברת	סה"כ במחזור
בחג	3	1	1	0	0	12
בשה	1	0	1	0	0	12
גכה	2	0	1	0	0	12
גכה	5	2	0	0	1	7
הכז	1	0	1	0	0	12
הכז	3	1	1	0	0	12
הכז	4	3	1	0	0	12
השא						0
זחא	3	1	1	0	0	12
זשג	1	0	1	0	0	12
בחה	3	1	0	1	0	7
בשז	1	0	0	1	0	7
גכז	2	0	0	1	0	7
החא	3	1	0	1	0	7
השג	1	0	0	1	0	7
זחג	3	1	0	1	0	7
זשה	1	0	0	1	0	7

152

הסבר:

כללי- בלוח העברי, אורך השנה האפשרי הוא 354 ± 1 לפשוטות ו- 384 ± 1 למעוברות. עובדה זו גוררת את המשפטים הבאים:

- אין שנה יכולה להיות חסרה כאשר ראש השנה שלה "ללא דחייה". (ולכן לא תהייה שנה המסומנת כ- 'ח' יחד עם הספרה 0), הסבר: שנה חסרה נוצרת כתוצאה מתזוזות ר"ה בעקבות דחייה, ואם אין כזאת השנה לא תהיה חסרה. ולפי זה גם לעולם לא תבוא שנה חסרה אחרי שנה חסרה.
- אין שנה שלמה שראש השנה שלה זו ביומיים (זקן בימים ג,ה,ז + אדו). ולכן אין שנה שלמה עם האינדקס 3.
- סימן השנה משתנה ל-שלמה רק כאשר חלקי המולד חוצים 9 שעות ו- 204 חלקים (בימים א',ג',ה',ו'), עקב העובדה שתוספת יתרון פשוטה גורם למולד זקן בשנה הבאה.
- כל שנה שהיא כסדרה יכולה להתקבל מדחייה, ויכולה להיות ללא דחייה.

בחג – רק יכול לעבור מ-3 ל-1, שהרי אם היה מולד זקן ביום ז' (+ אדו) זה גורר שהשנה תהייה חסרה בכדי לפצות על הזזת ר"ה ביומיים. לסימן בחג אין מעבר מ-1 ל-0 שהרי לא יכולה להיות שנה חסרה ללא דחייה. החל ממולד זקן בשבת ← (3), עם חציית גבול יום א' ← (1) אדו.

בשה - עם חציית א' ט' ר"ד סימן השנה משתנה מ-'**בחג**' ל-'**בשה**' כמוסבר לעיל. כל עוד המולד בתחום יום א' הדחייה היא ← 'אדו' (1) וכאשר נכנס המולד ליום ב' עוברים מ- ← 'בשה' ל- בשה0 (ללא דחייה).

גכה - בשנה פשוטה שאינה מוצאי מעוברת - החל ממולד זקן ביום ב' (2,18,0) ועד חציית יום ג' ← הדחייה היא מולד זקן ביום ב' (2) ומשם ואילך עד ג', ט' ר"ד ← ללא דחייה (0).

בשנה פשוטה שהיא מוצאי מעוברת החל מ- ← ב', ט"ו, תקפ"ט ועד מולד זקן ביום ב' סימן השנה גכה5 (בטותקפט) משם ואילך כמו בפשוטה.

הכז - סימן זה מופיע בתדירות הגבוהה ביותר מבין כל סימני הקביעות (למעלה מ-18%) והוא מופיע ב-4 סוגי הדחיות: מ- ג', ט', ר"ד ועד זקן ביום ג' דחייה 4, מזקן ביום ג' ועד תחילת יום ד' דחייה 3 מיום ד' כולו 1 (אדו), ומיום ה' 0 (ללא דחייה).

השא – הסימן **השא** נגזר מכך שבתוספת יתרון שנה פשוטה מתקבל מולד זקן ביום ב' ולכן השנה שלמה. מולד תשרי שנופל החל מיום ג' ט' ר"ד (ונדחה בדחיית גטר"ד + אדו ליום ה') סימן השנה **הכז**, אולם מעבר לה' ט' ר"ד גורם לשנה הבאה "להזדקן" ולכן סימנה **השא**.

זחא - החל ממולד זקן ביום ה' (זקן + אדו) האינדקס 3, החל מחציית יום ו' אדו בלבד (1)

זשג - במוצאי מעוברת החל ממעבר 6,0,408 ← זשג1 ועד מעבר גבול יום ז'. הסבר: תוספת פשוטה ל- 6,0,408 גורר חציית ג' ט' ר"ד בשנה הבאה.

מוצאי פשוטה: החל מחציית 9 שעות ו- 204 חלקים (ביום ו') ← זשג1, תוספת יתרון פשוטה גורם למולד זקן בשנה הבאה, ולכן השנה שלמה, והדחייה היא אדו (1), ומחציית יום ז' ועד מולד זקן בשבת זשג0 (ללא דחייה).

בחה - הסבר כמו בחג בפשוטה, אולם בחציית 1,20,491 הסימן יתחלף לשלמה כי בתוספת יתרון מעוברת המולד של שנה הבאה יהפוך לזקן.

בשז- החל מדחיית זקן ביום א' ועד תחילת יום ב' ← דחייתו אדו (1), מתחילת יום ב' ועד זקן ביום ב' ← ללא דחייה (0).

גכז- הסבר כמו גכה בפשוטה. (אין מעוברת אחר מעוברת).

החא- ממולד זקן ביום ג' אינדקס 3 , עם חציית יום ד' עובר לדחיית אדו (1), ועד ל- 4,11,695 מספר זה בתוספת יתרון מעוברת ← חוצים את גבול גטר"ד בשנה הבאה, והשנה חייבת לעבור לשלמה.

השג- מ- 4,11,695 ועד תחילת יום חמישי ← דחיית אדו (1) מתחילת יום ה' ועד זקן ביום ה' ← ללא דחייה (0).

זחג- הסבר כמו זחא בפשוטה שאינה מוצאי מעוברת.

זשה- החל מחציית 6,20,491 ← זשה1. הסבר: תוספת מעוברת גורר מולד זקן בשנה הבאה. מחציית גבול יום ז', ואילך עז זקן ביום ז' ← זשה0

לסיכום, מהטבלה, רואים אנו שנוצרו 152 גבולות חדשים כתוצאה מהמעברים בין "דחיות" ללא שינוי בסימן השנה. כאשר נוסף ל- 152 הגבולות החדשים, את 61 הגבולות המקוריים של מעברים בין "סימני השנה" (לוח ס"א) נקבל:

$$152+61=\underline{213}$$

ובכן קיבלנו את סך 213 הגבולות בלוח המכיל את "סימני הדחייה".

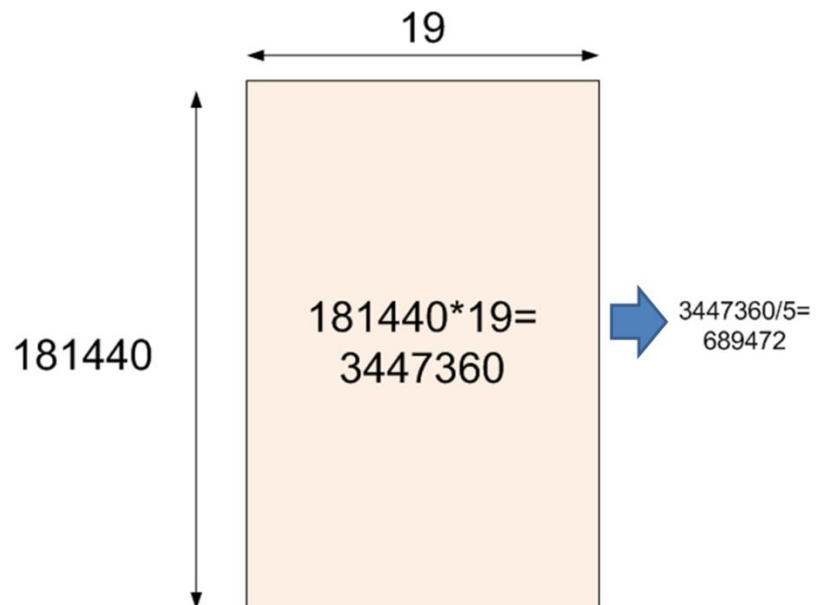
סיכום ומסקנות

כללי

החידוש העיקרי הנמצא בלב עבודה זו הוא "המשקפיים" החדשות בהסתכלות על גבולות השנה בטבלאות השונות לא עוד בהסתכלות המסורתית כ-'יום', 'שעה', ו-'חלק' אלא בהמרתם ל-'חלקים'. לאחר המרת המספרים לחלקים ניתן לנתח באופן מתמטי פשוט את הפונקציות המרכיבות את מולד תשרי של כל שנה נתונה, ולהבין לעומק העניין את נושא ההיקרויות והשכיחויות בלוח העברי.

הצגת הבעיה

להמחשת הבעיה נביט בלוח ס"א ראשים כטבלה בעלת 'אורך' של 181440 חלקים (שבוע), ו'רוחב' של 19 שנים כלהלן:



ה- 'שטח' של הטבלה אמור להיות סך ההיקרויות בלוח, והרואה יראה ששטח הטבלה גדול פי 5 ממחזוריות הלוח (689472 שנים)! עובדה זו הייתה אמורה "להדליק אור אדום" אצל מחשבי השכיחויות בלוח העברי דבר שבפועל לא קרה. אמור מעתה שעצם בחינת הלוחות ב-'משקפיים' של החלקים הם המפתח לתובנות שהועלו בעבודה.

החידושים שהוצגו בעבודה

לאור הסברנו דלעיל, הצלחנו בסייעתא דשמיא לשפוך אור חדש על כמה מסוגיות הליבה בלוח העברי, אנו חלוצים בניתוח מתמטי של הלוחות והנגזרות שהועלו בעבודה וכולן בגדר **חידוש**!

רשימת החידושים שהוצגו בעבודה

- הוכחות מתמטיות פשוטות למחזוריות המולדות, תוך הסתייעות באלגוריתם אוקלידס וגישות מתמטיות אלמנטריות.
- פיתוח נוסחה המניבה את היקירויותיו של מולד נתון כל שהוא בלוח העברי, על כל 47 חזרותיו.

$$M_n = [74377(N+123996)+1] \text{MOD}(181440) + 181440n$$

כאשר M_n – מציין את ההיקירויות, N – המולד המבוקש, n – מקבל את הערכים 0 עד 46.

- הצגה מחודשת של פונקציית מולד תשרי כל שהוא.
- פירוק לוח "ארבעה שערים" לאבני בניין יסודיות, הכלת שינויים על אבני יסוד אלו ובנייה מחודשת של לוח ארבעה שערים חדש המכיל את סך היקירויות המדויקות של כל סימן שנה.
- "ניתוח חדש של לוח ס"א ראשים, תיקוני גבולות הראשים וחישוב היקירויות הסימנים.
- בניית לוח חדש, בן 16 שורות, לוח יעיל יותר מהלוחות המסורתיים.
- בניית לוח חדש, בן 213 ראשים, המכיל בנוסף לסימן השנה את סימן הדחייה כך שהוא מהווה כלי מפורט לחישובי שכיחויות ודחיות בלוח העברי.

פיתוח אלגוריתם כללי לפתירת בעיות מסוג מציאת החזרות של סימן השנה בחלוף X שנים כדוגמת "בעיית 220 השנים שהועלתה ע"י ר' רחמים שר שלום, הפתרון האנליטי שהוצג כפתרון לבעיה אמור לתת בידי הקורא והחוקר כלי הרבה יותר רחב והבעיה שהוצגה ללמד על הכלל כולו יצאה.

נספחים

נספח 1 – חישוב היקרויותיו של מולד נתון (בהר"ד)

	המרה לחלקים	חלק	שנה	יום		
	57444	204	5	2		
שנה עברית	שנה במחזור	חודש	ועוד חודשים	מחזורים שלמים של 19	בחלוף חודשים מבהר"ד	
1	1	תשרי	1	0	1	
2	2	סיוון	21	772	181441	
3	4	טבת	41	1544	362881	
4	5	אלול	61	2316	544321	
5	7	ניסן	81	3088	725761	
6	9	חשוון	101	3860	907201	
7	10	תמוז	121	4632	1088641	
8	12	שבט	141	5404	1270081	
9	14	תשרי	161	6176	1451521	
10	15	אייר	181	6948	1632961	
11	17	טבת	201	7720	1814401	
12	18	אב	221	8492	1995841	
13	1	אדר	6	9265	2177281	
14	3	חשוון	26	10037	2358721	
15	4	סיוון	46	10809	2540161	
16	6	שבט	66	11581	2721601	
17	7	אלול	86	12353	2903041	
18	9	ניסן	106	13125	3084481	
19	11	כסלו	126	13897	3265921	
20	12	תמוז	146	14669	3447361	
21	14	אדר א'	166	15441	3628801	
22	16	תשרי	186	16213	3810241	
23	17	אייר	206	16985	3991681	
24	19	טבת	226	17757	4173121	
25	1	אב	11	18530	4354561	
26	3	אדר שני	31	19302	4536001	
27	5	חשוון	51	20074	4717441	
28	6	סיוון	71	20846	4898881	
29	8	שבט	91	21618	5080321	
30	9	אלול	111	22390	5261761	
31	11	ניסן	131	23162	5443201	
32	13	כסלו	151	23934	5624641	
33	14	תמוז	171	24706	5806081	
34	16	אדר	191	25478	5987521	
35	18	תשרי	211	26250	6168961	
36	19	אייר	231	27022	6350401	
37	2	טבת	16	27795	6531841	
38	3	אב	36	28567	6713281	
39	5	ניסן	56	29339	6894721	
40	7	חשוון	76	30111	7076161	
41	8	סיוון	96	30883	7257601	
42	10	שבט	116	31655	7439041	
43	11	אלול	136	32427	7620481	
44	13	אייר	156	33199	7801921	
45	15	כסלו	176	33971	7983361	
46	16	אב	196	34743	8164801	
47	18	אדר	216	35515	8346241	
בדיקה	48	תשרי	1	36288	8527681	689472

נספח 2- לוח 61 ראשים עם גבולות והיקרויות מתוקנים

נספח 3 - לוח 213 ראשים

נספח 3ב- חישוב שכיחות מלוח 213 ראשים

שכיחות הדחיות:

לא אדו	זקן ביום ב'	זקן בשאר ימים	גטרד	בטותקפט	ללא דחיה	הדחיה
42.85714286	3.5714285 71	10.7142857 1	3.31253480 9	0.53838299 5	39.00622505	באחוזים
295488	24624	73872	22839	3712	268937	סך היקריות בלוח

סוג השנה:

סוג השנה באחוזים		
שלמה	כסדרה	חסרה
44.931194	29.556675	25.512131

שכיחות יום בשבוע:

יום ראש השנה	ב	ג	ה	ז
סך פעמים במחזור כולו	193280	79369	219831	196992
שכיחות באחוזים	28.033	11.5116	31.884	28.5714

שכיחות סימן השנה:

40000	81335	36288	29853	39369	32576	26677	סך פעמים במחזור כולו
זחג	בשה	גכז	זחא	בחג	בשז	החא	סימן השנה
5.8015409	11.796708	5.2631579	4.329835	5.7100216	4.724775	3.8691927	שכיחות ב- %
45899	94563	40000	124416	32576	43081	22839	סך פעמים במחזור כולו
השג	זשג	בחה	הכז	זשה	גכה	השא	סימן השנה
6.6571231	13.715278	5.8015409	18.045113	4.7247749	6.248405	3.3125348	שכיחות ב- %

ביבליוגרפיה

- איידלר, יוסף יצחק. 1995. *הלכות קידוש החודש על-פי הרמב"ם*. ירושלים: אחים גיטלר.
- איידלר, יוסף יצחק. *The Jewish Calendar: Past and Future*, נשלח לבד"ד וטרם פורסם, סיוטא באתר- <http://www.ajdler.com/jjajdler>
- אלמנצי, יוסף. תר"א. *אבני זיכרון*. שדל עורך. פראג: Denksteine
- בורנשטיין, חיים יחיאל. תרמ"ז. *פרשת העיבור*. בתוך. הכרם א
- בורנשטיין, חיים יחיאל. 1904. *מחלוקת רס"ג ובן מאיר*. בתוך ספר היובל נחום סאקאלאוו. רוסיה.
- בורנשטיין, חיים יחיאל. תרס"ט. פליטה מני קדם או שרידי קביעת שנים מדור עזרא ונחמיה. בתוך ד' גינצבורג וי"ד מרקון עורכים, זכרון לאברהם אליהו (ספר היובל לא"א הרכבי). פטרבורג.
- בורנשטיין, חיים יחיאל. תר"פ. *סדרי זמנים והתפתחותם בישראל*. בתוך התקופה ו' (247-313).
- בורנשטיין, חיים יחיאל. תרפ"א – תרפ"ג. *דברי ימי העיבור האחרונים* בתוך התקופה י"ד – ט"ז
- בורנשטיין, חיים יחיאל. תרפ"א – תרפ"ג. *דברי ימי העיבור האחרונים* בתוך התקופה טז (תרפ"ג), עמ' 228-292.
- בורנשטיין, חיים יחיאל. תרפ"ג. *עיבורים ומחזורים*. בתוך התקופה כ' (330-285).
- בורנשטיין, חיים יחיאל. תרפ"ז. *תקופות ומולדות*, חשבון תקופות ומולדות. ורשה.
- בלוך, יהושע. תרצ"ה. *על הדפוס העברי בריווא דטרינטו*. בתוך דוד פרענקיל (עורך). עלים לביבליוגרפיה וקורות ישראל. וינה: בהוצאת העורך.
- גלינסקי, יהודא דוב. 1999. *ארבעה טורים והספרות ההלכתית של ספרד במאה ה-14*. עבודה לשם קבלת תואר דוקטור לתלמוד, רמת-גן: אוניברסיטת בר-אילן.
- הישראלי, יצחק בן יוסף. 1848. *יסוד עולם*. ברלין: גולדברג & רוזנקראנץ
- הנשיא, אברהם ב' חייא. תרי"א. *ספר העבור*. צבי בן יחזקאל פיליפאווסקי (מו"ל). לונדון: בהוצאת המחבר.
- ויטרי, שמחה. 1208. *מחזור ויטרי*. נירנבערג תרפ"ג: מקיצי נרדמים, הורביץ, שמעון בן שאול – מהדיר.
- וילק, שלום. תשס"ט. *הלוח העברי ומסלולי השמש והירח*. ירושלים: בהוצאת המחבר.
- ולטר, שי. 2011. *ראיה קלנדרית וידע אסטרונומי בסוגיות קידוש החודש*. עבודה לשם קבלת תואר דוקטור לתלמוד, רמת-גן: אוניברסיטת בר-אילן.
- זיסקינד, קלרה. 2005. *חיבורים מתמטיים של שני חכמי ספרד: אברהם בר חייא ואברהם בן עזרא*. בתוך חמוטל דוד (עורכת) על"ה 33. חיפה: הטכניון.

- טוקצ'ינסקי . תרס"ב. ברור דברים . בתוך **החבצלת** שנה 32 , עמודים : 259 , 258 , 267 , 266 .
- טישער, יוסף. תשכ"ו. הלוח העברי ויתרונו. תל אביב: מחברות לספרות.
- יפה, צבי הירש. 1931. בעריכת עקביא, א.א. קורות חשבון העיבור. ירושלים: דרום.
- כשר, מנחם מנדל. תשי"ט. תורה שלמה, חומש תורה שלמה (אנציקלופדיה תלמודית מדרשית), ניו-יורק: בהוצאת שולזינגר.
- לוינגר, יעקב. 1986. על השמינית. תל אביב: בהוצאת המחבר.
- לוינגר, יעקב. תשנ"ד. חיזוי הראייה של הירח החדש: שיטת הרמב"ם, לאור ההלכה ומדע-זמננו, בתוך דסברג אורי (עורך) תחומין יד. אלון שבות: הוצאת צומת.
- לוינגר, יעקב. תשנ"ח. הייתכן ברור אסטרונומי למועד ייסוד הלוח העברי? בתוך דף שבועי 248 רמת גן: בהוצאת לשכת רב הקמפוס אוניברסיטת בר אילן. [תקציר הרצאה בכנס תורה ומדע תשנ"ח].
- לוינגר, יעקב. תשס"א. מולד תשרי וראיית הירח אחריי, בתוך ואלטר שי (עורך) יודעי בינה אי. כרם ביבנה: ישיבת כרם ביבנה.
- לוינגר, יעקב. תשס"ג. שלושת סוגי מולדות. בתוך שמחה ולנר (עורך) יד יצחק. כרם ביבנה: ישיבת כרם ביבנה.
- לנגרמן, צבי. תשמ"ז. אימתי נוסד הלוח העברי? קדמותו על פי חיבורו של אל-כיוארזמי. בתוך מאיר בניהו (עורך) אסופות א' ספר שנה למדעי היהדות. ירושלים: יד הרב ניסים.
- לנגרמן, צבי. תשמ"ח. מעשה הרקיע: ר' חיים הישראלי, ר' יצחק הישראלי והרמב"ם. בתוך ספר היובל לשלמה פינס מחקרי ירושלים במחשבת ישראל ז'. ירושלים.
- מנדלבאום, חיים. תשל"ה. ארבע דרכים לחישוב המולד, ע"פ ספר העבור לרבינו אברהם אבן עזרא. בתוך לוינגר (עורך). תורה ומדע כרך ד' חוברת ב'. ירושלים: משרד החינוך והתרבות.
- מנדלבאום, חיים. תשל"ו. מולד תהו ובעיות הלוח. בתוך לוינגר (עורך). תורה ומדע כרך ו' חוברת ב'. ירושלים: משרד החינוך והתרבות.
- מן האדומים, עזריה. 1864, מצרף לכסף. וילנא: ראם.
- מרצבך, חנוך. תשנ"ו. חישובי מולדות על ידי נוסחאות. בתוך רפאל (עורך). סיני קי"ז. ירושלים: מוסד הרב קוק.
- מרצבך, עלי. תשס"ז. הזות חג הפסח לקראת הקיץ. בתוך מרצבך (עורך). בד"ד 18. רמת-גן: אוניברסיטת בר-אילן.
- נחם, אילן. 1999. רדיפת האמת ודרך לרבים – עיונים במשנת ר' ישראל מטולדו. עבודה לשם קבלת תואר דוקטור. ירושלים: אוניברסיטה העברית.
- סלונמסקי, חיים זעליג. תרי"ג. יסודי העיבור א'. וורשא: המחבר.
- סלונמסקי, חיים זעליג. תרכ"א. יסודי העיבור ב'. זיטומיר: המחבר.
- סלונמסקי, חיים זעליג. תרמ"ט. יסודי העיבור ג'. וורשא: המחבר.

- עסיס, משה. 1978. תשובה על קביעתה של שנת ד"א תתל"ח ליצירה (1077/78 לס'). בתוך Sheldon H. Blank (עורך) HUCA 49.
- עקביא, א.א. תשי"ה. ערכן של כתובות צוער לכרונולוגיה, קדם ב, ירושלים:
- עקביא, א.א. תשי"ג. הלוח ושימוש בכרונולוגיה, ירושלים: מאגנס.
- פיליפאווסקי, צבי בן יחזקאל. 1868. ספר מועד מועדים. לונדון: David Nutt.
- פינסקי, נתן. תשמ"ו. מולדות החודש ומועדיהם – שיטות חישובם. בתוך משה ויינר (עורך). המלך ברמה. ירושלים: קול יעקב, רמות.
- פרידברג, חיים דב. 1956. תולדות הדפוס העברי באיטליה. תל אביב: בר-יודא.
- פריימן, אברהם חיים. 1986. הרא"ש. ירושלים: מוסד הרב קוק. מגרמנית אלדר מנחם, במקור פורסם בשנת 1918 – 1920 בשני חלקים.
- פרענקיל, דוד. תרצ"ה. עלים לביבליוגרפיה וקורות ישראל. וינה. בהוצאת העורך.
- פרענקיל, דוד. תרצ"ז. הרופא והמדפיס ר' יעקב בן דוד מרקריאה, מלואים לתולדותיו. בתוך דוד פרנקל (עורך) עלים לביבליוגרפיה וקורות ישראל. וינה. בהוצאת העורך.
- פרנקל, אברהם הלוי. תשי"ג, על המבנה המתמטי של הלוח העברי, בתוך י. בר-הלל וי. נוימן (עורכים), דפים למתמטיקה ולפיסיקה לנוער המתלמד, חוברת ה': ירושלים:
- פרנקל, אברהם הלוי. תשי"ח, משום ירקיא- משום מתיא, בתוך ספר יובל לכבוד שמואל קלמן מירסקי, ירושלים:
- פרנקל, אברהם הלוי. תשכ"ט. האנציקלופדיה העברית, ערך לוח, כרך כא (341-349).
- פרנקל, אברהם הלוי. תשל"ג. עיבור שנים וקידוש החודש, בתוך "אמונה דת ומדע, הכינוס השנתי למחשבת היהדות שנה י"א, ירושלים: משרד החינוך והתרבות.
- צרפתי, גד בן עמי. תשכ"ט. מונחי המתמטיקה בספרות המדעית העברית של ימי הביניים. ירושלים: מאגנס.
- רביב, ערן. 2010. לוחות ושברי לוחות – על מולדות ותכונותיהם. עמ' 31-54. בתוך עלי מרצבך (עורך). בד"ד 22. רמת גן: אוניברסיטת בר-אילן.
- רביב, ערן. 2012. בין ארבעה שערים ללוח ס"א ראשים – הצעה חדשה למציאת סימני הקביעות בעזרת לוח 16 שורות. בתוך עלי מרצבך (עורך). בד"ד 26. רמת גן: אוניברסיטת בר-אילן.
- רביב, ערן. 2012. לוח 213 ראשים. התקבל לפרסום ב- בד"ד. רמת גן: אוניברסיטת בר-אילן.
- רביב, ערן. 2012. המבנה המתמטי של לוח ארבעה שערים. התקבל לפרסום ב- בד"ד. רמת גן: אוניברסיטת בר-אילן.
- שטיינשניידר, משה. 1847. שני המאורות (מאת שדי"ל). ברלין: צארענצאנסקי.

שר – שלום, רחמים. תשמ"ח. מתי נוסד הלוח העברי? מתי תוקן ומתי נחתם. בתוך מובשוביץ (עורך). סיני כרך ק"ב. ירושלים: מוסד הרב קוק. פורסם גם במהדורת אינטרנט באתר דעת עם עדכוני המחבר תשס"ה.

שר – שלום, רחמים. תשנ"ט. תיקון הלוח ע"י הלל וחתימתו בתקופת הגאונים. בתוך דף שבועי 274 רמת גן: בהוצאת לשכת רב הקמפוס אוניברסיטת בר אילן.

שר – שלום, רחמים. תשס"ט. שערים ללוח העברי. ירושלים: בהוצאת מוסד הרב קוק. (מהד' שנייה ומתוקנת).

שר-שלום, רחמים. תשס"ט. מלומדים מוסלמים במאה ה-9 על הלוח העברי. בתוך מובשוביץ (עורך). סיני כרך קמ"ד. ירושלים: מוסד הרב קוק. פורסם גם במהדורת אינטרנט באתר דעת עם עדכוני המחבר תשס"ט.

http://www.daat.ac.il/DAAT/shabat/luach/sarshalom_muslim.pdf

שר-שלום, רחמים. תשע"ב. התאריך הלועזי והשימוש בו בלוח השנה היהודי נספח: תאריכים חוזרים ושנים זהות בלוח העברי והלועזי. בתוך כתב העת הוירטואלי לימודים רוזנברג (עורך).

http://www.daat.ac.il/daat/ktav_et/maamar.asp?ktavet=2&id=1283

The chronology of ancient nations :an English version of the Arabic text of the Athâr-ul-Bâkiya of Albîrûnî, or "Vestiges of the Past" /collected and reduced to writing by the author in A.H. 390-1, A.D. 1000 ; translated and edited, with notes and index, by Dr. C. Edward Sachau : London 1879

Maria Luisa La comunità ebraica di Riva del Garda : sec. XV-XVIII
Author: Crosina; Giuliano Tamani
Trento : Provincia autonoma di Trento, Servizio Beni culturali, Ufficio Publisher:
Beni librari e archivistici ; Riva del Garda : Comune di Riva del Garda, Biblioteca
Book : Italian Civica, 1991 Edition/Format:

S. Stern, Oxford 2001. Calendar and Community, A History of the Jewish Calendar:
Second Century BCE - Tenth Century CE.

כתבי יד

עברונות, מאה י"ז, Berlin- Stadtbibliothek ,Ms oct 3150 ,בספריה הלאומית F17300

http://digital.staatsbibliothek-berlin.de/dms/werkansicht/?PPN=PPN635432978&PHYSID=PHYS_0093

עברונות, מאה י"ז, Frankfurt a M - Stadt- und Universitaestbibliothek ,Ms hebr oct 31

בספריה הלאומית F4239

<http://sammlungen.ub.uni-frankfurt.de/mshebr/content/pageview/1862512>

BAR-ILAN UNIVERSITY

**Analysis of Mathematical
Structures in the
Hebrew Calendar**

Eran Raviv

Submitted in partial fulfillment of the requirements for the
Master's Degree in the school of Education

Ramat Gan, Israel

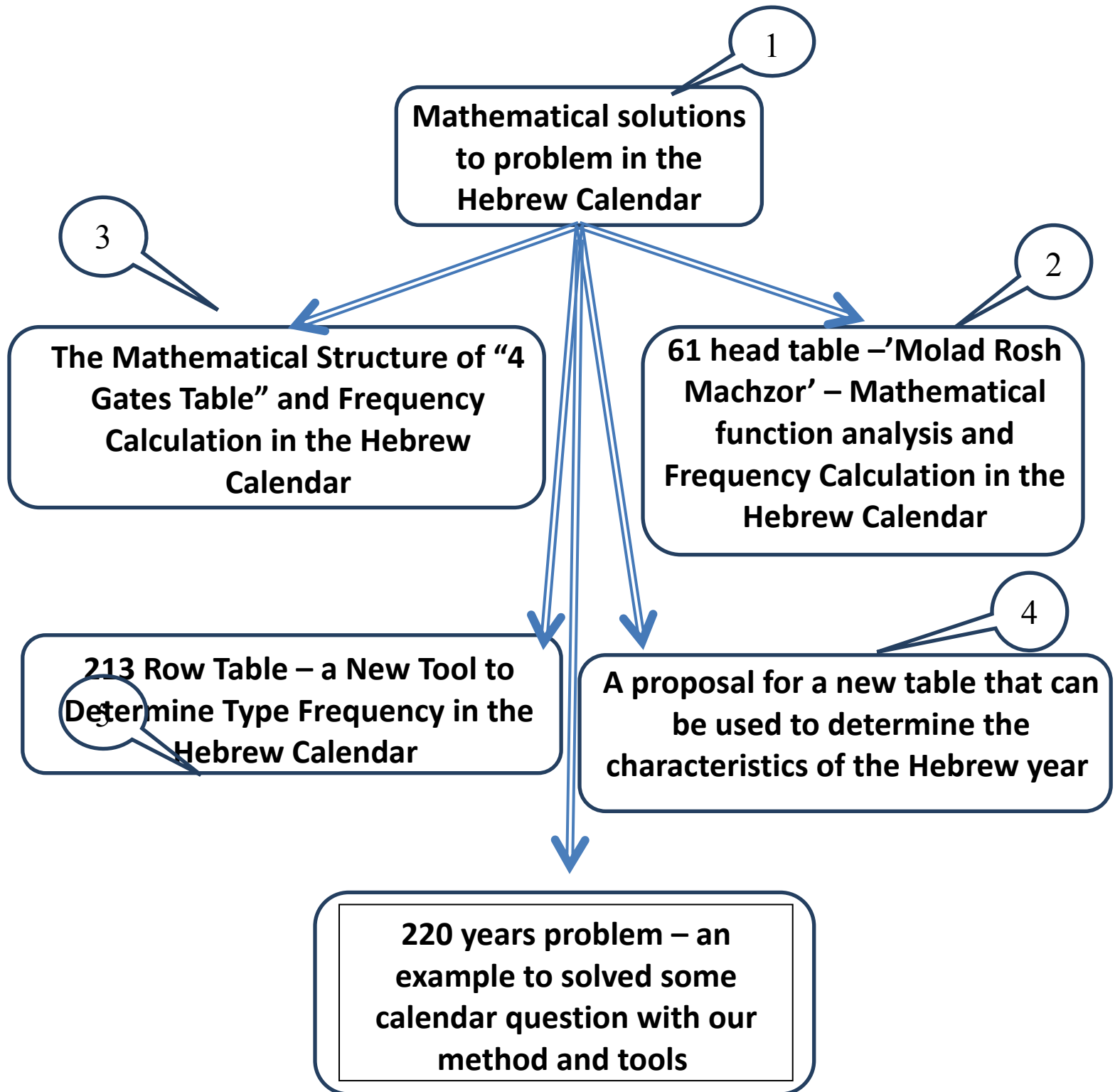
2013

This work was carried out under the supervision of Professor Ely Merzbach

Department of Mathematics Bar-Ilan University.

Abstract

Structure of the Thesis

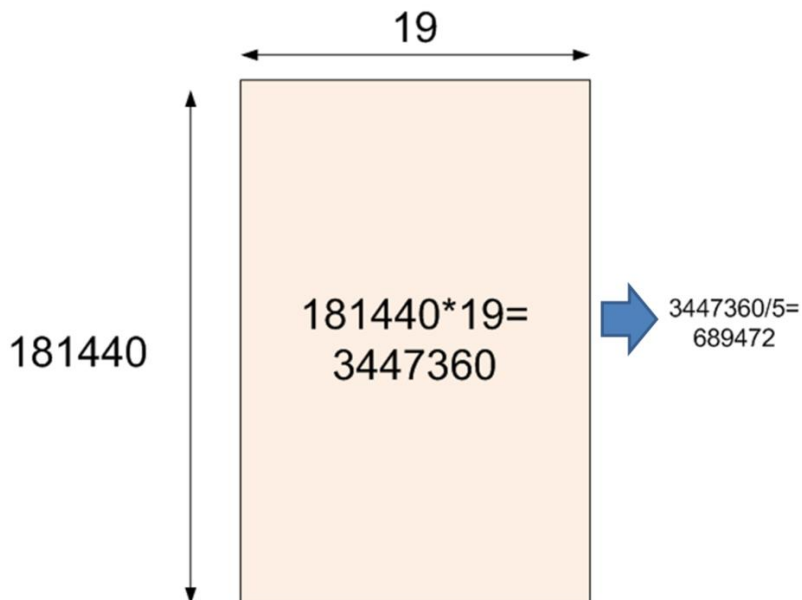


General

The main innovation in this thesis is a "new view" of the 'molad'. In traditional tables the 'molad' was represented by 'day', 'hour', and 'parts'; we have changed the concept and we convert all the numbers to 'parts'.

After converting the numbers into parts, they can be analyzed mathematically using simple functions to represent the 'molad' of Tishrei of a given year, and a deeper understanding of the frequencies in the Hebrew calendar.

To illustrate the problem we look at a table in '61 heads' which has a length of 181440 parts (one week) , and width of 19 years as follows:



The 'total' area of the table should represent the Periodicity of the Hebrew calendar but the real Periodicity is 689472 years! This should have "turned on a red light" but none of the investigators of the calendar ever raised it.

The innovations presented in this thesis are:

- Simple mathematical proofs cycles of 'moladot', using the algorithm of Euclid and elementary mathematical approaches.
- A formula was developed that calculates the reoccurrence of a specific molad (day, hours and parts) which occurs 47 times until it occurs in the same month.

$$M_n = [74377(N+123996)+1] \text{MOD}(181440) + 181440n$$

- Dismantling the "four gates table's" basic building blocks, implementing changes to these cornerstones and the rebuilding of a new four gates table containing the exact frequency of all 'Simanei Hashana'.
- "A new analysis of the 61 heads table, border adjustments to the heads and calculating the 'Simanei Hashana'.
- Construction of a new table with 16 lines, which is more effective than traditional tables.
- Construction of a new table with a 213 heads, also containing the symbol of the year the *Dehiyya* so that it is a precise tool for calculating frequencies in the Jewish calendar.
- Development of algorithm development rules for solving problems such as finding a mark Year Over X years, such as "220 years problem" proposed by R. Sar Shalom.

Chapters of the thesis:

1. Computational Introduction - in the Hebrew calendar -

This chapter offers solution for basic mathematical problems in the Hebrew calendar. We present solutions for finding new and simple Hebrew calendar cycles, representative how using Euclid algorithm and the extended Euclid algorithm (for finding the greatest common divisor), we develop a formula that find out the occurrence of the *molad*.

2. This chapter deals with calculating the occurrence of the *molad* (calendar *molad*) in the Hebrew calendar (published as an article in BDD 22 (2010)).

In the Hebrew calendar, the week is divided into seven days, each comprised of 24 hours and 1,080 parts (=‘halakim’), totaling 181,440 parts per week. Until now, it was assumed that the *molad* of *Tishrei* (or any other month) could occur during any of the various parts, and the occurrence of the *Dehiyyot* (or other statistics) was calculated accordingly.

In contrast to the previous assumption, this work demonstrates how the *molad* cannot fall on any given parts of the week; rather, the occurrence of the *molad* is guided by mathematical principles, which will be explained and examples given. The influence of this phenomenon on the incorrect calculation of frequencies in the Hebrew calendar is minimal. In addition, we will explain how to build a "61 head table" (לוח ס"א ראשים) automatically using an Excel spreadsheet. Finally, we will present a revised calendar that includes The 4 *Dehiyyot* (Postponement Rules), and we have created a new table with 213 lines.

3. The Mathematical Structure of "4 Gates Table" and Prevalence Calculation in the Hebrew Calendar (send to be published as article in BDD 28). In previous papers (BDD vol. 22, & BDD vol. 26) we demonstrated that if we want to calculate the

prevalence of 'Simanei Hashana'.. we must consider that the "Molad" of the "Rosh Machzor" cannot occur continuously in all part of the week (181440 parts).

In this chapter we analyzed the "4 gates table", an ancient table from the period of the "Geonim".

In order to understanding the internal structure of the table, we explain the mathematical function of "Rosh Machzor". In the second part we divide the 4 gates table to into its basic building blocks, regarding to the internal structure of 19 year - "Machzor Katan".

In the second part of this paragraph we represent a new method how to modify these building blocks and rebuild a "new 4 gates table".

From this new table we can calculate the prevalence of 'Simanei Hashana' correctly and accurately.

4. This chapter deals with a proposal for a new table that can be used to determine the characteristics of the Hebrew year and the years following it. (published as article in BDD 26 (2012)).

In order to use this table, we need to calculate the "molad" for Rosh Hashanah and the location of the year in the 19 year cycle.

Over the course of the history of the Hebrew calendar various tools were developed in order to determine the "type" of each year using simple calculations together with the help of a table. The first table was the "4 Gates" table from the period of the "Geonim" and the second one was the "61 Row" table which was developed during the period of the "Rishonim" and was first presented in the 13th century CE.

This chapter presents a logical structure using both tables which consists of 16 rows, explains the algorithm used to build the table and the advantages that it offers over the two historical tables.

5. 213 Row Table – a New Tool to Determine Type Percentages in the Hebrew Calendar (sent to published as article in BDD 28).

This chapter is a continuation based upon an article which appeared in BDD Volume 22 entitled “Tablets and tablet shards” – on Molad and their characteristics”.

In the previous paper we presented a new understanding related to the possibility of the molad of Tishrei occurring in each of the “halakim” of the week which is different than the previous assumption.

As an addendum to the paper, we are presenting a new 213 row table which can be used to create a “siman” for each type of year similar to that in the “61 row table.” The new table adds an additional letter which indicates the type of “dechiya.”

The importance of this table is it can be used as correct and very accurate tool to calculate the prevalence and type of each “dechiya.”

We will analyze the table, explain the source of the number 213 and raise addition implications of this new table.