דניאל מיכלסון

שור ואדם שדחפו לבור

אנו דנים בשאלה של חלוקת נזק שבו מעורבים מספר מזיקים, כאשר ידועה חלוקת נזק בין כל זוג מזיקים. אנו מציעים כמה אפשרויות של פתרון. אחד מהם הוא תהליך איטרטיבי של התדיינות מתמדת של כל זוג וזוג בפני עצמו. הממוצע של התהליך שואף לגבול, אותו ניתן לחשב ע״י שרשרות מרקוב. הדיון מבוסס על הסוגיה בגמרא בבא קמא נג ע״ב ודעת הראשונים והאחרונים בנושא.

1. הצגת הבעיה

כתוב בגמרא בבא קמא נג ע"ב: "אמר רבא שור ואדם שדחפו לבור לענין נזקין כולן חייבין". ותוספות שם ד"ה שור כתבו: "לא שדחף אדם בכוונה דאם 'כן בעל בור אמאי מחייב, דאטו אם ישים אדם טליתו של חברו באש של חבירו וכי יתחייב בעל האש". בעקבות כך נפסק בשולחן ערוך חושן משפט סימן תי סעיף לד: "אם אדם ושור דחפו שור אחר לבור והיה אדם שלא בכוונה שאם היה בכונה היה בעל הבור פטור, שלשתן חייבין אם השור מועד משלשים ביניהם ואם הוא תם משלם השתות והמותר ישלמו ביניהם האדם ובעל הבור".

אבל קצות החושן שם השיג :

> **"וראוי לספק אדם ושור שדחפו שור אחד לבור והיה אדם בכוונה באיזה אופן ישלם, דודאי אם לא היה שור אלא אדם לבדו דחפו היה בעל הבור פטור ואדם חייב כיוון שהיה בכוונה, ואם לא היה האדם אלא שור דחף שור אחר לבור היו שניהם חייבין בשוה השור והבור, והשתא דהזיקו שלשתן בכוונה היכי לדייני, אי נימא האדם בכוונה ישלם חציו ובעל השור חציו ובעל הבור יפטור לגמרי הא בעל השור טוען אנא שותפאי אית לי והוא בעל הבור דלענין בעל השור הוי 'ליה בעל הבור שותף בהיזק, ואי נימא האדם שני חלקים ובעל השור שליש האדם טוען אנא שותפאי אית לי והוא בעל השור דהאדם והשור שהזיקו משלמין שניהם בשוה, ונראה דבזה ישלם האדם חציו והשור והבור חציו דהאדם לית ליה שותף אלא השור ומחציתו השני שור רביע ובור רביע, ולפי 'זה אפשר לומר דהא דאמר רבא אדם ושור ובור שלשתן חייבין והיינו דכולן חייבין אבל אין משלשין ביניהם, ואם 'כן שפיר מצי איירי אדם בכוונה דהא בשור תם ודאי אין משלשין ביניהם אלא שכולן חייבין וה"נ כולן חייבין והאדם מחציתו והשור והבור מחציתו השני".**

כלומר, מסקנת קצות החושן שאדם ישלם חצי נזק, ובעל השור ובעל הבור כל אחד ישלם רבע נזק.

ורבי שמעון יהודה הכהן (רבי שמעון שקופ) בחידושיו על מסכת ב"ק דף ו ע"א כתב על דברי הקצות הנ"ל:

> ואנכי לא אבין זה, דלדעתי הנה לפי 'מה דקיימא לן כר"נ דכל 'אחד כולה היזקא עביד היה ראוי לכאורה לאמר דגם בעל הבור ישלם שליש דמכל 'מקום הרי היה סיוע להיזק וכל מי שמסייע להיזק חשיב כאילו כולה היזקא עביד, דהרי לא מצינו חילוק במידת הכוחות שלהם, דהרי שור ואדם ודאי דאין שווים בכוחותיהם. ולמ"ד פלגא היזקא עביד גם כן נראה חשבון אחר, דלמה ישלם בעל השור רק רביע דמה נפקא 'מינה לבעל השור אם היה האדם בכוונה או לא. אלא נראה דהאדם ישלם מחצה דלדידיה חשבינן כאילו עשה היזק רק עם עוד שותף אחד ובעל השור שליש ובעל הבור חצי שליש".

מסקנת רבי שמעון שקופ היא שאדם ישלם חצי נזק, בעל השור שליש ובעל הבור ששית.

ברצוננו להציע פתרון אחר לבעיה הנ"ל ובאופן כללי לבעיות מסוג זה כאשר כמה גורמים שותפים בנזק וידוע הדין לגבי חלוקת תשלום בין זוגות בלבד.

2. ניסוח מתמטי של הבעיה

נציג שוב את הסוגיה שלנו. שור מועד ואדם דחפו שור אחר לבור. אם אדם לבדו היה דוחף את השור לבור בכוונה, היה עליו לשלם את הכל ובעל הבור היה פטור לכל הדעות. אם שור מועד לבד היה דוחף שור אחר לבור, בעל השור ובעל הבור היו חולקים בנזק חצי חצי. אם אדם בכוונה (או בלי כוונה) ושור מועד היו מזיקים שור אחר (לא ע"י בור), האדם ובעל השור היו חולקים חצי חצי. השאלה : איך לחלק את התשלום בין שלושת הגורמים באופן צודק כך שהניזוק יקבל את הכל. נסמן חלק של נזק אשר משלם אדם ע"י x_1 , בעל השור x_2 ובעל הבור x_3. כאשר אדם ושור דנים ביניהם צריך לקיים משוואה

$$x_1=x_2. \qquad (1)$$

כאשר בעל השור ובעל הבור דנים ביניהם יש לקיים משוואה

$$x_2=x_3. \qquad (2)$$

כאשר אדם ובעל הבור דנים ביניהם יש לקיים משוואה

$$x_3=0. \qquad (3)$$

מאחר וניזוק צריך לקבל את כל הנזק, יש לקיים משוואה

$$x_1+x_2+x_3=1. \qquad (4)$$

ברור שלמערכת זאת של ארבע משוואות עם שלושה נעלמים אין פתרון. אמנם ניתן למצוא פתרון מקורב, דהיינו לפתור מערכת משוואות

$$x_1-x_2=e_1,\ x_2-x_3=e_2,\ x_3=e_3,\ x_1+x_2+x_3-1=0 \qquad (5)$$

כאשר וקטור אי התאמה $e=(e_1,e_2,e_3)$ הוא מינימלי בנורמה כלשהי $\|e\|$. התוצאה כמובן תלויה בבחירת הנורמה. למשל אם נבחר נורמה ריבועית (בשפה מתמטית נורמת l_2) $\|e\|_2=\sqrt{(e_1)^2+(e_2)^2+(e_3)^2}$ מתקבל הפתרון: $x_1=6/14,\ x_2=5/14,\ x_3=3/14$. אם נבחר נורמה של מקסימום (נורמת l_∞) דהיינו $\|e\|_\infty=\max(|e_1|,|e_2|,|e_3|)$ מתקבל הפתרון $x_1=1/2,\ x_2=1/3,\ x_3=1/6$. תוצאה זאת זהה לפתרון שהוצע ע"י רבי שמעון שקופ. אם נבחר נורמת סכום (l_1) דהיינו $\|e\|_1=|e_1|+|e_2|+|e_3|$ מתקבל הפתרון $x_1=x_2=x_3=1/3$. מבחינה מתמטית אין עדיפות לשום נורמה. על כן, לא ברור באיזה פתרון לבחור.

3. פתרון של קצות החשן והכללתו

נעיין בדברי קצות החושן. הוא מתחיל מהצעה $x_1=x_2=1/2,\ x_3=0$. ואז בעל השור טוען שבעל בור שותף אתו בנזק לכן יש לחלק סכום תשלומים $x_2+x_3=1/2$ בשוה ביניהם כך שיתקיים – $x_1=1/2,\ x_2=x_3=1/4$. ואם נאמר ש-$x_1=2/3,\ x_2=1/3,\ x_3=0$ אז האדם טוען שבעל שור שותף אתו בשווה, לכן יש לחלק נזק ביניהם $x_1=x_2=1/2$, ושוב בא בעל השור אל בעל הבור. וחלוקים ביניהם. לכן הפתרון אשר הוצע ע"י הקצות הוא $x_1=1/2,\ x_2=1/4,\ x_3=1/4$. אבל באמת ניתן להמשיך את סידרת הדינים בין זוגות המזיקים בלי סוף, והתוצאה תהיה תלויה במספר ובסדר הדינים. כיצד?

אנו מתחילים עם הצעת חלוקת הנזק $x=(x_1,x_2,x_3)$ ובאים לבית דין של אדם ושור. בית דין זה לא דן בחלקו של בור אלא לוקח את הנזק אשר הוטל על אדם ושור שהוא x_1+x_2 וחולק אותו בשוה ביניהם. נמצאת חלוקת הנזק החדשה $y=(y_1,y_2,y_3)=((x_1+x_2)/2,(x_1+x_2)/2,x_3)$. את התוצאה נתן לכתוב בצורה $y=xA_1$ כאשר A_1 היא מטריצה של 3 על 3

$$A_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{6}$$

אם אותה הצעה תבוא לפני בית דין בתביעה של שור ובור אז התוצאה תהיה $(y=(x_1,(x_2+x3)/2,(x_2+x3)/2$ ובצורה מטריציאלית $y=xA_2$ כאשר

$$A_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \tag{7}$$

ואם ההצעה תבוא לפני בית דין בתביעה של בור ואדם אז $y=((x_1+x_3),\ x_2,0)=xA_3$ כאשר

$$A_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{8}$$

אם הצעה x תבוא לפני בית דין בתביעה של בור ואדם והתוצאה משם תבוא לפני בית דין בתביעת אדם ושור ומשם לדין שור ובור אז התוצאה הסופית תהיה $y=xA_3A_1A_2$. מכפלת שלשת המטריצות שוה

$$A_3A_1A_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \tag{9}$$

לכן התוצאה הסופית תהיה תמיד $y=(1/2,1/4,1/4)$ ללא תלות בווקטור התחלתי x. זאת אכן הצעתו של קצות החושן: "האדם מחציתו והשור והבור מחציתו השני". ברור שהכפלה של וקטור x בכל סידרה של מטריצות A_i, $i=1,2,3$ אשר כוללת בתוכה מכפלה $A_3A_1A_2$ תיתן תוצאה y שאיינה תלויה ב-x. אבל התוצאה תהיה תלויה בסדרה של מטריצות A_i אחרי רצף אחרון של $A_3A_1A_2$ בסדרה. למשל $xA_3A_1A_2A_1=(3/8,3/8,1/4)$, $xA_3A_1A_2A_1A_2=(3/8,5/16,5/16)$. אם הסדרה לא כוללת מכפלה $A_3A_1A_2$ אז היא בהכרח נראית כך: $y=x\ldots A_3(A_2A_1)^n$ או $y=x\ldots A_3(A_2A_1)^nA_2$. אם n שואף ל-$\infty$, אז התוצאה תשאף לווקטור קבוע $(1/3,1/3,1/3)$. ומאחר שהתוצאה באופן כללי תלויה בסדרה, חוזרת השאלה למקומה: באיזה סידרה נבחר?

נניח ששלושת המזיקים שילמו בתחילה לניזק את כל הנזק לפי חלוקה כלשהי $x=(x_1,x_2,x_3)$ ומאז הם מבלים את חייהם עד מאה ועשרים בעשיית דין ביניהם. כיצד? זוג זוג נפגש ביניהם באופן אקראי והולך לבית דין מתאים ומבקש לעשות חלוקה צודקת ביניהם. אחד משלם לשני לפי פסק בית הדין ואחר כך זוג אחר הולך לבית דין מתאים וכו'. מה יהיה חסרון כיס הממוצע של כל מזיק משך כל חייו? נסמן ב- $w=(w(1),w(2),\ldots,w(n))$ ווקטור באורך n אשר רכיבים שלו הם מספרים 1,2,3 וב- A_w מטריצת מכפלה $A_w=A_{w(1)}A_{w(2)}\ldots A_{w(n)}$. אם המזיקים פנו במשך החיים שלהם n פעמים לבית דין לפי סדר w אז ממוצע של תשלום שלהם יהיה

$$y=\frac{1}{n+1}x\sum_{k=0}^{n}A_{w_k}, \tag{10}$$

כאשר

$$w_k=(w(1),\ldots,w(k));\ A_{w_0}=I. \tag{11}$$

כדי למצוא ממוצע עבור וקטור אקראי w צריך למצע את התוצאה הנ"ל עבור כל הווקטורים w באורך n, דהיינו

$$y=\frac{1}{d(n)}\frac{1}{n+1}x\sum_w\sum_{k=0}^{n}A_{w_k},\ d(n)=3^n \tag{12}$$

נציין שממוצע של A_w שוה

$$\frac{1}{d(n)}\sum_w A_w=S^n, \tag{13}$$

כאשר

$$S=(A_1+A_2+A_3)/3=\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad (14)$$

וממוצע של A_{w_k} שוה

$$\frac{1}{d(n)}\sum_w A_{w_k}=\frac{d(n-k)}{d(n)}\sum_{w_k} A_{w_k}=\frac{1}{d(k)}\sum_{w_k} A_{w_k}=S^k . \qquad (15)$$

מכאן הממוצע הכללי שווה

$$y=\frac{1}{n+1}x(I+S+...S^n) \qquad (16)$$

גבול של נוסחה (16) כאשר n שואף לאינסוף הוא דבר ידוע בתורת שרשרות מרקוב. לשלמות העניין אנחנו נציג פה את הפרטים של חישוב הגבול. מטריצה S כמו מטריצות A_i היא סטוכסטית ימנית, דהיינו בעלת רכיבים אי שליליים כאשר סכום הרכיבים בכל שורה שווה 1. לכן ערכים עצמיים λ של S מקיימים $|\lambda|\le 1$. למעשה מטריצה S היא גם פרימיטיבית. לכן כתוצאה ממשפט פרון-פרובניוס למטריצה S יש ערך עצמי פשוט $\lambda=1$ ויתר ערכים עצמיים בערכם המוחלט קטנים מ-1. ווקטור עצמי אשר מתאים לע"ע 1 הוא

$$e=(5/9,3/9,1/9),\ eS=e \qquad (17)$$

וקטור e מנורמל כך שסכום רכיביו שווה ל-1. מאחר ווקטור x בנוסחה (16) גם כן מנורמל, קל לראות שווקטור y ב-(16) שואף ל-

$$\lim_{n\to\infty}y=e=(5/9,\ 3/9,\ 1.9) \qquad (18)$$

מסקנת הדבר: אם אדם, בעל שור ובעל בור מתדיינים כל החיים ביניהם זוג זוג באופן אקראי, תשלום הנזק יתחלק באופן ממוצע ביחס של 5/9 של אדם, 3/9 של בעל שור ו-1/9 של בעל בור. תוצאה זאת שונה מאלו שהוצעו ע"י קצות החושן ורבי שמעון שקופ. התברר שבמקום ללכת לבתי דין של זוגות צריך להגדיר בית דין של פשרה שהוא ממוצע מפסיקות של שלשת בתי דין של זוגות. זהו בית דין המיוצג ע"י מטריצה S במשואה (14).

4. הכללה למקרה של מספר רב של מזיקים

נתן להרחיב את הניתוח שלנו למקרה של m מזיקין כאשר כל זוג $i,j,\ 1\le i<j\le m$ חולקים את הנזק ביניהם לפי יחס $(\alpha_{ij},\beta_{ij}),\ \alpha_{ij}+\beta_{ij}=1$. לזוג זה מתאימה מטריצה A_{ij} אשר רכיבים שלה

$$A_{ij}(i,i)=\alpha_{ij},\ A_{ij}(i,j)=\beta_{ij},\ A_{ij}(j,i)=\alpha_{ij},\ A_{ij}(j,j)=\beta_{ij};\ \text{for } k\neq i,j\ A_{ij}(k,k)=1 \qquad (19)$$

ויתר רכיבים שלה אפסים. מספר זוגות כאלו הוא $l=\frac{m(m-1)}{2}$. מטריצה S מוגדרת בתור ממוצע של מטריצות A_{ij}

$$S=\frac{1}{l}\sum_{i,j}A_{ij} \tag{20}$$

מאחר ומטריצות A_{ij} סטוכסטיות כך גם מטריצה S. כדי להבטיח שמטריצה S תהיה פרימיטיבית, מספיק לדרוש שכל הרכיבים בשורה i ובעמודה i של מטריצה S עבור i מסוים יהיו שונים מאפס. פרוש הדבר שמזיק מספר i תולק את הנזק עם כל אחד מהמזיקים האחרים באופן חלקי, כלומר $0<\alpha_{ij}<1$ עבור כל j, $i<j$ ו- $0<\alpha_{ji}<1$ עבור כל j, $j<i$ (במקרה של הסוגיה אדם, שור ובור, מזיק i הוא שור בלבד). אזי למטריצה S עבור ע"ע 1 יש וקטור עצמי יחיד e עם סכום רכיבים שוה ל-1 ויתר ע"ע בערכם המוחלט קטנים מ-1. וקטור y המוגדר ע"י משוואה (12) עם $d(n)=m^n$ מקבל צורה כמו במשוואה (16) ושואף ל-e כאשר n שואף לאינסוף.

בחשבון שערכנו, לקחנו סדרות $w=(w(1),w(2),\ldots,w(n))$ מכל הצירופים האפשריים של מספרים 1,2,3. אבל למעשה, אם באים פעמים לאותו בית דין, התוצאה לא משתנה. לכן יותר נכון היה לקחת סדרות w בלי חזרות צמודות של אותו מספר. מספר סדרות כאלו באורך n ניתן ע"י נוסחה

$$\tilde{d}(n)=(m-1)^{n-1}m \tag{21}$$

נוסחה (13) מוחלפת כעת בנוסחה

$$\frac{1}{\tilde{d}(n)}\sum_w A_w=S\left(\frac{mS-I}{m-1}\right)^{n-1} \tag{22}$$

ונוסחה (15) בנוסחה

$$\frac{1}{\tilde{d}(n)}\sum_w A_{w_k}=\frac{m-1}{m}\frac{\tilde{d}(n-k)}{\tilde{d}(n)}\sum_{w_k}A_{w_k}=\frac{1}{\tilde{d}(k)}\sum_{w_k}A_{w_k}=S\left(\frac{mS-I}{m-1}\right)^{k-1} \tag{23}$$

לכן נוסחה (16) תוחלף בנוסחה

$$\mathbf{y}=\frac{1}{n+1}\mathbf{x}(I+S\sum_{k=1}^{n}\tilde{S}^{k-1}),\quad \tilde{S}=\left(\frac{mS-I}{m-1}\right). \tag{24}$$

מטריצה $\tilde{S}$ היא סטוכסטית כמו S, דהיינו רכיבים שלה לא שליליים וסכום הרכיבים בכל שורה שווה ל-1. לגבי סימן רכיבים חוץ לאלכסון הדבר הוא ברור וכן לגבי הסכום. רכיבי אלכסון של מטריצה שווים

$$\tilde{S}(i,i)=\frac{m}{l(m-1)}\left(\sum_{j>i}\alpha_{ij}+\sum_{j<i}\beta_{ji}\right)+\frac{m-3}{m-1}\ . \tag{25}$$

גם אם כל מקדמים α ו-β לעיל אפסים, אלכסון הוא אי שלילי אם $m\geq 3$. אם בנוסף עבור i

מסויים מזיק מספר i חולק את הנזק עם כל אחד ממזיקים אחרים אז כל הרכיבים של שורה i ועמודה i של מטריצה $\tilde{S}$ חיוביים. על כן מטריצה $\tilde{S}$ גם כן פרימיטיבית. ברור שווקטור עצמי e של מטריצה S המתאים לע"ע 1 הוא גם וקטור עצמי של מטריצה $\tilde{S}$ המתאים לאותו ע"ע. מאחר וניתן להביא מטריצות S ו-$\tilde{S}$ בו זמנית לצורת בלוקים, אז בלוקים עם ערך עצמי קטן מאחד לא יתרמו לווקטור y כאשר n שואף לאינסוף. התוצאה הסופית תהיה כמו ב-(18), דהיינו

$$\lim_{n\to\infty} y = e \qquad (26)$$

התוצאה ב- (18) התקבלה עבור המקרה של שור מועד ואדם בכוונה שדחפו שור אחר לבור. מה יקרה אם השור יהיה תם? כידוע שור תם משלם חצי נזק (מגופו). אם לשור תם יש שותף, אז השותף משלם את יתרת הנזק. לכן בבית דין של אדם-שור, אדם ישלם 2/3 ובעל השור 1/3, בבית דין של שור-בור, בעל השור ישלם 1/3 ובעל הבור 2/3 ובבית דין של אדם-בור, אדם ישלם הכל. מטריצה S במקרה כזה שוה

$$S=\begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} \qquad (27)$$

ווקטור עצמי e במקרה זה שוה

$$e=(7/9,\ 2/9,\ 1/9) \qquad (28)$$

כלומר: אדם ישלם 7 חלקים, בעל שור שני חלקים ובעל בור חלק אחד מתוך 9 חלקים של הנזק.