רונן קציר

תיאור מתמטי של סוגיית קו התאריך בהלכה

קביעת התאריך על פני כדור הארץ והצורך בקו התאריך הם נושאים שהעסיקו רבות את האנושות בכלל ואת ההלכה היהודית בפרט. במאמר זה נציע תיאור מתמטי לבעיה שבקביעת התאריך על פני כדור הארץ, ובהתאם לכך נסביר בכלים מתמטיים את ההבדל בין השיטות השונות בהלכה להתמודדות עם בעיה זו. המאמר כולל גם סקירה קצרה של כמה מושגים בסיסיים בטופולוגיה הנחוצים להבנת התיאור המתמטי.

בחלק הראשון של המאמר נסקור בקצרה את השיטות ההלכתיות ללא שימוש בכלים מתמטיים. בחלק השלישי של המאמר נציע את הניסוח המתמטי לעובדות המוצגות בחלק הראשון. כדי שהמאמר יהיה מובן לכל אדם בעל רקע מתמטי מינימלי, מובא בחלק השני הסבר קצר של המושגים המתמטיים הרלוונטיים להבנת המאמר. בעלי רקע מתקדם יותר במתמטיקה, ובפרט בטופולוגיה, יכולים לדלג על החלק השני ולקרוא רק את החלקים הראשון והשלישי.

חלק ראשון – סקירה הלכתית

הבעיה

קו התאריך הבין-לאומי הוא קו דמיוני המחבר בין שני הקטבים של כדור הארץ וחוצה את האוקיינוס השקט. על פי מוסכמה כלל עולמית, יש פער של יום בין התאריך במערבו של קו התאריך לבין התאריך במזרחו. מי שחוצה את קו התאריך ממזרח למערב מדלג על יום בלוח השנה, ואילו מי שחוצה את הקו ממערב למזרח חוזר לתאריך של היום הקודם.

הצורך בקו התאריך נובע מהעובדה שזמני היום והלילה על פני כדור הארץ אינם אחידים. אם נשווה בין שני קווי אורך קרובים זה לזה, הרי שבקו האורך המזרחי מבין השניים היום יתחיל מוקדם יותר מאשר בקו המערבי.

כל עוד התנועה שלנו על פני כדור הארץ היא מקומית בלבד, ההבדלים האלה אינם מורגשים כל כך. ואולם הם באים לידי ביטוי כאשר אדם מבצע סיבוב שלם מסביב לכדור הארץ וחוזר שוב לנקודת המוצא. כאשר הסיבוב הוא בכיוון מזרח, הימים של אותו מטייל (כלומר פרקי הזמן בין שקיעה לשקיעה) הם בממוצע קצרים יותר מהימים של אלה שנשארו במקומם. אם למשל עברו על יושבי המקום 80 ימים, על המטייל עברו באותו פרק זמן 81 ימים. באופן דומה, כאשר הסיבוב הוא בכיוון מערב יעברו על המטייל רק 79 ימים בזמן שעל יושבי המקום יעברו 80 ימים.

המציאות שבה לאנשים שונים הנמצאים באותו מקום יש חישוב שונה של מניין הימים היא

בעייתית בכל חברה אנושית. אך הבעיה מורגשת במיוחד במסגרת עולם ההלכה. מניין הימים משפיע הן על חישוב התאריך על פני לוח השנה והן על קביעת היום בשבוע. לפיכך, כל הלכות שבת ומועדים תלויות במניין זה. כיצד אפשר לקבוע מתי חל יום השבת כאשר אנשים שונים מעידים שעבר עליהם מספר שונה של ימים מאז השבת הקודמת?

פתרון ראשון – קו תאריך

הפוסקים הציגו שיטות שונות להתמודדות עם הבעיה. רוב הפוסקים התמודדו עם הבעיה שבקביעת התאריך באותו אופן שבו התמודד איתה העולם - על ידי קביעת קו תאריך. מי שחוצה את קו התאריך משנה את מניין הימים שלו – מוסיף לו יום או מחסיר ממנו יום, וכך כאשר יחזור למקומו ישתווה המניין שלו למניינם של אנשי המקום. היסוד לגישה זו נמצא כבר בדבריו של ריה"ל בספר הכוזרי:

> אכן, מן הנמנע הוא שלא יהיה מקום משותף אשר הוא סוף מערבה של הארץ ותחילת מזרחה; כלפי ארץ ישראל מקום זה הוא ראשית הארץ הנושבת.
> ודבר זה אינו בדין התורה בלבד, כי אם גם בחוק הטבע: כי לא ייתכן שיהיה כל יום מימי השבוע נקרא בו-בשם בכל חלקי הארץ הנושבת, אם לא נקבע לנו שני מקומות: אחד אשר בו מַתחלת קריאת השם, ושני בו מזרח ומערב נפגשים

(הכוזרי ב', כ).

ריה"ל הכיר בכך שחייב להיות מקום שבו המזרח והמערב נפגשים, ובמקום זה לא נשמרת הרציפות בקביעת התאריך. אמנם, העולם המיושב שאותו הכיר ריה"ל היה רק בחצי הכדור שבו נמצאות יבשות אסיה, אירופה ואפריקה. בימיו של ריה"ל עדיין לא הקיפו בני אדם את כדור הארץ, ולכן מבחינה מעשית לא הייתה כל התלבטות בקביעת השבתות והמועדים. דבריו של ריה"ל מעידים על היכרותו עם עולם הטבע וידיעתו שהשמש זורחת בשעות שונות במקומות שונים, אך הם אינם מכוונים לפסיקת הלכה בשאלת קו התאריך, שעדיין לא הייתה שאלה מעשית אז.

כאשר הפכה שאלת קו התאריך לשאלה מעשית מבחינה הלכתית, ניסו הפוסקים להיתלות בדבריו של ריה"ל ובדבריהם של ראשונים נוספים כדי לקבוע מה יהיה מיקומו של קו התאריך לפי ההלכה. העיקרון המרכזי העולה מדברי ריה"ל הוא שירושלים צריכה להיות במרכז העולם, כלומר-במקום המרוחק ביותר משני קצות העולם הנפגשים בקו התאריך. בהתאם לכך סבר הרב טיקוצ'ינסקי שקו התאריך נמצא 180° מירושלים, בלב האוקיינוס השקט.[1] פוסקים אחרים העלו שיטות נוספות: החזון אי"ש מיקם את קו התאריך 90° מזרחית לירושלים, בחופה המזרחי של יבשת אסיה.[2] הרב גורן סבר שקו התאריך נמצא 114° מזרחית לירושלים,[3] ואילו הרב דוד שפירא

1 קונטרס "היומם על פני כדור-הארץ" (תש"ג).
2 קונטרס י"ח השעות, מופיע בחזון אי"ש חלק או"ח.
3 מחניים י"ד עמ' ט-יא.

מיקם אותו 135° ממזרח לירושלים.[4]

לפי כל השיטות האלה קו התאריך אמור לחצות במקום מסוים את היבשה. הפוסקים היו מודעים לכך שמבחינה מעשית אי אפשר לקבוע את קו התאריך באמצע מקום מיושב. היטיב לתאר זאת רבנו יצחק הישראלי, תלמיד הרא"ש, בספרו 'יסוד עולם':

> ועוד יש לטעון עליהם, איך יתכן שיהיה לוי השוכן בטבור הארץ עומד עתה בחצות יום שבת, ויכפור בו יהודא שכנו ויאמר 'לא כי אלא ביומם של יום אתמול אנו עומדים'; היש בעולם התול או שגעון כזה?

('יסוד עולם' מאמר ב',יז).

בהתאם לכך הורו הפוסקים שיש להסיט את קו התאריך מזרחה או מערבה באזורים מסוימים, כדי שלא יחצה את היבשה. כך למשל סבר החזון אי"ש שקו התאריך נמצא בגבול המזרחי של יבשת אסיה, ואילו הרב טיקוצ'ינסקי הסיט את קו התאריך מערבה כדי שלא יעבור באלסקה.

הקושי המרכזי בכל השיטות האלה הוא שאין להן בסיס ברור במקורות ההלכתיים. המקורות בדברי הראשונים העוסקים בנושא זה הם דלים למדיי, וגם הם עסקו בכך מבחינה תאורטית בלבד ולא העלו על דעתם שיהיו לדבריהם השלכות מעשיות. הפוסקים הנ"ל הניחו שחייב להיות קו תאריך כלשהו, מכוח ההכרח ובדומה למוסכמה הבין-לאומית, והתמקדו בעיקר בשאלה היכן הוא ממוקם. אך לא ברור מהו הבסיס ההלכתי לעצם קיומו של קו שכזה. הקושי מתחדד לאור העובדה שאין מועמד טבעי לשמש כקו תאריך, וכל אחד מהפוסקים נאלץ לעקם את הקו באופן הנראה כמעט שרירותי.

פתרון שני – שיטת הרב כשר

גישה שונה לפתרון הבעיה מציע הרב מנחם כשר בספרו "קו התאריך הישראלי". לדעת הרב כשר ההלכה אינה קובעת באופן חד-משמעי מהו התאריך בכל מקום על פני כדור הארץ. כל אדם מחויב באופן אישי למנות שישה ימים ולשבות ביום השביעי. ייתכן בהחלט מצב שבו שני אנשים שונים ייקלעו למקום אחד, ולכל אחד מהם יהיה מניין שונה של ימים. מצב כזה ייווצר למשל במקרה שבו שני אנשים יוצאים להקיף את כדור הארץ בכיוונים מנוגדים, והם פוגשים זה את זה אי שם בלב האוקיינוס. במקרה כזה לדעת הרב כשר כל אחד משני האנשים צריך לשמור את השבת ביום אחר, כיוון שלפי המניין האישי של כל אחד מהם עבר מספר שונה של ימים מאז השבת הקודמת.

המקרה היחיד שבו אדם נדרש לזנוח את החשבון האישי שלו הוא כאשר הוא מגיע למקום יישוב, ולאנשי המקום יש כבר מניין ימים השונה מהמניין שלו. במקרה כזה האדם נוטש את הספירה האישית שלו, ומתחיל את החשבון מחדש על פי הלוח של בני המקום.

לעקרונות העומדים ביסוד השיטה הזו יש בסיס בפסוקי התורה. מצד אחד, החשבון האישי של כל אדם נלמד מהפסוק "שֵׁשֶׁת יָמִים תַּעֲבֹד וּבַיּוֹם הַשְּׁבִיעִי תִּשְׁבֹּת" (שמות ל"ד, כא). פסוק

4 שו"ת בני ציון סי' יד.

זה קובע שהשבת של כל אדם נקבעת על פי החשבון האישי שלו. מצד שני, כאשר האדם מגיע למקום יישוב שבו יש חשבון אחר, עליו לבטל את חשבונו האישי ולהצטרף למניין אנשי המקום, מכוח הפסוק "שבת הוא לה' בכל מֹשבֹתיכם" (ויקרא כ"ג, ג). לפי פסוק זה יש הצדקה לאימוץ קו התאריך הבין-לאומי, אשר נקבע אי שם באוקיינוס השקט בהתאם למפת ההתיישבות האנושית. ואולם אין משמעות הלכתית למיקומו המדויק של הקו. שינוי התאריך מתבצע כאשר אדם מגיע למקום יישוב עם חשבון שונה משלו, ולא כאשר הוא חוצה קו שרירותי זה או אחר.[5]

לאחר שהצגנו את הבעיה ואת שתי הגישות ההלכתיות לפתרונה, נתבונן בסוגיה בעין מתמטית. בחלק הבא נסביר בקצרה את הרקע המתמטי הדרוש להסבר הסוגיה. לפיכך, בעלי ידע מתקדם במתמטיקה, ובעיקר בטופולוגיה, יכולים לעבור כעת לחלק השלישי.

חלק שני – רקע מתמטי

בחלק זה נסקור בקצרה כמה מושגים מתמטיים שישמשו אותנו בהמשך המאמר. כמובן, במסגרת זו אין באפשרותנו להגדיר בצורה מדויקת את כל המושגים הרלוונטיים. מטרתנו היא להסביר בקווים כלליים את העקרונות העומדים בבסיס ההגדרות, באופן שיאפשר לקורא להבין את עיקר טענתנו גם אם אינו בקי בכל הדקויות המתמטיות הנלוות להגדרות אלו.

מרחבים טופולוגיים ורציפות

כדי לנסח בשפה מתמטית את הבעיה של קביעת תאריך על פני כדור הארץ, יש צורך במושג מתמטי שיוכל לתאר את פני כדור הארץ עם קצת מתכונותיו הגאומטריות. המושג המתאים לצרכינו הוא מרחב טופולוגי. כאמור, לא נכתוב כאן את ההגדרה המדויקת של המושג אלא נסתפק בהסבר כללי. מרחב טופולוגי הוא אוסף של נקודות, שאליו מתלווה מידע נוסף המאפשר לנו לקבוע עבור כל נקודה במרחב מהן הנקודות הנמצאות בסביבתה הקרובה.

כמו בתחומים רבים במתמטיקה, לאחר שהגדרנו סוג מסוים של מרחב יש לעסוק בתכונותיהן של פונקציות בין שני מרחבים. נניח ש-X ו-Y הם שני מרחבים טופולוגיים. כאמור, מרחב טופולוגי הוא קודם כול אוסף של נקודות. לכן פונקציה f בין שני המרחבים האלה ($f{:}X{\to}Y$) היא קודם כול פונקציה בין שתי קבוצות, לפי ההגדרה המוכרת: לכל איבר $x\in X$ היא מתאימה איבר יחיד $f(x)\in Y$.

אולם X ו-Y – בהיותם מרחבים טופולוגיים – מכילים מידע נוסף, הקובע אילו נקודות נמצאות בסביבתן הקרובה של נקודות אחרות. טבעי לדרוש שהפונקציה f תכבד את המידע הנוסף הזה, ותעתיק סביבה מסוימת של כל נקודה x לתוך סביבתה הקרובה של הנקודה $f(x)$. פונקציה המקיימת תכונה זו נקראת פונקציה רציפה. את ההגדרה המדויקת של פונקציה רציפה לא נוכל להציג במסגרת זו, אך באופן כללי נוכל לומר שפונקציה רציפה עשויה למתוח או לכווץ

5 הרחבתי יותר בביאור השיטות ההלכתיות השונות במאמרי בעניין קו התאריך בתוך "עלון שבות בוגרים", עלון הבוגרים של ישיבת הר עציון, גיליון כא.

אזורים מסוימים במרחב, אך אף פעם לא לקרוע את המרחב ולהפריד בין אזורים צמודים.

המרחב הטופולוגי המרכזי שמעניין אותנו במאמר זה הוא פני כדור הארץ. אם נתעלם מהטופוגרפיה של פני כדור הארץ, מרחב זה הוא למעשה שפה של כדור תלת-ממדי, והוא נקרא ספֵרה דו-ממדית. כל נקודה על פני כדור הארץ היא נקודה במרחב, והמבנה הטופולוגי של המרחב מאפשר לנו לדעת אילו נקודות נמצאות בסביבתה של כל נקודה.

מכיוון שאנו עוסקים לא רק בגאוגרפיה אלא גם בזמן, מרחב נוסף שנעסוק בו הוא המעגל (הקו המקיף עיגול במישור), המייצג עבורנו שעון בן 24 שעות. כל נקודה על פני המעגל מייצגת שעה מסוימת ביממה. גם למרחב פשוט זה יש מבנה של מרחב טופולוגי, הקובע אילו רגעים ביממה נמצאים בסביבתו של כל רגע נתון (כלומר קצת לפני הרגע הזה או קצת אחריו). מקובל לסמן את המרחב הטופולוגי של המעגל ב-S^1. אולם בהקשר שלנו נסמן את המרחב הזה ב-B, מסיבה שתובהר להלן.

אנו מעוניינים להגדיר פונקציה f מהספֵרה הדו-ממדית, המייצגת את פני כדור הארץ, אל מרחב השעון B. לצורך כך "נקפיא" את כדור הארץ ברגע מסוים, למשל ברגע שבו השמש שוקעת בגריניץ'. כעת נגדיר שלכל נקודה x על פני כדור הארץ, $f(x)$ הוא מספר השעות שעברו מאז השקיעה האחרונה באותו מקום.

כאן המקום להסתייגות קלה. לא בכל נקודה על פני כדור הארץ אפשר להגדיר את הפונקציה f, כיוון שלא בכל מקום בכדור הארץ השמש שוקעת בכל יום. יש אזורים נרחבים מסביב לקטבים שבהם השמש מאירה ברציפות במשך חודשים ארוכים, ובחודשים אחרים שוררת שם חשכה. כדי להגדיר את הפונקציה f יש להצטמצם למרחב קטן יותר – פני כדור הארץ ללא אותן סביבות של הקטבים. נסמן מרחב זה ב-X. כעת, הפונקציה f שהגדרנו למעלה אכן מוגדרת היטב כפונקציה מ-X ל-B.[6]

איור 1: המרחב X

6 בפועל מקובל לקבוע את השעה במקומות שונים על פני כדור הארץ באמצעות מפת אזורי הזמן, שהיא למעשה מעין פונקציית מדרגות המקרבת את הפונקציה f שהגדרנו.

קל להשתכנע ש-f היא פונקציה רציפה. נבחר נקודה מסוימת $x_0 \in X$, למשל ירושלים. בשעה שהשמש שוקעת בגריניץ' עברו כבר כשעתיים מאז השקיעה בירושלים, ולכן $f(x_0)$ היא הנקודה על פני השעון המייצגת את אותן שעתיים. לכל נקודה אחרת $x \in X$ הנמצאת בסביבת ירושלים, מספר השעות שעברו מאז השקיעה יהיה קרוב ל-$f(x_0)$ ומכאן שפונקציה f אכן רציפה.

מרחבי כיסוי

נתון מרחב טופולוגי כלשהו Y. נניח ש-C הוא מרחב טופולוגי נוסף, ונתונה פונקציה רציפה $p{:}C \rightarrow Y$. לכל תת-קבוצה U של C, הפונקציה p מעתיקה את U אל תת-קבוצה של Y. תת-קבוצה זו נקראת התמונה של U תחת p, ומסומנת $p(U)$. כיוון ש-p רציפה, לכל נקודה $c \in C$ יש סביבה U שתמונתה מוכלת כולה בסביבתה של הנקודה $p(c)$.

מרחב כיסוי של Y הוא מרחב טופולוגי C עם פונקציה רציפה $p{:}C \rightarrow Y$, המקיימים את התכונה הבאה: לכל נקודה $c \in C$ יש סביבה U (כלומר תת קבוצה של נקודות הקרובות ל-c) שהפונקציה p יוצרת זהות מוחלטת בינה לבין תמונתה $p(U)$.[7] המרחב Y מכונה מרחב הבסיס, והפונקציה p היא **פונקציית הכיסוי**. מרחב הכיסוי כולו C איננו זהה (ברוב המקרים) למרחב הבסיס Y, ובדרך כלל לכל נקודה $y \in Y$ יהיו כמה נקודות ב-C המועתקות אליה על ידי פונקציית הכיסוי. אולם באופן מקומי לכל אחת מהנקודות האלה יש סביבה קרובה שהיא העתק מושלם של סביבת הנקודה y.

ההגדרה שכתבנו כאן, כמו ההגדרות הקודמות, אינה מדויקת לחלוטין מבחינה מתמטית, ובמבט ראשון אולי קצת קשה להבין מתוכה את משמעות המושג מרחב כיסוי. במקום להגדיר את המושג באופן מלא ומדויק, ננסה להמחיש את משמעותו באמצעות דוגמה. בסעיף הקודם הגדרנו את המרחב X, שהוא פני כדור הארץ למעט סביבה של שני הקטבים. באיור הבא ניתן לראות מרחב כיסוי של X, או ליתר דיוק חלק ממנו:

איור 2: מרחב כיסוי

באיור זה מופיעים שלושה עותקים של המרחב X. אך למעשה מרחב הכיסוי C שאותו אנו רוצים לתאר מכיל אינסוף עותקים של X, הממשיכים להתחבר זה לזה מימין ומשמאל כפי ששלושת החלקים שבתמונה מחוברים זה לזה. ברור מתוך הציור כיצד מוגדרת הפונקציה $p{:}C \rightarrow X$. כל נקודה c במרחב הכיסוי היא אחד מהעותקים של נקודה אחת ויחידה $x \in X$, ולכן נגדיר $p(c)=x$.

קל להשתכנע שהפונקציה p היא רציפה ומקיימת את התנאי שניסחנו בהגדרת מרחב כיסוי.

7 ליתר דיוק יש לומר שקילות טופולוגית במקום זהות, אך אין באפשרותנו להגדיר את המושג שקילות טופולוגית במסגרת זו.

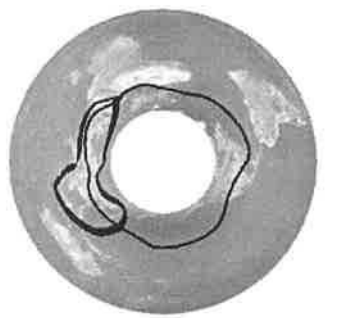
ואכן, ניקח לדוגמה את הנקודה x להיות ירושלים, ואת הנקודה c להיות אחד מהעותקים של ירושלים במרחב הכיסוי. אנו יכולים כעת לבחור סביבה של הנקודה c, למשל העותק של ארץ ישראל שבו נמצאת הנקודה c, והפונקציה p אכן יוצרת זהות מוחלטת בין סביבה זו לבין תמונתה, שהיא ארץ ישראל שבמרחב x.

הרמה של מסילות

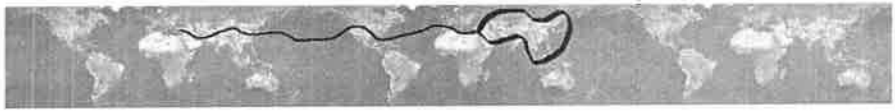
העובדה שמרחב הכיסוי דומה למרחב הבסיס באופן מקומי מאפשרת לקחת מסילות (מסלולים) במרחב הבסיס ו"להרים" אותן אל מרחב הכיסוי. נמחיש את העובדה הזו באמצעות מרחב הכיסוי שראינו בחלק הקודם.

נניח שנתונה מסילה מסוימת על פני כדור הארץ – למשל מסלול הנסיעה של אדם שיוצא מירושלים, נוסע ברחבי יבשת אסיה ובסופו של דבר חוזר לירושלים. נבחר עותק מסוים c_0 של ירושלים במרחב הכיסוי. הסביבה הקרובה של ירושלים זהה לחלוטין לסביבתה הקרובה של הנקודה c_0. לכן לקטע הראשון של המסלול הנמצא בתוך סביבה זו יש העתק אחד ויחיד המתחיל ב-c_0 בתוך מרחב הכיסוי. באופן זה אפשר להמשיך ולבנות העתק של קטעים נוספים מתוך המסילה, ובסופו של דבר נקבל העתק של המסילה כולה במרחב הכיסוי. העתק זה נקרא הרמה של המסילה אל מרחב הכיסוי. במקרה שאותו תיארנו, ההרמה של המסילה מתחילה בנקודה c_0 וגם מסתיימת בה.

כעת נתבונן במסילה אחרת, המשקפת את מסלול הנסיעה של אדם היוצא מירושלים, מקיף את כדור הארץ בכיוון מערב וחוזר לירושלים. בדיוק כמו בדוגמה הקודמת, גם למסילה זו יש הרמה יחידה אל מרחב הכיסוי המתחילה בנקודה c_0. אולם בשונה מהדוגמה הקודמת, הרמה זו אינה מסתיימת בנקודה c_0, אלא בעותק אחר של ירושלים, שאותו נסמן ב-c_1. באיורים הבאים אפשר לראות את שתי המסילות במרחב X, ואת ההרמות שלהן אל מרחב הכיסוי:



איור 3: שתי מסילות היוצאות מירושלים וחוזרות אליה



איור 4: ההרמה של שתי המסילות אל מרחב הכיסוי

שתי המסילות שתיארנו במרחב X הן מסילות סגורות, כלומר מסילות המסתיימות באותה נקודה שבה הן התחילו. אולם יש הבדל ביניהן. את המסילה הראשונה אפשר לכווץ באופן רציף לנקודה אחת. אם נדמיין שהמסילה היא גומייה, מי שעומד בירושלים יכול למשוך אליו את הגומייה עד שכולה תתקפל אל המקום שבו הוא עומד. מסילה כזו נקראת מסילה כוויצה. כפי שניתן לראות באיור, ההרמה של מסילה כזו גם היא מסילה סגורה, המסתיימת באותו מקום שבו היא מתחילה.

לעומת זאת, את המסילה השנייה לא ניתן לכווץ באופן רציף אל נקודת ההתחלה. כל ניסיון לכווץ את המסילה יגרום לה בהכרח לעבור דרך אחד מהקטבים, ואילו אנו הגדרנו את המרחב X להיות פני כדור הארץ ללא הקטבים וסביבתם. ההרמה של מסילה כזו איננה מסילה סגורה, אלא היא מתחילה בעותק אחד של ירושלים ומסתיימת בעותק אחר.

לסיום החלק הזה נזכיר הגדרה נוספת. מרחב טופולוגי נקרא פָּשוּט קשר אם כל מסילה סגורה בתוכו היא מסילה כוויצה. כפי שראינו, המרחב X איננו פשוט קשר – יש בו מסילות שאי אפשר לכווץ אותן לנקודה. לעומת זאת, מרחב הכיסוי C הוא פשוט קשר. משום כך, אם נבחר מסילה שאיננה כוויצה ב-X, ההרמה שלה אל C לא תוכל להישאר מסילה סגורה.

המושגים שהגדרנו בחלק זה מאפשרים לנו לעבור לחלק השלישי, שבו נשתמש בכלים המתמטיים האלה כדי להסביר את סוגיית קו התאריך. הדוגמאות שהבאנו בחלק זה נועדו קודם כל להמחשת המושגים, אך כמובן הן גם רלוונטיות מאוד לנושא המאמר. מכל מקום, בחלק הבא לא נסתמך על הדוגמאות שהבאנו כאן, אלא נגדיר מחדש בקצרה את כל המרחבים שבהם נעסוק.

כדי למנוע בלבול, נציין שבניסוח שיופיע בחלק השלישי בחרנו שלא להזדקק למרחב הכיסוי C שאותו ראינו כאן. במקום זאת ניעזר במרחב כיסוי אחר, אבסטרקטי יותר: קו ישר אינסופי, המהווה מרחב כיסוי לשעון המעגלי B.

חלק שלישי – תיאור מתמטי של סוגיית קו התאריך

בחלק זה נשתמש בכלים מתמטיים מתחום הטופולוגיה כדי להסביר את הבעיה בקביעת תאריכים על פני כדור הארץ ואת הפתרונות השונים. פני כדור הארץ הם סְפֵרָה דו-ממדית. לא בכל מקום בכדור הארץ ניתן להגדיר את המושגים יום ולילה. ישנה סביבה של הקטבים המוארת באור השמש, או לחלופין מוסתרת מפני השמש, למשך ימים ארוכים ברציפות. נסמן ב-X את פני כדור הארץ למעט אותן סביבות של הקטבים. כמו כן נסמן ב-B את המעגל S^1 המייצג שעון מחזורי של 24 שעות. לצורך העניין נבחר בנקודה העליונה במעגל לייצג את השעה 0:00, והמעגל כולו יחולק ל-24 חלקים שווים, כאשר כיוון ההתקדמות הוא עם כיוון השעון.

העובדה שבמקומות שונים בכדור הארץ היום והלילה מתחילים בזמנים שונים ניתנת לביטוי

מתמטי על ידי פונקציה $f{:}X{\to}B$. נבחר כנקודת ייחוס מקום מסוים על פני כדור הארץ, למשל גריניץ', ונתבונן בכדור הארץ ברגע שבו השמש שוקעת בגריניץ'. לכל נקודה $x{\in}X$, $f(x)$ הוא הנקודה ב-B המייצגת את השעה בנקודה x בזמן השקיעה בגריניץ', או ליתר דיוק, את מספר השעות שעברו באותו מקום מאז השקיעה האחרונה. הפונקציה f מוגדרת היטב ורציפה בכל המרחב X, כלומר בכל מקום בכדור הארץ שיש בו יום ולילה.

נסמן ב-E קו ישר אינסופי, המייצג עבורנו ציר זמן אינסופי המחולק לימים בני 24 שעות (בחירה זו נעשתה לשם הנוחות בלבד, מבלי להתייחס לשאלה אם הזמן הוא אכן אינסופי). אין חשיבות לשאלה איזה לוח שנה אנו בוחרים, כל עוד נתון שלכל יום על פני ציר הזמן הזה יש תאריך ייחודי משלו. המרחב E הוא מרחב פשוט קשר.

קיימת פונקציה רציפה $p{:}E{\to}B$ שלכל נקודה $t{\in}E$ על ציר הזמן מחזירה את השעה ביממה של אותה נקודה בזמן, ושוכחת את התאריך. לא קשה להשתכנע שהזוג (E,p) הוא מרחב כיסוי של B. לכל נקודה $b{\in}B$, כלומר לכל שעה על פני היממה, יש אינסוף עותקים בישר האינסופי – עותק אחד בכל יום. נניח ש-$t{\in}E$ הוא עותק כזה, כלומר הוא מקיים $p(t){=}b$. אזי יש סביבה של הנקודה t, למשל הקטע המתחיל שעה לפני t ומסתיים שעה אחריו, המזוהה לחלוטין עם אותו פרק זמן בסביבתה של הנקודה b במרחב המעגלי B (משום כך בחרנו לסמן את מרחב המעגל ב-B, כקיצור של Base- מרחב הבסיס של מרחב הכיסוי).

כל קביעה של תאריכים על פני כדור הארץ מיוצגת על ידי פונקציה $h{:}X{\to}E$, באופן דומה לפונקציה f הנ"ל המגדירה את השעות בתוך היממה על פני כדור הארץ. אם נעצור את הזמן ברגע מסוים, הפונצקיה h תחזיר לכל נקודה על פני כדור הארץ את התאריך והשעה המדויקים באותו מקום על פני ציר הזמן האינסופי.

מבחינה תיאורטית ניתן היה לקבל כל פונקציה h כנ"ל כפונקציה הקובעת את התאריכים על פני כדור הארץ. אולם בפועל אנו מעוניינים שפונקציה זו תקיים דרישות נוספות. ראשית, אנו מעוניינים שקביעת התאריך תתחשב בשעון המקומי, הנקבע על פי זמני היום והלילה שבכל מקום. בניסוח מתמטי, אנו דורשים שיתקיים לכל נקודה $x{\in}X$ על פני כדור הארץ:

$$f(x) = p(h(x))$$

שנית, אנו מעוניינים שהפונקציה h תהיה רציפה, כדי שלא נצטרך לבצע שינויים גדולים מדיי בתאריך בתנועות קטנות על פני כדור הארץ. את שתי הדרישות האלה אפשר לתאר באמצעות הדיאגרמה הבאה, הכוללת את כל המרחבים שהגדרנו, את הפונקציות הרציפות ביניהם ואת היחסים שאמורים להתקיים בין אותן פונקציות:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

אם קיימת פונקציה h המקיימת את התכונות הנ"ל אומרים שהפונקציה h היא הרמה של הפונקציה f אל מרחב הכיסוי (E,p). הרמה כזו הייתה עשויה להסדיר את קביעת התאריכים על פני כדור הארץ, אך בפועל היא אינה קיימת. ההוכחה שהרמה כזו אינה קיימת מבוססת על משפט כללי בתורה של מרחבי כיסוי, שאותו לא נוכל להסביר במסגרת זו.[8] במקום זאת נכתוב הוכחה המתאימה אך ורק למקרה הפשוט שבו אנו עוסקים.

נניח בשלילה שקיימת הרמה h כנ"ל. ניקח מסילה לא כוויצה כלשהי γ במרחב X, למשל מסילה המקיפה פעם אחת את כדור הארץ, וננסה להבין מהי התמונה של מסילה זו במרחב B. מצד אחד, אם נעתיק את המסילה γ ישירות אל B באמצעות הפונקציה f, קל לראות שהתמונה שלה $f(\gamma)$ גם היא מסילה לא כוויצה.

מצד שני, את אותה תמונה אפשר לתאר גם על ידי הרכבה של שתי פונקציות – ההרמה h אל מרחב הכיסוי, ופונקציית הכיסוי p. התמונה $h(\gamma)$ במרחב הכיסוי E היא בהכרח מסילה כוויצה, כיוון ש-E הוא מרחב פשוט קשר. כעת, התמונה של מסילה זו במרחב הבסיס B חייבת להיות גם היא כוויצה. הסיבה לכך פשוטה: אם יש דרך לכווץ את המסילה $h(\gamma)$ לנקודה בתוך המרחב E, אזי על ידי שימוש בפונקציה p נוכל לקבל כיווץ של התמונה $p(h(\gamma))$ לנקודה בתוך המרחב B. אבל על פי האופן שבו בחרנו את הפונקציה h מתקיים $p(h(\gamma)) = f(\gamma)$, והגענו לסתירה. מכאן שלא קיימת הרמה h כנ"ל, כלומר אין דרך לקבוע תאריכים על פני כדור הארץ באופן רציף התואם את השעון המקומי בכל מקום.

ההבדל המתמטי בין הפתרונות השונים

כדי לפתור את הבעיה יש לוותר על חלק מהדרישות ביחס לפונקציה h. אמנם אין אפשרות להגדיר את הפונקציה h על פני כל המרחב X, אך ניתן להגדירה על פני כל תת-מרחב פשוט קשר של X. אם נמתח קו כלשהו l מהקוטב הצפוני אל הקוטב הדרומי, הרי שהמרחב $X \setminus l$ הוא מרחב פשוט קשר, ואפשר להגדיר עליו הרמה של הפונקציה f אל מרחב הכיסוי. קו התאריך הבינלאומי הוא אחת הבחירות האפשרויות לקו l הנ"ל.

מבחינה מעשית אין כל צורך להגדיר את ההרמה h גם על פני הקו l עצמו, כיוון שאין לו עובי. במסגרת הדיון המתמטי, אם נרצה להרחיב את ההרמה h גם אל הישר, נקבל בהכרח פונקציה שאינה רציפה, כיוון שהערכים שמקבלת הפונקציה h בסביבתו הקרובה של הקו מכיוון מזרח רחוקים מאוד מהערכים שהיא מקבלת בסביבתו המערבית של הקו. חוסר הרציפות הזה בא לידי ביטוי בשינוי התאריך שצריך לבצע מי שחוצה את קו התאריך.

כפי שראינו בחלק הראשון, רוב הפוסקים אימצו את הגישה הזו לפתרון הבעיה, ובחרו בקו תאריך זה או אחר החותך את המרחב X והופך אותו לפשוט קשר. המחלוקת בין הפוסקים האלה היא רק בשאלה היכן יש למקם את אותו קו, כאשר העיקרון המנחה הוא השאיפה למקם את

8 ההוכחה המבוססת על המשפט הכללי היא זו: התנאי לקיום ההרמה h הוא $f_*(\pi_1(X)) \subseteq p_*(\pi_1(E))$. במקרה שלנו תנאי זה אינו מתקיים כיוון ש-$\pi_1(X) = Z$ והוא מועתק באופן איזומורפי אל $\pi_1(B) = Z$, ואילו $\pi_1(E)$ היא החבורה הטריוויאלית.

ירושלים עד כמה שאפשר במרכז התחום פשוט הקשר.

הרב כשר חלק על הגישה הזו. לפי שיטתו, כיוון שבכל מקרה אין אפשרות להגדיר את ההרמה h על פני כל המרחב X – אנו מוותרים מראש על השאיפה להגדיר הרמה כזו, ואיננו מנסים להגדירה אפילו על פני תת-מרחב. במקום זאת, כל אדם שנע על פני כדור הארץ מגדיר לעצמו באופן אישי הרמה על פני המסילה שלאורכה הוא מתקדם.

ניקח לדוגמה אדם היוצא מירושלים, מקיף את כדור הארץ בכיוון מערב וחוזר לנקודת המוצא. תנועתו של אדם זה מגדירה מסילה במרחב X. הפונקציה f שולחת את המסילה הזו למסילה במרחב B – מסילה המתחילה בנקודה מסוימת $b \in B$, מקיפה את המעגל פעם אחת עם כיוון השעון וחוזרת לנקודת המוצא.

יש להזכיר שהפונקציה f אינה מייצגת את השעה שיראה אותו מטייל בפועל בשעונו במהלך הטיול. כדי להגדיר את הפונקציה f "הקפאנו" את כדור הארץ ברגע שבו חלה השקיעה בגריניץ'. המסילה שקיבלנו במרחב B מייצגת את הפרשי השעות בין שעון גריניץ' לבין השעון המקומי בכל מקום שאליו מגיע המטייל. כאשר הטיול מסתיים והאדם חוזר לירושלים, הפרשי השעות בינו לבין שעון גריניץ' חוזרים להיות כפי שהיו כשיצא לדרכו. המסילה שקיבלנו במרחב B היא אם כן מסילה סגורה, אך לא כוויצה.

אנו מעוניינים כעת להרים את המסילה הזו למרחב הכיסוי E. לשם כך יש צורך לבחור בנקודת התחלה כלשהי על פני ציר הזמן האינסופי - נקודה $t_0 \in E$ המקיימת $p(t_0) = b$. ההרמה של המסילה אל מרחב הכיסוי לא תסתיים באותה נקודה, אלא היא תחלוף על פני יום שלם ותסתיים בנקודה אחרת t_1, שגם היא מקיימת $p(t_1) = b$. התיאור המתמטי הזה משקף אתהעובדה שכאשר אדם מקיף את כדור הארץ הוא צובר פער של יום שלם בין התאריך שלו לתאריך של אנשי המקום, אף על פי שהוא חוזר לנקודת המוצא.

כפי שראינו, לדעת הרב כשר אין בעיה עקרונית בקיומו של הפער הזה. במקרה שהאדם מגיע למקום יישוב, עליו לזנוח את החשבון האישי שלו – את ההרמה של f שנקבעה לאורך המסילה הפרטית שלו – ולהצטרף למניין של אנשי המקום. אך גם המניין של אנשי המקום איננו מוחלט וקבוע מששת ימי בראשית. המניין הזה נקבע לפי המסלול שבו הגיעו לאותו מקום ראשוני המתיישבים. כך למשל, מניין הימים ביבשת אמריקה נקבע על פי כיוון ההגעה של קולומבוס והבאים אחריו, שהיה ממזרח למערב. זוהי הסיבה לכך שמקובל כיום למקם את קו התאריך באוקיינוס השקט. אילו ראשוני המתיישבים היו מגיעים לאמריקה מכיוון מערב, מניין הימים שם היה שונה מהמקובל בימינו, ובהתאם לכך היו קובעים בסופו של דבר את קו התאריך באוקיינוס האטלנטי.

מרכזיותה של ירושלים

הניסוח המתמטי של השיטות השונות מאיר באור חדש גם את ההבדל שיש בין השיטות בנוגע למרכזיותה של ירושלים. לפי שיטת רוב הפוסקים, התאריך אינו מוגדר על פני כל המרחב X, אלא רק על פני תת-מרחב פשוט קשר. ניתן לפרוס את תת המרחב הזה ולקבל משטח עם

קצוות במזרח ובמערב. במסגרת השיטה הזו, טבעי לדרוש שירושלים תהיה במרכז המשטח הזה, בנקודה הרחוקה ביותר מהמזרח ומהמערב, כפי שכתב ריה״ל.

לעומת זאת, לפי שיטת הרב כשר המרחב X נותר כפי שהוא, ואין צורך לחתוך אותו או להצטמצם לתת-מרחב. מבחינה גיאומטרית אין שום אפשרות למצוא נקודה שתהיה המרכז של המרחב X בציר מזרח-מערב. הרב כשר היה מודע לעובדה זו, והוא מציין שהקביעה שירושלים היא מרכז העולם איננה קביעה גיאוגרפית אלא קביעה רוחנית. מרכזיות זו אינה אמורה בהכרח לבוא לידי ביטוי בסוגיית קו התאריך.

עם זאת, נראה שמרכזיותה של ירושלים, ושל ארץ ישראל כולה, אכן באה לידי ביטוי גם בסוגייתנו. אמנם ארץ ישראל וירושלים אינן נמצאות במרכז העולם מבחינה גיאוגרפית. אך מושג השבת הגיע לעולם מארץ ישראל. עצם הרעיון לקיים שבוע בן שבעה ימים התחיל כאן, ומכאן התפשט לעולם כולו. אנשים שהכירו את מושג השבוע ויצאו למקומות חדשים שבהם מושג זה לא היה מוכר – הם שקבעו את מניין הימים באותו מקום. קו התאריך הבין-לאומי משקף את התהליך ההיסטורי של התפשטות מושג השבת בעולם, ומזכיר לנו היכן נמצא המוקד שבו נוצר המושג הזה – כאן בארץ ישראל ובירושלים.