

אברהם קרסנטי

מקור האסתטיקה וסדרת פיבונאצ'י באגדות התלמוד

מאמר זה עוסק במימרות של חז"ל המצביעות על קשר בין האדם לסביבתו ולמהותו נכנה אותן קביעות. בסוף מסכת ברכות (נז, ב) מוצגת קביעה כזו העוסקת בדעתו של אדם: "שלושה מרחיבין דעתו של אדם: דירה נאה ואשה נאה וכלים נאים". נוסף על לימוד המפרשים, נסביר את הסוגיה לפי הקבוע מתמטי ϕ המכונה "מספר הזהב". "הפרפורציה הא-לוהית" הזו, כפי שמוכרת באומות העולם, מתגלה כחותמת א-לוהית בגדלים רבים בטבע ובגוף האדם. חוקרים רואים בעצם קיומו הוכחה שהעולם נבדא באופן מתוכנן. בעוד שבאומות העולם הוא מופיע באמנות ובאדריכלות, הרי שבתורה הוא מופיע בתיבת נוח, כלי המשכן, והר הבית. המאמר סוקר רשימה רחבה של גילויי ϕ בסביבת האדם, במקורות תורניים ומדעיים, ומציג שלושה גילויים: (א) ניתן להסביר מימרת חז"ל זו גם לפי המדע. (ב) מספר הזהב המתפרסם 2500 שנה בספרות החיצונית, מופיע בתורה שבכתב ושבעל פה. (ג) מעבר לכינויים השונים להם זכה המושג לאורך ההיסטוריה, קושי גילוי של ϕ בתורה נובע מהבדלי הגישה שבין היהדות לאומות העולם ביחס לאסתטיקה.

1. ניתוח סוגית התלמוד בעזרת האמונה

1.1 אגדות התלמוד כבסיס לגילוי אחדות ה' באמונה ובמדע

אם ננסה לקטלג את סוגיות התלמוד נמצא שישנם ארבעה סוגים עיקריים של סוגיות, ההולכות ומתחברות בלמידה אסוציאטיבית (associative learning) וברוך חינוכית: (1) דיונים הלכתיים, אותם סיכמו רבינא ורב אשי מתוך מגמת קביעת ההלכה בדרך חינוכית לדורות.¹ (2) אגדות ומדרשי חז"ל על דמויות מן התנ"ך ועל רבותינו התנאים והאמוראים. (3) סוגיות מדעיות או חישוביות בתחומים מגוונים. (4) אמירות כלליות, בדרך כלל מספריות, המתחברות את האדם לסביבתו ולמהותו, אותן נכנה "קביעות". מימרות מספריות אלה מופיעות הרבה בתלמוד, ובעיקר במסכת ברכות. למשל: "תניא רשב"י אומר שלוש מתנות טובות נתן הקב"ה לישראל, וכולם לא

1 אילו רצו רבינא ורב אשי היו כותבים גמרא מצומצמת כסגנון הרי"ף או כסגנון השולחן ערוך, כלומר הלכה פסוקה נשו ללא דיונים. כותב הרמב"ם בהקדמה לפירוש המשנה: "... והתבודד רב אשי לחבר את התלמוד.... וכלל כל דברי המדרשים ושכל המחבונים, ופירוש המפרשים ודקדוק ההלכות... ונעשו דבר זה לעניינים נפלאים, האחד מהם, ללשוש דיעוני התלמידים וללבב לבותם..."

נתנם כי אם ע"י יסורין ואלו הן: תורה, וא"י ועולם הבא,² או "חמישה אחד מששים, אלו הן: אש דבש ושבת ושניה וחלום",³ או "שלושה נכנסין לגוף ואין הגוף נהגה מהן: גודרניות וכפניות ופגי תמרה..."⁴ וכדומה להן.

1.2 אגדה עם פירוש חז"ל

פרק הרואה ממסכת ברכות,⁵ עוסק בעניין ברכות, לא בכרכות הנהנין, או בכרכות המצוות, אלא בעיקר בכרכות ההודיה, שאדם מודה לה' כאשר הוא מוצא את עצמו במקום או במציאות "חריגה". בין המצבים החריגים, ניתן למצוא רשימה ארוכה של מצבי ראייה, בהם נדרש האדם לברך ולהודות לה', כגון במקום שנעשה לו נס,⁶ במפגש עם תופעות טבע⁷ הרורשות התייחסות, במפגש עם מקום⁸ אשר ראייתו משפיעה עליו, או בחלומות מיוחדים שאדם חולם (ראיה מסוג אחר). נמו כן מדריכה אותנו הגמרא בכל מיני אמירות כלליות, הדרכות מידותיות, מוסריות, ומספריות. בין הקביעות המוזכרות, נמצא את האמירה הבאה:

...שלושה מרחיבין דעתו של אדם: דירה נאה, ואשה נאה וכלים נאים.¹⁰

המימרה כפשוטה מציגה מסר חיובי – כל אחד משלושת הדברים שצוינו עשוי לגרום נחת לאדם. בהיותו מתרגש מהיזפי העומד מול עיניו, מתרחבת דעתו. אלא שכמו בכל אגדה בתלמוד, יש להבין את הדיוק ואת העומק, את הכמות ואת האיכות: שלוש סביבות בהן חי האדם משפיעות עליו: מקרקעין, משפחה, ומטלטלין. היופי יכול להתגלות בכל אחת מהן, ולכן שלושה אלה בלבד המהווים את עולמו מרחיבין את דעתו של אדם. מרחיבין ולא מרוממין או מעליין¹¹ את האדם כפי שנראה בדברי המפרשים להלן. ההתייחסות המרכזית מכוונת לאדם ולדעתו, שהרי האדם ניחן בדעת "אתה חונן לאדם דעת".¹²

1.3 הרחבת הנפש או הרחבת הנפש? – מהרש"א ורש"י

הצטברות השאלות הנשארות ללא מענה בפשט הגמרא,¹³ מחייבת לפנות אל המפרשים, וכמיוחד

2 תלמוד בבלי, ברכות ה, א.

3 תלמוד בבלי, ברכות נו, ב.

4 תלמוד בבלי, ברכות נו, ב.

5 פרק תשיעי ואחרון של ברכות, מתחיל במשנה "הרואה".

6 תלמוד בבלי, ברכות נד, א.

7 שם במשנה: "... על הברקים אומר ברוך שכחו וגבורתי מלא עולם..."

8 שם במשנה: "... על ההרים ועל הגבעות ועל הימים ועל הנהרות ועל המדברות אומר ברוך עושה בראשית..."

9 שם בגמרא, נה, א - נו, ב.

10 תלמוד בבלי, ברכות נו, ב.

11 תלמוד בבלי, מסכת שבת כא, ב: "...רמעלין בקדש ואין מורידין..."

12 תפילת שמונה עשרה, ברכת הרעת.

13 (1) למה שלושה בלבד מרחיבין את דעתו של אדם? (2) ולמה דווקא אלה? (3) ואם אלה דווקא, סימן שיש

ביניהם משותף. ומהו המשותף שבהם? (4) למה "מרחיבין" דעתו, ולא "מרוממים" או "מעליין" את האדם,

אל המהרש"א. בהבנתו את הסוגיה הוא מפתיע¹⁴ ומציג את קביעת חז"ל כאזהרה מפני המטריאליזם:

שלשה משיבין דעתו כו' ושלשה מרחיבין כו'. ר"ל משיבין דעתו אם הוא דואג, וביגון משיבין ומסירין האנחה ממנו ומרחיבין כו' היינו שיהיה דעתו ונפשו רחבה למיהדר אחר תענוגי עוה"ו כמ"ש בכלעם ונפשו רחבה וק"ל.

לדעת המהרש"א, האמירה שחשבנו חיובית ומרוממת מתגלה עתה כאזהרה לאדם המטריאליסטי, העלול לדרוך ("למיהדר") אחרי רכוש, כדי להרחיב את ממונו. הוא לומד זאת מפסוק בספר במדבר, בו מתגלה בלעם הרשע כאדם שפל וגאווה הרודה אחרי ממון: "וַיַּעַן בְּלַעַם וַיֹּאמֶר אֶל עֲבָדֵי בְלָק אִם יִתֶּן לִי בְלָק מְלֵא בֵיתוֹ כֶּסֶף וְזָהָב לֹא אוֹכַל לַעֲבֹד אֶת פִּי ה' אֱלֹהֵי לַעֲשׂוֹת קְטָנָה אוֹ גְדוֹלָה.¹⁵ רש"י לומר מתשובתו של בלעם על תכונת נפשו: "מלא ביתו כסף וזהב: למדנו שנפשו רחבה ומחמד ממון אחרים. אמר ראוי לו ליתן לי כל כסף וזהב שלו, שהרי צריך לשכור חיילות רבות, ספק נוצח ספק אינו נוצח, ואני ודאי נוצח".¹⁶

משחק המילים והחלפת סדר האותיות הינם התשובה לשאלה הרביעית:¹⁷ "...שלשה מרחיבין דעתו של אדם: דירה נאה, ואשה נאה וכלים נאים": מי שיזכה לשלושתם, מצב רוחו יהיה מרומם, והם ירחיבו את דעתו. אבל מי שיחפש רק את הנאה ואת היפה, ללא חיבור לתוכן פנימי, הם יחריבו את דעתו, מלשון חורבן!

1.4 דואליות היחס לאסתטיקה – הראי"ה קוק

לעומת האזהרה החרד-משמעת עפ"י פירוש המהרש"א,¹⁸ הראי"ה מציג גישה של דואליות ביחס לאסתטיקה, שמאחוריה עומדים כמה עקרונות: א) לאדם נדרשת מוכנות מידותית כדי לספוג את היופי ללא נזק.¹⁹ ב) השתלמות האדם להיות טוב יותר תלויה ברכישת ה"קנינים הכלליים"²⁰ (החינוך הכללי שהוא רוכש בחייו), וה"קנינים הפרטיים" שלו (התובנות האישיות והעבודה העצמית על מידותיו). ג) יסוד הצלחת האדם תלויה בידיעתו שאושרו יימצא תמיד בקרבו ולא בחיצוניות.²¹

14 כ"טעמא רבית הלל דמעלין בקדש ואין מורדין? (5) למה "דעתו" ולא "נפשו"? מה כאן קשור למושג הרעתו? מהרש"א, חירושי הלכות ואגרות, מסכת ברכות, עמוד 21.

15 במדבר כב, יח.

16 רש"י שם, ד"ה מלוא ביתו כסף וזהב.

17 ראה הערה 13.

18 מהרש"א, חירושי הלכות ואגרות, מסכת ברכות, עמוד 21.

19 הראי"ה, מאמרי הראי"ה א', פסקה ד, עמוד 213. למרות שפירוש זה מופיע בסוף מאמרי הראי"ה א', בחלק של עין אי"ה, הרי שמקור הרבדים מופיע בקובץ "נתיבה" שנה ה' הוב' ז' . י"א-י"ב, תר"ץ. נראה כי הם דברים בעל פה ששוכחו, והם קצת שונים ממה שכתוב בעין אי"ה עצמו.

20 הראי"ה, עין אי"ה ברכות ב', קיא, 297.

21 הראי"ה, עין אי"ה, שבת ב', פסקה ט, עמוד 11.

1.5 כלים ושפות לניתוח "קביעות" התלמוד

על הפסוק "ויהי כל הארץ שפה אחת ודבָרִים אֶחָדִים"²², נהג לומר הרב אשכנזי זצ"ל:²³ "המושג שפה אחת מכיל כפילות, שכן הקב"ה ברא גם את השמים וגם את הארץ, גם את רוח וגם את החומר: השפה האחת בתחום הקרושה, השפה העוסקת ברוח, היא לשון העברית של לשון הקודש. השפה האחת בתחום החומר גם היא שפת הבורא... היא שפת המתמטיקה".

שתי שפות משמשות בבריאה ושתיהן שפות ה': (1) בעניינים הרוחניים, האמוניים והמידותיים, השפה העברית היא שפת התורה והיא מתמקרת באדם. (2) בענייני הטבע, השפה המתמטית היא שפת התורה והיא עוסקת בחומר. נבחן עתה מחדש בעזרת כלי המתמטיקה את הסוגיה שבמסנת ברכות. כדי לעשות זאת כראוי, עלינו להכיר מספר מיוחד (φ) שתכונותיו תאפשרנה להסביר את אותה קביעת חז"ל מעבר לעומק האמוני הפשוט.

2. ניתוח סוגית התלמוד בעזרת המתמטיקה

2.1 ייחודיותם ומשמעותם של מספרים

בספרות החיצונית ובמקורות חז"ל יש מספרים מיוחדים, שחז"ל משייכים להם תכונות ותפקידים מיוחדים בעולם. כך למשל המספר 8, עפ"י המהר"ל²⁴ מסמן את כל מה שמעל הטבע, בעוד שמספר 7, החוזר אין-ספור פעמים בתורה, מסמל את הטבע ומחזוריותו, במעשה בראשית,²⁵ בספירת העומר,²⁶ בספירת שנות השמיטה²⁷ ועוד. כמו כן למספר 10, המשמש למניין וכן לבטיס עשרוני מוסכם, נודעה משמעות כפי שהסביר רבי יהודה הלוי בספר הכוזרי.²⁸ המספר פאי (π), מתגלה בחלק מסוגיות התלמוד.²⁹ ספר היצירה הקדום והמיוחס לאברהם אבינו מזכיר כי העולם נברא ב"לב" (32) נתיבות,³⁰ שהם עשר ספירות וכ"ב אותיות, כמוזכר בפיוט בר יוחאי.³¹ וערך קרוב למספר "איי" – כסיס הלוגריתמים (e=2.71828) נלמד מתוך דברי חז"ל בסוגיית "עישורייתא דבי רבי".³²

22 בראשית יא, א.

23 הרב יהודה אשכנזי ("מניטור") זצ"ל, רברים שבעל פה.

24 המהר"ל, תפארת ישראל, פרק שני: "וכן כל דבר שהוא על הטבע והוא תיקון מה שחסר הטבע הוא אחר השבעה..."

25 בראשית ב, ב: "וַיְבַל אֱ-לֹהִים בַּיּוֹם הַשְּׁבִיעִי מְלֶאכֶתוֹ אֲשֶׁר עָשָׂה וַיִּשְׁבַּת בַּיּוֹם הַשְּׁבִיעִי מִכָּל מְלֶאכֶתוֹ אֲשֶׁר עָשָׂה."

26 דבויים טז, ט: "שְׁבַע שָׁבַעַת הַסֵּפֶר לָךְ מִהַחֵל חֲרַמְשׁ בְּקִמָּה תַחֵל לִסְפֹר שְׁבַעַת שְׁבַעוֹת."

27 שמות כג, יא: "וְהַשְּׁבִיעִת הַשְּׁמִטָּה וַיִּנְטָשְׁתָּהּ וְאָכְלוּ אֲבִלְיָ עִמָּךְ וַיִּתְרַם הָאֵבֶל חַיַּת הַשָּׂדֶה..."

28 רבי יהודה הלוי, ספר הכוזרי, מאמר ראשון, פסקה נח-נט.

29 תלמוד בבלי, מסכת עירובין יד, א: "כל שיש בהיקפו ג' טפחים יש בו רחב טפח..."

30 ספר היצירה פ"א, משנה א: "בשלישים ושתיים נתיבות פליאות חכמה חקק י-ה ה' צבאות אלהי ישראל... עולמו".

31 פיוט בר יוחאי: "... לֵב (שְׁלִשִׁים וּשְׁתַּיִם) נְתִיבוֹת רֵאשִׁית תְּרוּמָה אֶת קְרוֹב מְמִשָּׁה זֵיו אֲוָרָךְ ...".

32 תלמוד בבלי, מסכת כתובות סח, א: "והתניא רבי אומר בת הניזונת מן האחין נוטלת עישור נכסים ואמר רבא הלכתא כרבי".

2.2 מספר הזהב

מספר הזהב הינו מספר מיוחד המובא רבות בספרות החיצונית כבר מלפני כ-2500 שנה, תחת שמות וכינויים שונים לפי התקופות השונות ולפי החוקרים השונים. כך בסקירה היסטורית רחבה נמצא את הכינויים הבאים: מספר הזהב,³³ יחס הזהב (Euclid),³⁴ חֶתֶךְ הָהָב (Ohm),³⁵ הפרופורציה האלוהית (Pacioli),³⁶ התְּכָשִׁיט הִיקָר (Kepler)³⁷ או ϕ (Barr) Phi,³⁸ מספרי פיבונאצ'י (Lucas),³⁹ יחס בעל אמצעי ושתי קצוות (רבי יוסף אלבו),⁴⁰ החתוך-הא-לוהי (רבי שם טוב גפן)⁴¹ ועוד. מדובר במספר אי-רציונאלי, המהווה פתרון חיובי למשוואה (1), וערכו שואף ל-1.6 כמוצג במשוואה (2):

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (1)$$

$$\phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1/618033988... \quad (2)$$

לפי החוקר הצרפתי למבינה (Lambinet)⁴² אשר ברק את היסטוריית גילויי הופעותיו של מספר ϕ , מציאת מספר הזהב התחילה מדיון פילוסופי לחלוטין: "איך לחלק את 'השלם' לשני חלקים ועדיין לשמור על יופי והרמוניה?" אם נתבונן בחלוקת הקו $a + b$, הנטייה הטבעית תהיה לחלק את הקו לשני חלקים שווים. המשך חקירת הפיתוח הביאה את המתמטיקאים ליחס אחר כך שמספר הזהב הוא המספר המקיים את המשוואה (3):

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \quad (3)$$

P. Hemenway, *Divine Proportion: Phi in Art, Nature, and Science* (NY: Sterling, 2005). pp. 20-21

Euclid, *Elements*, Book 6, Definition 3

D. Underwood, *Die Macht der Zahl: Was die Numerologie uns weismachen will* (Springer, 1999) p. 245. שם הוא מביא כי אהם (1872-1792, Ohm) נחשב לראשון אשר השתמש בביטוי "חֶתֶךְ" או "חלק" בשפה הגרמנית "goldener Schnitt": המתורגם באנגלית לביטוי "golden section".

לוקה פאצ'ולי (Pacioli Luca, 1557-1499), מתמטיקאי איטלקי מתקופת הרנסאנס מהעיר מילנו כתב התפרסם בעיקר בזכות חיבורו בשם "על הפרופורציה האלוהית" (De divina proportione) העוסק בנושא יחס הזהב. ביחד עם לאונרדו דה וינצ'י (Leonardo Da Vinci), אשר אייר את הספר, הוא חקר את יחס הזהב והביא לפרסומו.

J.J. Tattersall, *Elementary Number Theory in Nine Chapters* (Cambridge University Press, 2005) p. 28 שם הוא מביא כי קפלר (Kepler, 1630-1571) היה מתאר את יחס הזהב כתְּכָשִׁיט הִיקָר.

Theodore Andrea Cook, *The Curves of Life* (New York: Dover Publications, 1979) [1914] שם הוא מביא כי בר (Barr, 1909) הציע לכנות את מספר הזהב "Phi" על שם פִּיִּדִיאס (Phidias) הארכיטקט היווני אשר תכנן את שדרוג הפנתיאון (Pantheon) בו התגלו מלבני הזהב בחזית ובעור חלקים.

אדוארד לוקאס (Edouard Lucas, 1842-1891) מתמטיקאי צרפתי מהמאה ה-19 אשר חקר את סדרת פיבונאצ'י.

רבי יוסף אלבו (1444-1380), ספר העיקרים, מאמר ג, פרק ג. כך מסביר ד"ר שמעון בולג, הפירושים המתמטיים של מרכבת המשנה, המעיין, עמ' 52-59.

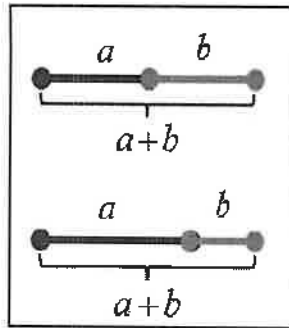
רבי שם טוב גפן (1856-1927 למנינם), "הממדים, הנבואה, הארמנות", מאמר שני - עיון כנבואה וכמופתים, עמוד 181, הוצאת מוסד הרב קוק. בפסקה זו המחבר מתייחס לסדרת פיבונאצ'י, ומתאים חלק מאיברייה לצורת גידולים של צמחים.

C. Lambinet, *Le Nombre d'Or* (2007) comment partager harmonieusement une quantité en 2 parties.

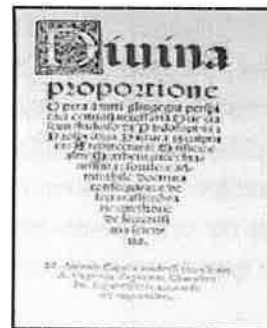
אברהם קרסנטי

1/1 =	1.000000
2/1 =	2.000000
3/2 =	1.500000
5/3 =	1.666667
8/5 =	1.600000
13/8 =	1.625000
21/13 =	1.615385
34/21 =	1.619048
55/34 =	1.617647
89/55 =	1.618182
144/89 =	1.617978
233/144 =	1.618056
377/233 =	1.618026
610/377 =	1.618037
987/610 =	1.618033

איור 3: סדרה חלקית של יחס החילוק בין מספרי פיבונאצ'י עוקבים.



איור 2: חיפוש חלוקת השלם לשניים אשר תשאיר "חותמת" אלוהית, ויחסי פיבונאצ'י



איור 1: עמוד הראשון של "הפרופורציה האלוהית"

2.3 סדרת פיבונאצ'י

במאה השלוש-עשרה לסה"ג, המתמטיקאי האיטלקי פיבונאצ'י (Fibonacci), בהיותו עוסק בחקר חיזוי ריבוי הארנבים, גילה את הסדרה הנושאת היום את שמו. הסדרה מתאפיינת בשתי תכונות: הראשונה היא שלמעט איבריה הראשונים (1,1)⁴³, כל איבר אחר בה שווה לסכום שני קודמיו. השנייה היא שיחס החלוקה בין כל שני איברים עוקבים שואף למספר הזהב $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618033988\dots$ (החל מהאיבר השלישי (2) כמוצג במשוואה 7 ואיור 3. היחס הולך ומשתפר בדיוקו לקירוב מספר הזהב עם התקרמות בסדרה. מקובל לסמן את איברי הסדרה, המוגדרת ברקורסיה (משוואה 6), באות F:

$$F_1 = F_2 = 1 \quad (4)$$

$$F_0 = 0 \quad (5)$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (6)$$

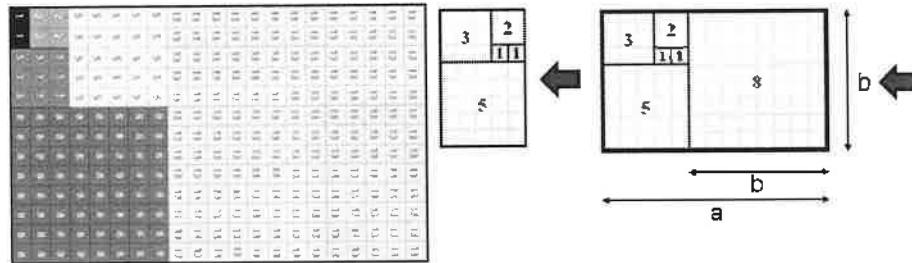
$$F_{11} / F_8 = 89/55 = 1.6182828 \quad (7)$$

2.4 מלבן הזהב (Golden Rectangle)

ניתן לבטא את סדרת פיבונאצ'י בצורה גרפית דו-ממדית בעזרת בניית רצף מלבני הזהב כמוצג באיור 4. בבניית מלבני הזהב יש שני כיוונים: (1) הראשון: יצירת הסדרה בבנייה גיאומטרית של האיברים הראשונים (ריבועים של 1 x 1, וסכומם שנותן ריבוע של 2 x 2 וכן הלאה) וקבלת ריבוע ומלבן המהווים סכום שני האיברים הקודמים. (2) הכיוון ההפוך של הסרת הריבוע ממלבן זהב מותרת תמיד מלבן זהב חדש. לדוגמה אם נסיר ממלבן הזהב בעל הממדים 8 x 13 ריבוע

43 לפי אסכולה אחת הסדרה מתחילה בשני האיברים 1, 1 בעוד באסכולה שנייה הסדרה מתחילה במספרים 0, 1.

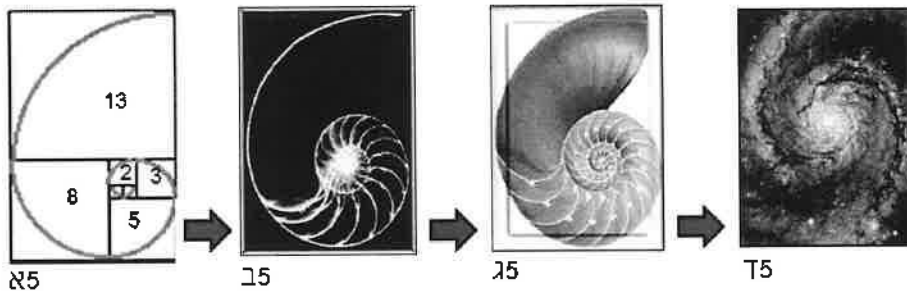
שצלעותיו b , נקבל מלבן חדש בעל ממדים 5×8 . היחס בין a (אורך) ל- b (רוחב) הוא יחס הזהב השואף ל-1.618.



איור 4: בניית מלבני זהב המהווים ביטוי גרפי לסדרת פיבונאצ'י

2.5 ספירלת הזהב (Golden Spiral)

שלב מתקדם יותר במימוש ביטוי גיאומטרי לסדרת פיבונאצ'י מתבטא במתיחת קשת בין שני קודקודים נגדיים בכל ריבוע פנימי. תוצאת חיבור כל הקשתות שנוצרו בריבועים ההולכים וגדלים בסדרת פיבונאצ'י, היא קבלת צורה הנקראת ספירלת הזהב (א5) המתגלה אף היא בטבע, בצומח ובחי, החל מהקונכייה (ב5, ג5) ועד צורת הגלקסיה (ד5).



איור 5: ספירלת הזהב נבנית מתוך חיבור קשתות שנוצרו בריבועים של סדרת פיבונאצ'י

2.6 הופעת ספירלת הזהב וסדרת פיבונאצ'י בפיסיקה

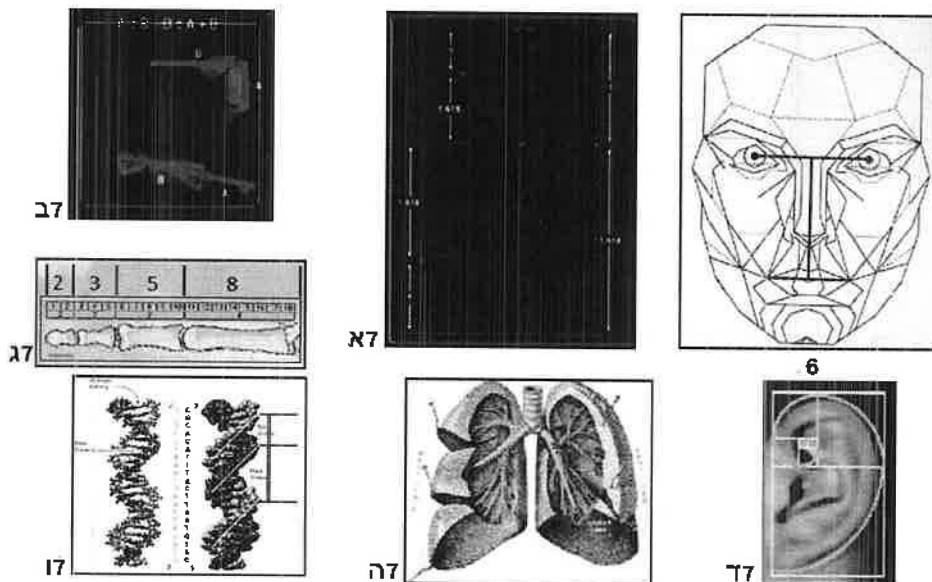
בנוסף למתמטיקאים אשר התעניינו בספירלת הזהב ובסדרת פיבונאצ'י, גם פיסיקאים גילו עניין בחקר העולם דרך ϕ ברמת המיקרו (מצב מוצק ותורת הקוונטים)⁴⁴ וברמת המקרו (אסטרופיזיקה וצורתם הספירלית של גלקסיות)⁴⁵ כפי שמביא ליביו (Livio) במחקריו.

R. Coldea et al., "Quantum Criticality in an Ising Chain: Experimental Evidence for Emergent E8 Symmetry", *Science* 327 (2010)

Mario Livio, "The Golden Ratio: Nature's Favorite Number", *Physica Plus* 5 (1970) 45
ליביו (נולד ב-1945) יהודי יליד רומניה. אסטרופיזיקאי ישראלי-אמריקאי. עובד כיום באסטרופיזיקאי בכיר

2.7 הופעת מספר הזהב וסדרת פיבונאצ'י בגוף האדם

מחקרים רבים נעשו בעניין גילוי הופעת יחס הזהב בגוף האדם. תוצאת המחקרים הראתה כי היחס מתקיים בגוף האדם עצמו בין חלקיו השונים,⁴⁶ בתווי הפנים, בין האצבעות, ובריאות. יתרה מזאת, ספירלת הזהב קיימת באוזן, ואפילו בשרשראות ה-DNA.⁴⁷



איור 6-7: גילוי הופעת יחס הזהב בחלקים חיצוניים ומנימיים של הגוף. 6: תווי פנים, 7א: יחס האיברים בגוף, 7ב: אצבעות האדם בקיפול, 7ג: אצבעות האדם במתיחה, 7ד: ספירלת הזהב באוזן, 7ה: ריאת האדם, 7ו: ספירלת ה-DNA

החוקר מרקוס פרינגס (Marcus Frings) תיעד אף הוא את גוף האדם ואת איבריו כבנויים על פי יחס הזהב.⁴⁸ לפניו, במאה ה-19 לסה"ג, האנתרופולוג הגרמני צייזינג (Adolf Zeising) חקר

במכון המדעי של טלסקופ החלל האבל. מוכר בעיקר בזכות ספרו העוסק ביחס הזהב: חיתוך הזהב: קורותיו של מספר מופלא.

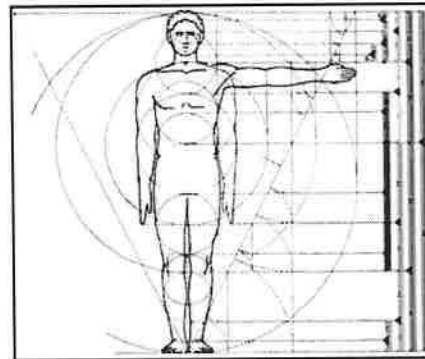
46 לוקה פאצ'ולי (Pacioli Luca, 1499-1557), "על הפרופורציה האלוהית" (*De divina proportione*), חיבור של שלושה חלקים העוסקים בנושא יחס הזהב, ואוייר על ידי לאונרדו דה וינצ'י (Leonardo Da Vinci).

47 J.C. Perez, *Golden Ratio & Numbers in DNA, Codex Biogenesis: Les 13 codes de l'ADN*.

48 M. Frings, "The Golden Section in Architectural Theory", *Nexus Network Journal* 4(1) (2002) pp. 9-32

באופן סיסטמתי את פרופורציות האדם לפי יחס זהב,⁴⁹ עד כדי חיפוש של "גזע עליון" שגופו בנוי לפיו. בתקופה בה גרמניה מתחילה להתעצם, יש לראות כאן תופעה קיצונית ושילית ברדיפה אחרי היופי. הרחיקו לכת החוקרים מקדונל ומקממרה (McDonnell and McNamara) כאשר פיתחו אלגוריתמים לצורך אפליקציה תלת-ממדית לתכנון ניתוח פלסטי של פני אדם, על פי ϕ .⁵⁰ לפי החוקר ד"ר סטיבן מקארד (Steven Marquardt), המילה יופי יכולה להיות מוגדרת כמכניזם המאפשר לבני אדם לזהות אחרים ולהיות נמשכים אחריהם,⁵¹ ולכן הפנים היפות ביותר הינן הפנים הקלות ביותר לזיהוי!

Sole to navel (t) : Sole to crown (Phi)
Sole to knee : Sole to navel
Navel to shoulder : Navel to crown
Knees to calf muscle : Knees to sole
Navel to mid-thigh : Navel to knees
Navel to sternum or mid-chest : Navel to base of throat
Throat base to temple or brow bone : Throat base to crown
End of calf muscle down to ankle : Calf muscle to sole
Mid-thigh to start of kneecap : Mid-thigh to end of kneecap
Navel to crotch : Navel to mid-thigh
Navel to sternum base : Navel to sternum or mid-chest
Throat base to earlobe : Throat base to top of ear or brow bone
Brow bone to hairline : Brow bone to crown
Nose to chin : Nose to base of throat



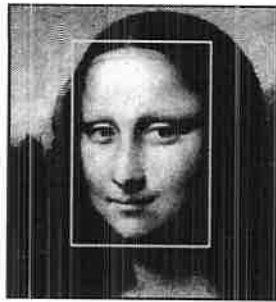
איור 8: הופעת יחס הזהב בין האיברים השונים של גוף האדם

2.8 הופעת מספר הזהב וסדרת פיבונאצ'י באומנות

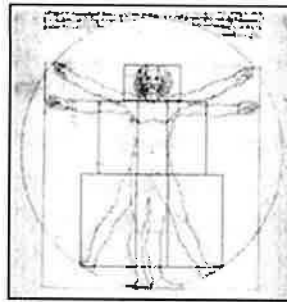
כתוצאה מהתבוננות בעיצוב האדם על פי יחס הזהב, גם אומנים רבים נטו לצייר לפי אותם כללים ולהשאיר "חותמת אלוהית" ליצירתם. כך ליאונארדו דה וינצ'י (Leonardo Da Vinci) ביצירותיו השונות: Auto portrait (איור 9א), גוף האדם (איור 9ב), והמונה ליוה (איור 9ג).

Anthropometry Research of Adolf Zeising, brought by C. Lambinet, *Le Nombre d'Or* (2007) 49
 R. McDonnell and A. McNamara, *Application of the Golden Ratio to 3D Facial Models* 50
 E. Holland, "Marquardt's Phi Mask: Pitfalls of Relying on Fashion Models and the Golden Ratio to Describe a Beautiful Face". *Aesthetic Plastic Surgery*, 32, 2 (2008), 200-208 51

אברהם קרסנטי



19



19



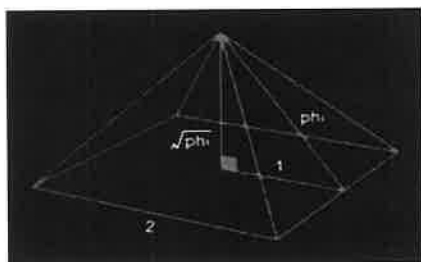
19

איור 9: סט ציורי דה וינצ'י בהם הקפיד לשמור על גבולות "מלבן הזהב" בחלקים השונים של הגוף ושל הפנים

2.9 הופעת מספר הזהב וסדרת פיבונאצ'י בארכיטקטורה

במאה ה-19 לטה"נ היתה התעוררות גדולה וחיפוש אובססיבי אחר גילויי מספר הזהב באומנות ובארכיטקטורה. לאחר עבודותיו של צייזינג (Zeising) בגרמניה, מופיע בצרפת זרם של אומנים, המבקשים למרוד באופן סיסטמטי כמעט כל מִצְבָּה או מונומנט (Monument), עד כדי שליחת משלחות למצרים (10א ו-10ב), ליוון (10ג ו-10ד), להודו (10ה ו-10ו) לאיטליה, לצרפת (10ז), ועוד.⁵² כמו צייזינג בגרמניה, שרל הנרי (Henry) הפך להיות כמין נביא של מספר הזהב. התוצאות מפתיעות ורבים ממבני העולם העתיק מתגלים כנושאים בתוכם את הותמת ה- ϕ . אף שקשה עדיין להוכיח שהייתה כאן כוונה תחילה. מספר הזהב התגלה במונומנטים של כל התרבויות והדתות המרכזיות: מצריט האלילית (פירמידות), יוון העתיקה (פרתנון), הנצרות (נוטרדאם), הכודהיזם (טג' מהל), האסלם (כיפת הסלע). לכן במקביל לאסכולת "אנשי התיאוריה" של ϕ (Euclid, Fibonacci, Pacioli, Kepler), קמה אסכולה נוספת של "נביאי ומשתמשי" ϕ , האחראים לפרסומו (Zeising, Henry).

מקור האסתטיקה וסדרת פיבונאצ'י באגרות התלמוד



ב10



א10



ד10



ג10



ח10



ז10



ו10



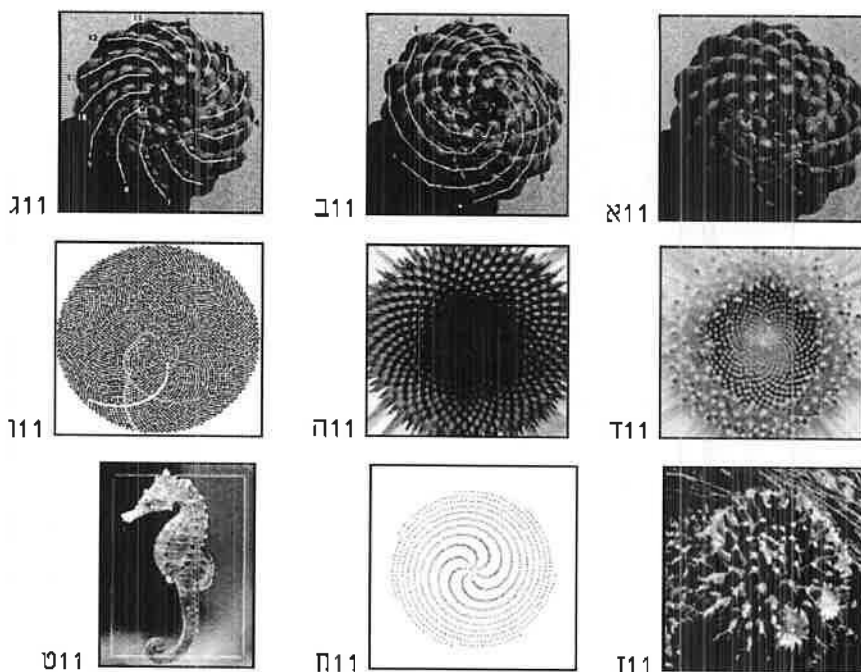
ה10

איור 10: בארכיטקטורה: א10, ב10: פירמידות, ג10, ד10: פרתנון, ה10, ו10: מג' מהל.
ז10: כיפת הסלע, ח10: נוטרדאם

2.10 הופעת מספר הזהב וסדרת פיבונאצ'י בצומח ובחי מעבר לעולם הדומם של אבני המונומנטים בו מתגלה שמירה קפדנית של יחס ומלבן הזהב, הרי ש- ϕ מופיע כחותמת הא-לוהית בדרגות אחרות של הבריאה, ברמת הצומח וברמת החי (איור 11).

2.11 הופעת מספר הזהב וסדרת פיבונאצ'י בתורה הופעות מספר הזהב בקירוב מתגלה בתורה, בתלמוד, ובמפרשים, ואפילו בצורה סיסטמטית. אחת השאלות שנעלה בהמשך לדיון תהיה, אם כן למה לא שמענו על כך לפני כן. להלן רשימה חלקית של המופעים:

אברהם קרסנטי

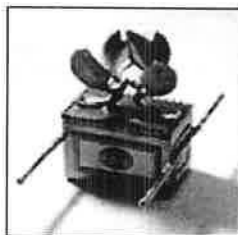


איור 11: סדרת תמונות ואלגוריתמים אשר מגלים את ספירלת הזהב בצומח ובחיי: א, 11א, 11ב, 11ג: אצטרפל (Pine cone), 11ד, 11ה, 11ו: פרחים שונים עם האלגוריתם, 11ז, 11ח: פילוטאקסיס (Phyllotaxis), 11ט: סוס ים.

א. ארוך הערות – עפ"י הפטוקים בתורה המתארים את המידות של ארון עדות, יוצא שהיחס בין אורך התיבה לרוחבה שואף ליחס הזהב $(2.5/1.5=1.6)$, והיחס בין אורכה לקומתה אף הוא שואף ליחס הזהב $(2.5/1.5=1.6)$, כפי שניתן לראות מתמונת השחזור:⁵³



איור 13: הכפורת עליו



איור 12: שיחזור ארון הערות

"וַיַּעַשׂ אֲרוֹן עֲצֵי שִׁטִּים אֲמֹתַיִם וַחֲצֵי אַרְבּוֹ וְאִמָּה וַחֲצֵי רֶחֱבוֹ וְאִמָּה וַחֲצֵי קָמְתוֹ."⁵⁴
 "וַיַּעַשׂ בְּצִלְאֵל אֶת הָאָרוֹן עֲצֵי שִׁטִּים אֲמֹתַיִם וַחֲצֵי אַרְבּוֹ וְאִמָּה וַחֲצֵי רֶחֱבוֹ וְאִמָּה וַחֲצֵי קָמְתוֹ."⁵⁵

53 מכון המקדש, תיאור כלי המשכן, ירושלים.

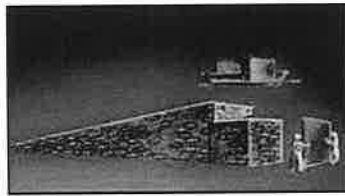
54 שמות כה, י.

55 שמות לז, א.

ב. הכפורת — גם בכפורת הזהב המכסה את הארון, היחס בין האורך לרוחב קרוב ליחס הזהב $(2.5/1.5=1.6)$ כמוצג בשחזור.⁵⁶

“וַעֲשִׂיתָ כַּפֹּרֶת זָהָב טְהוֹר אֲמֹתַיִם וְחָצִי אַרְבֵּה וְאֵמָה וְחָצִי רֶחֶבָה.”⁵⁷
“וַיַּעַשׂ כַּפֹּרֶת זָהָב טְהוֹר אֲמֹתַיִם וְחָצִי אַרְבֵּה וְאֵמָה וְחָצִי רֶחֶבָה.”⁵⁸

ג. מזבח הנחושת — גם היחס של מידות המזבח, בין האורך לרוחב שואף למספר הזהב $(5/3=1.6)$, וכך גם היחס בין הרוחב לקומה $(5/3=1.6)$, כפי שניתן לראות מתמונת השחזור:⁵⁹



איור 14: שיחזור כפורת הזהב

“וַעֲשִׂיתָ אֶת הַמִּזְבֵּחַ עֲצֵי שִׁטִּים
חֲמֵשׁ אַמּוֹת אַרְבֶּה וְחֲמֵשׁ אַמּוֹת רֶחֶב
רְבֹעַ יְהִי הַמִּזְבֵּחַ וְשִׁלֹּשׁ אַמּוֹת קָמְתוֹ.”⁶⁰

ד. תיבת נח — ראייה נוספת אפשרית, שאי דיוקה עשוי לנבוע מהרצון להשתמש במספרים עגולים, מתגלה בתיבת נח, וגם פה היחס בין הרוחב לקומה שואף למספר הזהב $(50/30 = 1.6)$:

“וְזֶה אֲשֶׁר תַּעֲשֶׂה אֹתָהּ שְׁלֹשׁ אַמּוֹת אַרְבֶּה חֲמֵשִׁים אַמָּה רֶחֶבָה וְשִׁלֹּשִׁים אַמָּה קוֹמָתָה”⁶¹

ה. בית שלמה המלך — גם בתקופת בית המקדש אנחנו מוצאים התייחסות, אמנם מרומזת, של גילוי תופעת יחס הזהב. שלמה המלך יום מפעלי בנייה רבים בארץ ישראל כולה ובירושלים בפרט, אך בעיקר בית ה' ובית המלך בירושלים. שני המבנים מתוארים כמכלול אחד, הנבנה ברצף במקום ובזמן. לאחר שסיים לבנות את בית המקדש,⁶² מתפנה שלמה המלך לבנות את ביתו, בית הארזים, במידות תיבת נח.

לחלק החיצוני: “וַיָּאֵת בֵּיתוֹ בְּנֵה שְׁלֹמֹה שְׁנֵה נִיכַל אֵת כָּל בֵּיתוֹ. וַיִּכֶן אֵת בֵּית יַעַר הַלְּבָנוֹן מֵאֵה אַרְבּוֹ וְחֲמֵשִׁים אַמָּה רֶחֶב וְשִׁלֹּשִׁים אַמָּה קוֹמָתוֹ עַל אַרְבַּעַה טוּרֵי עַמּוּדֵי

56 מכון המקדש, תיאור כלי המשכן, ירושלים.
57 שמות כה, יז.
58 שמות לו, ו.
59 מכון המקדש, תיאור כלי המשכן, ירושלים.
60 שמות כז, א.
61 בראשית ו, טו.
62 מלכים א, פרק ו.

אַרְזִים וְכַרְתוֹת אַרְזִים עַל הָעֲמוּדִים.⁶³ ולחלק הפנימי: "וְאֵת אֹלָם הָעֲמוּדִים עָשָׂה חֲמִשִּׁים אֵמָה אֶרְבֹּה וְשִׁלְשִׁים אֵמָה רָחֵבוֹ וְאֹלָם עַל פְּנֵיהֶם וְעַב עַל פְּנֵיהֶם."⁶⁴

ו. **הר הבית ומקום העזרה** – המשנה במסכת תמיד⁶⁵ מציגה את מבנה הר הבית. בציינה את מקום העזרה בתוך שטח ההר נוקטת המשנה בתיאור לא ברור: "הר הבית היה חמש מאות אמה על חמש מאות אמה, רובו מן הדרום, והשני לו מן המזרח, והשלישי לו מן הצפון, ומיעוטו מן המערב. מקום שהיה רוב מידתו, שם היה רוב תשמישו."⁶⁶

הרמב"ם מבאר את המשנה⁶⁷: "העזרה לא הייתה מכוונת כאמצע הר הבית, אלא רחוקה מדרום הר הבית יתר מכל הרהרות, וקרובה למערבו יתר מכל הרהרות, ובינה ובין הצפון יתר ממה שבינה ובין המערב, ובינה ובין המזרח יתר ממה שבינה ובין הצפון." פרופסור מיכלסון מסביר במאמרו⁶⁸ שהמשנה תיארה תיאור מעורפל בכוונה לאפשר את קיום יחס הזהב: "...יש להבין מהו ההיגיון בחלוקה זו של הר הבית... מדוע? כדי שיתקיים כלל של יחס הזהב, דהיינו אחד מן היחסים ... 3/5, 5/8 וכו', וגם חלוקה לכפולות של 50."

ז. **ציצית** – ניתן למצוא את יחס זהב בתוך אמירה של רב בתלמוד, כך מגלה הרב מואיס נבון במאמרו⁶⁹ בנוגע לגבול עליון וגבול תחתון הניתנים באמירתו של רב: "אמר רב הונא אמר רב ששת אמר רב ירמיה בר אבא אמר רב תכלת שכרך רובה כשרה ואפילו לא כרך בה אלא חוליא אחת כשרה וגויי תכלת שלישי גדיל ושני שלישי ענף."⁷⁰

ח. **ספר העיקרים, רבי יוסף אלבו** – בספר העיקרים,⁷¹ רבי יוסף אלבו דן בציטוט המשפט על יחס בעל אמצעי ושתי קצוות. בניסיונו להבין את דברי בעל ספר העיקרים, מסביר ד"ר בולג⁷² את כוונת בעל ספר העיקרים על המשפט "... כאשר ידבק צלע המעושר עם צלע המשושה שהקו ההוא נחלק על יחס בעל אמצעי ושתי קצוות", וכותב: "... המשפט בניסוחו של בעל ספר העיקרים מובן למי שבקיא במינוח המתמטי היווני העתיק, במקום המונח היווני 'יחס בעל אמצעי ושתי קצוות', התקבל באמצע המאה ה-16 המונח הנהוג עד היום 'חתך הזהב' או 'יחס הזהב' ..."

63 מלכים א, פרק ז, פסוקים א - ב.

64 שם, פסוק ג.

65 משנה, מסכת מידות, פרק ב, משנה א.

66 רמב"ם, משנה תורה, ספר עבודה, הלכות בית הבחירה, ה, ו.

67 פרופ' דניאל מיכלסון, גבולות הר הבית ומקומו וכיוונו של בית המקדש, אל המקדש, גיליון 11.

68 M. Navon, "Rav's Beautiful Ratio: An Excursion into Aesthetics", *B' Or Ha'Torah* 19 (5770) pp. 77-91

69 תלמוד בבלי, מסכת מנחות לט, א.

70 רבי יוסף אלבו, בעל ספר העיקרים, מאמר ג, פרק ג.

71 ד"ר שמעון בולג, הפירושים המתמטיים של מרכבת המשנה, המעיין, עמ' 52-95.

מקור האסטיקה וסדרת פיבונאצ'י באגרות התלמוד



איור 15: ספר העיקרים והדיוק בעניין הקו ויחס הזהב

ט. ספר "הממדים הנבואה האדמתנות", רבי שם טוב גפן – גם כרבדי האחרונים מצאנו התייחסות מפורשת ליחס הזהב: רבי שם טוב גפן, אשר בעודו נער הגיע לבקיאאות עצומה בשני התלמודים, במפרשים ובפוסקים, ובספרי החסידות, רכש לו אח"כ, בלימוד עצמי, ידיעה רבה במדעי הטבע, בפילוסופיה, במתימטיקה, באסטרונומיה, וגם בשפות הקלאסיות ובקבלה עיונית.⁷² בהתייחסו לסדר צמיחת העלים הוא משתמש במושג "סדר החתוך-האלוהי" בדומה למושג המקביל של "הפרופורציה האלוהית",⁷³ בו השתמש לפניו המתמטיקאי איטלקי פאצ'ולי (Pacioli). במשוואה ממנה מתקבלת הסדרה, הוא משייך לכל איבר דרך גידול מיוחדת לכל צמח על פי מספר הסיכובי העלים:

"התבניות השונות והמשונות של גופים האברנים, למיניהם, יוצאות מהשתנות מספר הממדים של הגופים הללו ומהשתנות הזווית, שעושים הממדים הללו, זה עם זה, בניפולם על הממדים הנגלים, ועל כן הננו רואים, שחוקי התבניות נוסדים על הערכים המדידיים. למשל, סידור צמיחת העלים בהצמחים, סידור בהציצים,⁷⁴ סידור העלים בהדיקולים של הפרחים בעלי אצותא-דיקלא,⁷⁵ וסידור הקשקשות באצטרובלים (פרי דארזא) הולכים על סדר החתוך-האלוהי".⁷⁶ ממשך הרב: "נוסתתו התשברתית:

$$A : X = X : (A - X) \quad (8)$$

$$(\sqrt{5} + 1) : 2 = 2 : (\sqrt{5} - 1) \quad (9)$$

נעשה מן המשוואה הזאת שבר-שלוש, ונקבל את

המשוואה הבאה:

$$(\sqrt{5} + 1) : 2 = 2 : (\sqrt{5} - 1) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)}}}} = 1, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \dots \quad (10)$$

72 D. Tidhar, *Entsiklopedyah le-halutse ha-yishuv u-vonav*, Vol. 3, (1949) p. 1161
 73 רבי שם טוב גפן (1856-1927 למנינם), "הממדים, הנבואה, האדמתנות", פסקה נא, עמ' 181-182, מוסר הרב קוק.

Bouton Knospen 74

Compositae 75

Sectio Divina 76

Fraction continue, Ketten Bruch 77

"... באלון⁷⁸ ועצי הפרי (שקדים, תפוחים) בשני סיבובים חמישה עלים = $2/5$. בפשתים, עשב הדרכים⁷⁹ ומיני הצלבנים⁸⁰ בשלושה סיבובים שמונה עלים = $3/8$. בעיני תפוחי-האדמה יהיו בחמישה סיבובים שלש עשרה עינים = $5/13$. בקשקות האצטרובלים יהיו בשמונה סיבובים עשרים ואחת קשקות = $8/21$. כשנסדר את המונים (מספר הסיבובים) בשורה אחת (1,1,2,3,5,8...) ואת המכנים (מספר העלים) בשורה אחת (2,3,5,8,13,21...), הננו רואים כי כל אחת מהשורות הללו שווה בסידורה לשורת החתוך-האלוהי"⁸¹.

3. סיכום – הבדלי הגישה לאסתטיקה

3.1 פירוש מתמטי לקביעת חז"ל

מעבר לעומק הנפשי, מתגלה במימרת חז"ל⁸² לבוש מדעי, כך שניתן לפרש את הגמרא ברובד המוסרי (מהרש"א, רש"י), האמוני (עין אי"ה, מאמרי הראי"ה) והמתמטי (φ). הנמשל⁸³ לדירה נאה, ⁽²⁾ אשה נאה ⁽²⁾ וכלים נאים, מתגלה בשני אפיקים: (1) בתורה, אלו הם ⁽⁸⁾ בית המקדש, ⁽²⁾ האדם השלם (מידות תרתי משמע), ⁽²⁾ וכלי המקדש (ארון העדות, כפורת הזהב, מזבח הנחשת). הכיוון הוא מלמעלה למטה, מהציווי הא-לוהי ועד ביצוע האדם. (2) בטבע, אלו הן ⁽⁸⁾ הארכיטקטורה והאומנות, ⁽²⁾ גוף אדם, ⁽²⁾ הבריאה (דומם, צומח, חי, כוכבים). הפעם הכיוון הוא הפוך, מלמטה למעלה, ברצונו של האדם להעתיק את מודל הבריאה לחייו וליצור בסביבתו את החותמת הא-לוהית אשר התגלתה אליו קודם. הספרות החיצונית, שלאורך ההיסטוריה ולרוחב תרבויותיה התייחסה ל-φ כאל הוכחה לתכנון העולם על ידי ההשגחה העליונה בעזרת חותמת א-לוהית, מלאה במקורות לעומת הספרות התורנית הדלה יחסית. התשובה טמונה ביחסנו לאסתטיקה: מעבר לעדות הברורה כי קיים מספר φ המופיע בכל רבדי החיים, קיימים כמה עקרונות: (1) שפת התורה, הלא היא לשון הקודש, עוסקת בעיקר באדם, בעוד ששפת המתמטיקה עוסקת בעיקר בטבע (הרב אשכנזי). (2) היות והתורה מכוונת את האדם לשכלול, הוא נדרש להשתלם במידותיו עד ששלוש הסביבות ירחיבו דעתו כחלק מהתפעלות בנפלאות הבורא (הראי"ה), (3) מרוץ אזורי היופי דורש זהירות (מהרש"א).

3.2 מקומם של היופי ושל האדם

יחסינו ליופי מתחיל אם כן במקומו במעלות הקדושה. בתפילת שחרית מתפללים: "אמת ויציב ונכון... וטוב ויפה הדבר הזה..."⁸⁴ יש סדר: התורה מתחילה ב"אמת" ומסתיימת ב"יופי". הם

Quercus 78

Plantago 79

Cruciferae 80

81 בשורת המכנים חסרות שתי הספרות הראשונות.

82 תלמוד בבלי, מסכת ברכות נו, ב.

83 תפילת שחרית, סוף ברכות היוצר.

מקור האסתטיקה וסדרת פיכונאצ'י באגדות התלמוד

יכולים לחיות ביהר, אך לכל אחד מקום שמור בהיררכית המעלות. התורה⁸⁴ מחזקת זאת: "יִפְתָּ אֱלֹהִים לִיפְתֹּן וַיִּשְׁכֶּן בְּאֶהֱלֵי שָׁם וַיְהִי כְּנֶעֱן עֶבֶד לְמוֹ." מקום היופי מובטח בתנאי שישכון בְּאֶהֱלֵי שָׁם, כלומר בגישה ובאיזון הנכונים כדברי הגמרא:⁸⁵ "יפיותו של יפת יהא באהלי שם." ואז באמת נרחיב את דעתנו.

84 בראשית ט, כו.

85 תלמוד בבלי, מסכת מגילה ט, ב.