

ערן רביב

שחזור וניתוח מתמטי של לוח "מנת המסלול לשמש" מספרו של ר' רפאל הלוי מהנובר "לוחות העיבור" – חלק I

ר' רפאל הלוי מהנובר, בן המאה ה-18, היה מפורצי הדרך בהבנת הלכות קידוש החודש לרמב"ם, וראש וראשון למניחי היסודות החשובים ללוח זמני היום ההלכתיים.

ספרו "לוחות העיבור" מחולק לשני חלקים, החלק הראשון מציג טבלאות המבוססות על האסטרונומיה המודרנית של המאה ה-18, טבלאות שבעזרתן אפשר לחשב חישובים אסטרונומיים לשם ידיעת זמני המולדות האמתיים, זמני הליקויים ועוד. חלקו השני של הספר מבוסס על טבלאות חישוביות להבנת מתודת החישוב של הרמב"ם בהלכות קידוש החודש.

הספר כולו מוצג כ- cookbook, בבחינת "כזה ראה וקדש", ללא הסברים מפורטים על הנחות היסוד שבעזרתן בנה את הטבלאות. כוונתו העתידית של המחבר הייתה להוציא לאור חלק שלישי מ"לוחות העיבור", חלק שבו יציג את ההנחות ההוכחות וההסברים לטבלאותיו, אולם חלק זה לא נדפס מעולם.

מאמרו של אינג' איידלר מציג את כל הרקע ההיסטורי והמדעי-אסטרונומי הנדרש לשם הבנת ספר זה, ובכך "מוציא לאור" מחדש את הספר. אחת הבעיות שאיידלר השאיר ב"צריך עיון" היא "טבלת מנת המסלול לשמש". הבעיה שמציג איידלר היא שלכאורה הלוח שמציג הנובר הוא מדויק פחות מחלוחות הקודמים לו המבוססים על המודל האסטרונומי של תלמי, ואף פחות מדויק מהנתונים עבור מנת מסלול השמש שמציג הנובר עצמו (לשיטת הרמב"ם) בחלק השני של "לוחות העיבור", ולא עולה בקנה אחד עם הידע האסטרונומי של תקופתו.

במאמר זה נציג שיטה מתמטית שבעזרתה הצלחנו לשחזר את מקדמי המשוואה שלפיה בנה הנובר את הטבלה, נציג את הטבלה המשווה, ולבסוף נציג השערה היכן טעה הנובר, טעות שלבסוף התגלגלה ויצרה טבלה שגויה.

האיש וחיבוריו

בחלקו הראשון של מאמרו של איידלר¹ הוא סוקר את הרקע המדעי-ביוגרפי של הנובר, להלן

1 מאמר זה מציג חלק מהתוכנית שיוצגו בעבודת מחקר (דיסרטציה) בהנחייתו של פרופ' עלי מרצבך מזמחלקה לתמטיקה באוניברסיטת בר-אילן, ומהווה נספח למאמרו של אינג' איידלר (המתפרסם בחלק האנגלי של חוברת זו) – "Intercalation", חלק מהתוצאות שיוצגו להלן הן פרי דיון משותף עם אינג' איידלר ולו שלוחה התודה.

מספר פרטים נוספים המצביעים על אישיותו המיוחדת של הגובר ועל חיבוריו.² הגובר בן המאה ה-18³ היה למדן מחונן ורכש השכלה תורנית⁴ ומדעית.⁵ שילוב רמתו הלימודית הגבוהה עם דקדקנותו והקפדתו מחד גיסא ועם ענוותנותו מאידך גיסא באו לידי ביטוי בספר קטן הכמות ורב האיכות "לוחות העיבור". מטרת החיבור היא לתת את כל הכלים הנדרשים לביצוע החישובים על אודות גרמי השמים הקשורים להלכות קידוש החודש לרמב"ם. הספר חולק לשני חלקים, הראשון מבוסס על האסטרונומיה המודרנית של תקופתו, והשני מבאר את שיטת הרמב"ם בהלכות קידוש החודש.

דקדקנותו

בהקדמה ללוחות העיבור, מעבר לדף השער, הגובר כותב:

חארתי לדעת לכלל בני דעת שהשגורת גבולי הדפוס
 מספר חדש כזרח שכיחי הויזקו אם ירפיס אחריו מי
 שאינו בקי כי אם טעיה במספר אחר בלוחות
 האלו / התועלת בכלל מקולקל ואני ינעתי ב
 בניעת הרבה / עד שיצא מתחת ידי דבר ש
 מהוקן שאין בו אפילו טעות אחר לכן באתי
 בחתימת ידי ממש בכל ספר וספר / כדי ש
 שיערו משל מי הוא / אם והוא מדפוס שלי
 או מדפוס הבא אחריו וכל ספר שאין בו ח
 חתימת שמי בכתב ידי לאו דריי הוא : רפאל גאון



2 במאמרו של איידלר (לעיל) רשימה מפורטת של חיבוריו שהופיעו ברפוס ושל אלו שעדיין בכתב יד, חלק מחיבוריו שבכתב יד הוזהרו לאחרונה ע"י איידלר ומצויים במרשתת ב- <http://www.ajdler.com/>. בין יתר חיבוריו מופיע גם לוח לזמני היום בהלכה (ראה: יעקב לוינגר, "על זמן בין השמשות, ועל מילה בשבת של תינוק הנולד סמוך לצאת השבת: הבנת החתם סופר בשיטת רבנו תם", המעיין, 200 (שבת תשע"ב), עמ' 23-50. לוינגר מוכיח שהלוח לזמני היום של הגובר (1766) היה המקור לחישוב זמני היום בהלכה של ר' נתן אדלר רבו של החת"ם סופר, וזמנים שהכתיב לחת"ם סופר בטרם נפרדו. הלוח פורסם גם בספרו של בניש, הזמנים בהלכה, חמו"ל 1996, עמ' 525, מעותק המצוי בספרייה הלאומית. לאחרונה מצאתי עותק נוסף (אך שונה!) של לוח זה שהוצג למכירה פומבית, ובע"ה נקדיש ללוח זה דיון נפרד.

3 1685 - 17 במאי 1779.

4 למד בצעירותו בישיבת פרנקפורט על נהר מיין.

5 היה מבאי ביתו של המלומד הדגול לייבניץ, ואף היה מזכירו האישי במשך כשש שנים.

שחזור וניתוח מתמטי של לוח "מנת המסלול לשמש" מספרו של ר' רפאל הלוי מהנובר

הקפדתו היתרה באה לידי ביטוי בכך שחתם בידו ממש על עותקי הספר שיצאו ממכשח הדפוס⁶ והשתדל לנפות את הספר מכל טעות. ספריו שימשו בעיקר כ"חוכרות לתלמידים"⁷ לשם ריכוז החומר הנלמד כולל דוגמאות חישוביות. כפי שאפשר לראות, אפילו הרווח בסוף השורה האחרונה תוכנן מראש כמקום החתימה, להשלמת השורה.

ענוותנותו

למרות גדלותו התייחס הנובר לספריו כטיוטה בלבד, וכך אנו קוראים בהקדמתו לחלק השני של לוחות העיבור (ההדגשות שלי – ע"ר):

...גם צריך להודיע כי שמעתי שאחד מן לומדי תורה בשמו ר' משה טיקטין הדפיס באמשטרדם ספר אחד על תכונה על שמי בלי ידיעתי וכלי רשותי, והאיש היה פעם אחת אצלי ואמר לי שקיבל ספר הנוכח מאחד מתלמידי⁸, ואמרת לי לו שספר הזה היה בידו של תלמידי והיה להם לזכרון על מה ששמעו ממני פא"פ (פנים אל פנים – ע"ר), כי באמת אינו ראוי לקרוא אותו בשם ספר, על כן כל מי שקנה ספר הנזכר אל יאשימני שיצא לאור דבר שאינו מתוקן כי לא היה דעתי מעולם שיבא ספר הלז אל הדפוס בלי הוספה, ואלקי אבי יהיה בעזרי להצילני שלא אשיג גבול אחרים אמן.

בסוף חלק א של לוחות העיבור כתב:

...והתועלת היוצאין מן לוחות האלו אי אפשר לפרטם בספר קטן הכמות אמנם יש בהם תועלת גדול למי שנפשו חשקה להבין קדוש החודש להרמב"ם ובהרבה מקומות בתלמוד ואין רצוני להאריך בשכתם במקום שראוי לקצר אף שידוע למבינים...

למדים אנו מדבריו גם על הקפדתו הרבה וגם על ענוותנותו היתרה.

6 ראיתי חמישה עותקים של הספר, שלושה מהם חתומים בכתב ידו (עותק המצוי בספרייה הלאומית, עותק באתר Hebrewbooks, וצילום העותק השמור בסמינר לרבנים בפריז הנמצא בידו איידלר). כל האקסמפלרים חתומים באותו מקום בדיוק!

7 העותק המצוי באוניברסיטת תל אביב וכן העותק המודפס בקובץ "פועל ה'", הם ללא חתימת המחבר, ייתכן שהמדפיס הדפיס עוד כמה עותקים למוכרם "מאחורי גבו" של המתבר, וללא ידיעתו.

7 ראה בהקדמתו לחלק ב, ולהלן בסעיף הבא.

8 בהקדמה לספר "תכונות שמים" מוכח שר' משה טיקטין קנה את הספר מעיזבונו של אחד התלמידים, ושם מעבר לדף השער: "אמת ניתן לכתוב שקניתי ספר בשנת תק"ט לפ"ק בפרסום בשעת הכרזה מעובד המנוח כהר"ר מאיר אושטרוב ז"ל בק"ק אלטונא ושם הספר הנוכח תכונת שמים והוא פי"ב נאה ומקובל על הלכות קידוש החודש להרמב"ם ז"ל ומכרתי אותו הספר באותו העת לתלמידי כחכמה זו התורני המופלא מוהר"ר משה במוהר"ר יקותיאל ז"ל מטיקטין יצ"ו לראי' באתי על החתום פה אמשטרדם יום ג' ח"י שבט תקטזיין לפ"ק הק' צבי הירשדעהן".

פרטים ביבליוגרפיים

הסכמות

במחצית השנייה של המאה ה-17, כעקבות הופעתו של שבתי צבי, עלה הביקוש להסכמות ובעקבות כך במאה ה-18 כמעט שלא היה ספר נדפס בעברית (למעט סידורים וכדומה) ללא הסכמות.⁹

מבחינה זו הספר "לוחות העיבור" הוא יוצא דופן ונדפס ללא הסכמות. על כגון דא אמרו כבר הקדמונים "גדול מרבן שמו", שמו של המחבר כמומחה בתחומו הלך לפניו והספר התקבל בברכה בכל החוגים.¹⁰

מהדורות דפוס של "לוחות העיבור"

הספר הודפס במהדורה אחת על ידי המחבר¹¹ (חלק ראשון בליידן בשנת תקט"ז¹²-1757, חלק שני בהנובר בשנת תקי"ז¹³-1758), בבתי דפוס שלא הודפסו בהם ספרים עבריים.¹⁴

מקום הדפוס

לכאורה עולה השאלה מדוע בחר הנובר שלא להדפיס גם את החלק הראשון של הספר בהנובר אלא הדפיס אותו בליידן (הולנד, בקרבת אמשטרדם).

מבדיקת בתי הדפוס ומקומות ההדפסה עולה שבאותה תקופה בהנובר לא הודפסו ספרים עבריים כלל. הספר הראשון שהודפס בהנובר באות עברית היה "לוחות העיבור חלק שני",¹⁵ דין לאחר כ-32 שנה, בשנת 1789, הודפס בהנובר ספר חבוקוק.

בליידן, לעומת זאת, החל הדפוס העברי כבר בשנת 1588¹⁶ ועד תקופתו של הנובר הודפסו בה כ-40 ספרים עבריים.

- 9 ראה: חיים לשם, "הסכמות על ספרים", מחניים, קו (תשכ"ז), עמ' מד-גא; מאיר הברמן, הספר העברי בהתפתחותו, ירושלים תשכ"ח, נספח ה – ההסכמות לספרים, עמ' 221-224.
- 10 הספר נלמד ע"י הגר"א ובספר "עליות אליהו" מוזכר בשמו שמצא שגיאה בספר.
- 11 הספר הודפס מאוחר יותר ע"י מאיר פירדא (קרי – Fürth) בצמוד לספר "יראת שמים", דעסויא 1820-1821.
- 12 ע"י "האדון ליסאק".
- 13 ע"י האדון שליטר – לא מצאתי עליו פרטים.
- 14 ראה להלן.
- 15 בשנת 1762 הודפסו שבעה רפים ששימשו כתפילה לימי היריון של "המלכה המבורכת בפרי בטן... שהאל... יברכם... [נעשה] בפקודת מורנו... אב"ד דק"ק הנובר ואנפיה, שיתפללו היהודים התפלה הזאת... כל ימי היריון המלכה בכל בתי כנסת המדינה" (אשתו של מלך אנגליה ג'ורג' השלישי שהיה "נסין בוחר" של הנובר ובאחרית ימיו כונה "המשוגע"). הדפיס הודפסו בעברית ובגרמנית, עמוד מול עמוד. הטקסט העברי והטקסט הגרמני שבשער משולבים זה בזה, חסר שמו של המדפיס [הפרטים הביבליוגרפיים על פי מפעל הביבליוגרפיה העברית – ביבליוגרפיה של הספר העברי ר"ל-תש"כ].
- 16 על פי מפעל הביבליוגרפיה של הספר העברי ר"ל-תש"כ שעל יד הספרייה הלאומית. ראה גם בספרו של פוקס L. Fuks and R.G. Fuks-Mansfeld, *Hebrew Typography in the Northern Netherlands, 1585-1815: Historical Evaluation, and Descriptive Bibliography*, Part 1, 1984, pp. 60-61

שחזור וניתוח מתמטי של לוח "מנת המסלול לשמש" מספרו של ר' רפאל הלוי מהנובר

הולנד בסוף המאה ה-17 הייתה "מעצמת דפוס", במיוחד באמסטרדם וכסביבתה, ולכן ככל הנראה בחר הנובר להדפיס את ספרו בהולנד (בסמיכות גאוגרפית לנובר).

שינויים טיפוגרפיים במהדורת הנובר

אחד הראשונים¹⁷ שעמדו על חשיבות חקר השינויים בין עותקים שונים של אותו הספר היה הביבליוגרף יצחק ריבקינד,¹⁸ שהקדיש לכך סדרת מאמרים¹⁹ בכותרת: "דקדוקי ספרים – לחקר התפתחות הדפוס העברי", בהקשר זה ריבקינד כותב:²⁰

נקוט כלל זה בדרך הבדיקה יפה בספרים, וכל המרבה בבדיקה מביא ברכה לדיעת הספרים העבריים ותקירתם, אצל טופסים עתיקים אין טוב כמו הקבלה בין שני אכסמפלרים דומים, מדף לדף ממש... אמנם אין להפחית ערכו של כל שינוי קל, מפני שמתוך ריבוי העובדות אפשר להוציא איזו מסקנות למה באו שינויים הללו, בשביל מה ואיך חלו ההבדלים שבדפוס...

ברקנו עותקים אחדים של הספר²¹ ולמרבית ההפתעה גילינו הבדלים בין העותקים! במהדורת הדפוס הראשונה שם הספר הוא "לוחות העיבור", ואילו במהדורה השנייה "לוחות העבור" (ללא האות יו"ד), ראה בנספח העתקי השערים.

מבדיקתנו עולה שככל הנראה הודפס הגיליון הראשון כולו²² – 8 עמודים ראשונים (כולל השער) – פעמיים והוחלף בחלק מהטפסים, פעולה זו אינה שגרתית בעידן סידור האותיות הידני, והצריכה השקעה נוספת בזמן ובממון.

אנו משערים שבמועד הסמוך לסיום ההדפסה הראשונה של "לוחות העיבור" חלק ראשון מצא הנובר שתי שגיאות דפוס (ככל הנראה טעויות העתקה), ועקב קפדנותו לא חסך מאמץ והדפיס את כל הגיליון (כולל השער), כאמור, בשנית כדי להחליפו בטופסי הספר שהיו עדיין

17 ראה: יצחק יודלוב, "שינויים טיפוגרפיים בספרים עבריים", בתוך הברמן מהלמן ורפאל (עורכים), ארשת חלק ו, ירושלים תשמ"א, עמ' 95-122, קישורים למאמרים העוסקים בטיפוגרפיה עברית זמינים במרשתת כ-<http://www.tau.ac.il/~stoledo/fonts/articles.html>.

18 1895-1968, ביבליוגרף וספרן ספרית בית המדרש לרבנים באמריקה בניו יורק.

19 קרית ספר, ב, 54-63; ד, 273-580; י, 489-497.

20 קרית ספר שנה שניה חוברת א' (תרפ"ה), עמודים 54-55.

21 ראה לעיל הערה מס' 7.

22 מבדיקת סימני "שומר הקונטרס" (= שומר גיליון) אפשר לראות שהספר הודפס משני גיליונות כפולים (ארבעה דפים כל אחד) המסומנים באותיות A,B, ומעוד חמישה גיליונות רגילים (2 דפים כל אחד), המסומנים באותיות C,D,E,F,G. מעניין לציין שסימון מספרי הדפים בספרים החל רק במחצית השנייה של המאה ה-15, אבל היו בספרים 'שומרי דפים' ו-'שומרי גיליונות' (קוסטודות בלעז) ששמרו על רציפות הספר והיו מורי דרך לכורכים. (ראה: א"מ הברמן, הספר העברי בהתפתחותו, ירושלים תשכ"ח, עמ' 41 ואילך. וכן: מלאכי בית אריה, קודיקולוגיה עברית – טיפולוגיה של מלאכת הספר העברי ועיצובו כימי-הביניים בהיבט היסטורי והשוואתי מתוך גישה כמותית המיוסדת על תיעוד כתבי-היד בציוני תאריך, הספרייה הלאומית ירושלים (זמין במרשתת באתר הספרייה הלאומית), פרק ה: האמצעים לשמירת סדר הקודקס.

תחת ידו. מסתבר שבמועד מאוחר יותר גילה כמה טעויות נוספות ולפיכך צירף בעמוד האחרון של החלק השני של "לוחות העיבור" – "לוח הטעות"²³.
עותק 'מתוקן' נמצא כמהדורה סרוקה במרשתת באתר HebrewBooks (עותק שהוקדש לרש"י פין על ידי דחתנו, כמשלוח מנות <http://www.hebrewbooks.org/46970>), ונכנה "עותק פיז". בקובץ "פועל השם" צולם עותק שאינו מתוקן (גם עותק זה נסרק למרשתת באתר HebrewBooks).

אזכור הבחור ה"זעצער"

בספרים עבריים רבים החזרו סדרי הדפוס והפועלים²⁴ (ובמיוחד בספרים שבהם נשאר בעמוד האחרון מקום).

בספרו של הנובר לא הוזכרו הסדרים ואף ייחכן שסדר הדפוס היה נכרי,²⁵ במיוחד לאור העובדה שככל הנראה היה זה הספר היחידי שהודפס באות עברית בבתי דפוס אלו.²⁶ בחירת בית הדפוס התבססה ככל הנראה על מומחיות בהדפסת טבלאות ולוחות.

- 23 מדפיסי הקובץ "פועל ה" הרשו לעצמם לעשות בו כבתוך שלהם והעבירו את לוח הטעות לסוף חלק א של לוחות העיבור. במקורו הודפס לוח הטעות בסוף חלק ב של לוחות העיבור. יש להעיר כי בעמוד כה נפלה טעות בשומר הדף (קוסטורה בלעז) ותחת שמל צ"ל משל, טעות זאת לא תוקנה בלוח הטעות. המנהג להוסיף דף נספח המכיל לוח טעויות החל כבר בעידן האינקונבולות (דפוס עריסה) – ראה: הברמן, הספר העברי בהתפתחותו, עמ' 212 ואילך.
- 24 סדר הדפוס היינו "הבחור הזעצער", פועל הדפוס היינו מחזיר את כל האותיות למקומן עם סיום הדפסת הגיליון. ראה: הברמן, "על תמימות סדרים ודפסים בסופי הספרים", מפרי העט והעת, ירושלים תשמ"א, עמ' 17 ואילך. וכן בספרו "הספר העברי בהתפתחותו", נספח ד – טעויות בספרים; יו"ט לוינסקי, "הבחור הכותב והבחור 'הזעצער'". מחניים, קו (תשכ"ו), תל אביב תשכ"ו.
- 25 עיין: הברמן, "טעות סופר, טעות דפוס או טעות מחבר?", בתוך ספרו קבוצי יחר, ירושלים תש"כ, עמ' 217.
- 26 ראה פרידברג, תולדות הדפוס העברי, אנטוורפן 1937, עמ' 17, וכן על פי בדיקה ב"ביבליוגרפיה של הספר העברי ר"ל-תש"כ" – לא הודפסו בבתי דפוס אלו ספרים עבריים נוספים.

שחזור וניתוח מתמטי של לוח "מגת המסלול לשמש" מספרו של ר' רפאל הלוי מהנוכר

השוואת מהדורות:

עותק 'רש"י פינ'

(כשורה ו עמודת יתרונות, הערך תוקן ל-609)

כ לשנים							
מסלול	מסלול	מסלול	יתרונות	תיקונים	סולדות		
הרחב	הרח	השמש					
איכות	כספרים	כספרים	מספרים	חלקים ש. יס'	ש"י הל	חל. ש. ימים	
2	579	11153	12574	10. 21. 6	0. 33	4. 8. 876	א
2	1159	9746	12187	21. 18. 12	1. 6	1. 17. 672	ב
2	3046	8468	12848	3. 2. 305	1. 42	7. 15. 181	
2	4526	6661	12362	13. 23. 310	2. 15	4. 23. 1057	
2	5105	4854	12075	24. 20. 316	2. 48	2. 8. 853	ה
2	7893	3976	12737	6. 4. 620	3. 23	1. 6. 362	
2	8472	2169	12350	17. 1. 620	3. 56	5. 15. 158	
2	11260	1291	51	עין במחזורים בסימון	4. 32	4. 12. 747	ח
2	11839	12444	12625	9. 6. 911	5. 5	1. 21. 543	ט
2	12418	10637	12239	20. 3. 919	5. 38	6. 6. 339	
1	2246	9759	12900	1. 12. 132	6. 14	5. 3. 928	י
1	2825	7952	12513	12. 9. 138	6. 47	2. 12. 724	
1	3405	6144	12127	23. 6. 144	7. 20	6. 21. 520	
1	6192	5267	12788	4. 14. 437	7. 55	5. 19. 29	יא
1	6772	3460	12402	15. 11. 443	8. 28	3. 3. 905	
1	7351	1652	12015	26. 8. 448	9. 1	7. 12. 701	
1	10138	775	12676	7. 16. 741	9. 37	6. 10. 210	יב
1	10718	11927	12290	18. 13. 747	10. 10	3. 19. 6	

ערן רביב

עותק 'מועל השם'

(בשורה ו עמודת יתרוגות, ערך שגוי-628)

לשנים							נ
מסלול הרוחב	מסלול הירח	מסלול השמש	יתרוגות	תיקונים	מילדות	איות	
							מספרים
2	579	11153	12574	10. 21. 6	0. 33	4. 8. 876	א
2	1139	9746	12187	21. 18. 12	1. 6	1. 17. 672	ב
2	3956	8468	12848	3. 2. 305	1. 42	7. 15. 181	
2	4526	6661	12462	13. 23. 310	2. 15	4. 23. 1057	
2	5105	4854	12075	24. 20. 316	2. 48	2. 8. 853	ג
2	7891	3976	12737	6. 4. 628	3. 23	1. 6. 362	
2	8472	2169	12350	17. 1. 620	3. 56	5. 15. 158	
2	11260	1291	51	עין כחורים כספנה	4. 32	4. 12. 747	ד
2	11830	12444	12625	9. 6. 914	5. 5	1. 21. 543	ה
2	12418	10637	12239	20. 3. 919	5. 38	6. 6. 330	
1	2246	9759	12900	1. 12. 132	6. 14	5. 3. 928	ו
1	2825	7952	12513	12. 9. 138	6. 47	2. 12. 724	
1	3105	6141	12127	23. 6. 144	7. 20	6. 21. 520	
1	6192	5267	12788	4. 14. 437	7. 55	5. 19. 99	ז
1	6772	3466	12402	15. 11. 443	8. 28	3. 3. 905	
1	7351	7652	12015	26. 8. 448	9. 1	7. 12. 701	
1	10138	775	12676	7. 16. 741	9. 37	6. 10. 210	ח
1	10718	11927	12290	18. 13. 747	10. 10	3. 19. 6	יח

שחזור וביתוח מתמטי של לוח "מנת המסלול לשמש" מספרו של ר' רפאל הלוי מהנובר

עותק 'פועל השם'

(הערך ל- כד שעות שגוי - 55)

לוח מסלול השמש		
לשעות	לימים	
1	35	א
3	71	ב
4	106	ג
6	142	
7	177	ד
9	213	ה
10	248	
12	284	ו
13	319	ז
15	355	
16	390	ח
18	426	ט
19	461	
21	497	י
22	532	יא
24	568	
25	603	יב
27	639	יג
28	674	
30	710	יד
31	745	טו
33	781	
34	816	טז
35	852	
	887	טז
	923	
	958	טז
	993	
	1029	



עותק 'רש"י פין'

(הערך ל- כד שעות תוקן ל-35)

לוח מסלול השמש		
לשעות	לימים	
1	35	א
3	71	ב
4	106	ג
6	142	
7	177	ד
9	213	ה
10	248	
12	284	ו
13	319	ז
15	355	
16	390	ח
18	426	ט
19	461	
21	497	י
22	532	יא
24	568	
25	603	יב
27	639	יג
28	674	
30	710	יד
31	745	טו
33	781	
34	816	טז
35	852	
	887	טז
	923	
	958	טז
	993	
	1029	



חלק שלישי של "לוחות העיבור"

מתוך דבריו של הגובר בהקדמתו לחלק השני אנו למדים כי היה בכונתו להוציא לאור חלק שלישי מספרו זה, המכיל את הרקע התיאורטי מלווה בהסברים ובהוכחות. וכך הוא כותב בהקדמתו לחלק השני:

...ושם בחלק השלישי בס"ד יבואו הטעמים והמופתים (הוכחות - ע"ר) של הלוחות והחשובות משני חלקים הקודמים, ושם אפרש כל פרטי הרמב"ם ז"ל והרבה הלכות סתומות הנמצאים בש"ס.

וכן כתב בקולופון²⁷ של חלק ראשון:

...ואם יזכני השם יתב' להעלות חיבורי הגדול לבית הדפוס משם תראה כל חכמת לימודיות ובפרט סדר וחשבון התכונה ופירוש מספיק על קידוש החודש להרמב"ם. ופירוש כמה מאמרים סתומים בתלמוד. וכו' כלול המופת²⁸ על לוחות האלו (ההדגשה שלי - ע"ר). כ"ד הקטן רפאל בלא"א החסיד החבר יעקב יוסף מבית לוי זצ"ל פה הגובר שנת תקי"ו לאלף השישי ליצירה ת"ו.

כאמור, לצערנו, חלק זה לא ראה אור דפוס מעולם, ייתכן שמחמת קפדנותו היתרה. איידלר ההדיר מכתב יד את הספר "תכונות שמים הארוך"²⁹ וייתכן שמדובר בחלק מספרו השלישי.

מנת המסלול לשמש - רקע³⁰

כיוון שמסלול כדור הארץ בהקפתו את השמש הוא אליפטי, מנקודת מבטו של הצופה הנמצא על פני כדור הארץ השמש במהלכה השנתי אינה נעה במהירות קבועה בתנועתה המדומה על פני כדור השמים.

המודל שהשתמש בו הרמב"ם הוא המודל של תלמי. היוונים בחרו לייצג את תופעת המהירות המשתנה כמודל שבו השמש נעה במסלול מעגלי במהירות קבועה סביב מרכז המסומן באות C, אך כדור הארץ המסומן באות E אינו ממוקם במרכז (מעגל אקסצנטרי = יוצא מרכז) וכך כלפי המבטי מכדור הארץ המהירות הזוויתית של השמש אינה קבועה במהלך השנה. כדי למצוא את מקום השמש האמתי, אפשר להציג את תנועת השמש כסכום אריתמטי

27 המילה colophon נכנסה ללטינית מיוונית - κολοφών - שמשמעה פסגת הר = קרי שיא הספר = סופי.

28 מופת = הוכחה.

29 נמצא במרשהח ב- <http://www.ajdler.com/jjajdler/hanover>.

30 ראה בביאוריו האסטרונומיים של החוקר האוסטרי הרגול Otto Neugebauer (חוקר האסטרונומיה של העת העתיקה) לספר:

Solomon Gandz, trans., *The Code of Maimonides*, Book III, Treatise 8: Sanctification of the New Moon (Yale Judaica Series, XI). Introduction by Julian Obermann, and an astronomical commentary by Otto Neugebauer, New Haven, Connecticut: Yale University Press, 1956, p. 126.

שתזוור וניתוח מתמטי של לוח "מנת המסלול לשמש" מספרו של ר' רפאל הלוי מהגובר

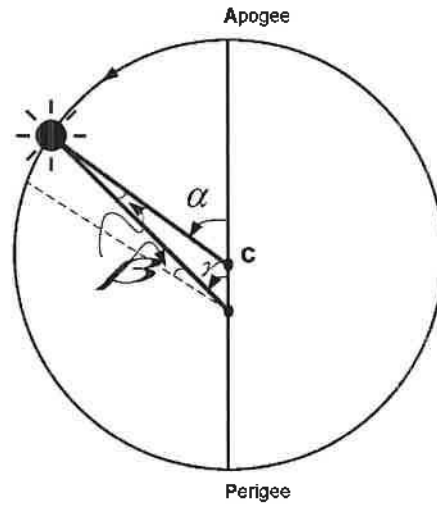
של שני מרכיבים, האחד – המהירות היומית של 'השמש הממוצעת' כפול סך הימים שחלפו מ'העיקר' [ביחס לנקודת "הגובה" (Apogee)] והשני 'גורם תיקון' המתווסף לערך הראשון ועוזר למצוא את מיקום השמש האמתי במסלול המלקה (על פני ספרת השמים).
 'גורם תיקון' זה מכונה על ידי רמב"ם 'מנת המסלול', ומסומן באיורים שלהלן באות היוונית β .

מקרא:

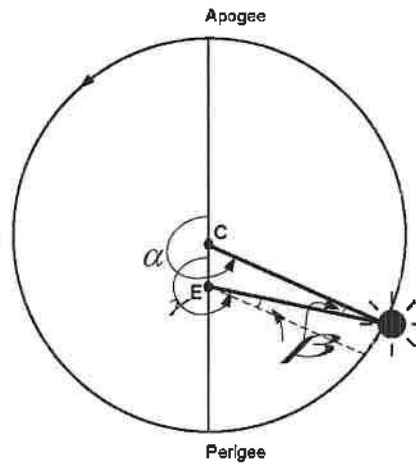
הערה	מינוח רמב"ם	מונח לועזי	סימן
כדור הארץ במרחק המרבי מהשמש.	מקום הגובה	Apogee	A
כדור הארץ במרחק המינימאלי מהשמש.		Perigee	P
המרחק הזוויתי בין נקודת הגובה לבין מיקום השמש הממוצע.	מסלול השמש	Anomaly	α
	מקום השמש האמתי	long of sun	γ
גורם התיקון (חיובי או שלילי) שיש להוסיף למיקום השמש הממוצע כדי לקבל את מיקום השמש האמתי על פני כדור השמים.	מנת המסלול	The quota of the anomaly	β

כדלהלן:

ערן רביב



מקרה 1 - $0 < \alpha < 180$, השמש התקרמה במהירות ממוצעת α מעלות, אולם לצופה מכדור הארץ התקדמה רק γ מעלות. כדי לקבל את מקום השמש האמתי יש להפחית את מנת המסלול:
 $\gamma = \alpha - \beta$



מקרה 2 - $180 < \alpha < 360$, השמש התקרמה במהירות ממוצעת α מעלות, אולם לצופה מכדור הארץ התקדמה יותר - γ מעלות. כדי לקבל את מקום השמש האמתי, במקרה זה, יש להוסיף את מנת המסלול:
 $\gamma = \alpha + \beta$

שחזור וניתוח מתמטי של לוח "מנת המסלול לשמש" מספרו של ר' רפאל הלוי מהנובר

טבלת מנת המסלול³¹

לוח מנת המסלול ומנת הזמן לשמש													
לגיוע	0		1080		2160		3240		4320		5400		
	מנת המסלול	מנת הזמן	מנת המסלול	מנת הזמן	מנת המסלול	מנת הזמן	מנת המסלול	מנת הזמן	מנת המסלול	מנת הזמן	מנת המסלול	מנת הזמן	
	0	0											
1080		143	3541	143	6530	146	7425	148	8525	151	3784	153	1044
72	172		5751		6415		7425		6430		3668		1044
108	254		3858		6488		7425		6373		3553		1008
144	351		3967		6549		7425		6307		3431		972
180	501	143	4074	144	6609	146	7418	148	6235	152	3320	153	936
216	631		4183		6666		7407		6163		3200		900
	778		4283		6721		7390		6087		3079		864
252	883		4385		6775		7386		6012		2960		828
288	1010		4487		6826		7374		5933		2839		792
324	1137		4589		6884		7357		5853		2716		756
360	1262	143	4689	144	6926	146	7337	149	5770	152	2592	153	720
396	1388		4789		6968		7319		5691		2468		684
432	1512		4884		7011		7296		5606		2342		648
468	1637		4980		7053		7269		5519		2216		612
504	1761	143	5075	144	7093	147	7241	150	5430	152	2090	153	576
540	1885		5167		7131		7211		5336		1962		540
576	2008		5257		7165		7181		5245		1834		504
612	2126		5346		7197		7146		5151		1706		468
648	2243		5434		7228		7109		5055		1577		432
684	2369	143	5521	143	7256	147	7070	150	4958	152	1448	153	396
720	2490		5605		7281		7029		4859		1318		360
756	2608		5690		7305		6987		4760		1187		324
792	2727		5775		7329		6942		4657		1058		288
828	2838		5852		7349		6895		4553		926		252
864	2952		5929		7368		6845		4447		794		216
900	3075	143	6003	143	7382	148	6792	151	4340	152	662	153	180
936	3190		6074		7395		6739		4232		529		144
972	3304		6144		7406		6683		4121		398		108
1008	3421		6215		7415		6624		4010		265		72
1044	3526	143	6254	146	7421	148	6563	152	3897	153	133	153	36
1080	3641		6350		7425		6503		3784		0		0
	11880.		10800.		9720.		8640.		7560.		6480.		לוחיות

31 במאה ה-18 רווח מאוד השימוש בטבלאות מעין אלו ככלי עזר חישוביים (כדוגמת הטבלאות באלמן הצרפתי - עיין בסוף המאמר).

ערן רביב

הסבר אופן השימוש בטבלה

בעמודה השמאלית והימנית מופיעות המעלות של מסלול השמש ביחידות של בין 0 ל-1080. כדי לקבל מספרים אלו במעלות יש לחלק ב-36, וזאת אומרת שהמספר 1080 מבטא 30 מעלות וכן על זה הדרך (היחידות הן של 100").
 המספרים בטבלה המופיעים תחת הכותרת "מנת המסלול" הם ביחידות של שניות קשת, כלומר כדי לקבל את מנת המסלול במעלות עלינו לחלק כל מספר ב-3600, לדוגמה על ידי המספר 1080 (מעלות) (שמאל למטה) מופיע המספר 3641, כלומר:

$$\frac{3641}{3600} = (0^{\circ}, 57', 41'') \cdot 0.9613888^{\circ}$$

לוח מנת המסלול לשמש - כיוון קריאת הטבלה כאשר מסלול השמש הוא בין 0° ל-180°						
לגרוע →	0° to 30°	30° to 60°	60° to 90°	90° to 120°	120° to 150°	150° to 180°
0°						
1°						
2°						
3°						
4°						
5°						
6°						
7°						
8°						
9°						
10°						
11°						
12°						
13°						
14°						
15°						
16°						
17°						
18°						
19°						
20°						
21°						
22°						
23°						
24°						
25°						
26°						
27°						
28°						
29°						
30°						

שחזור וניתוח מתמטי של לוח "מנת המסלול לשמש" מספרו של ר' רפאל הלוי מהנובר

הנובר היה אמן בבניית טבלאות חסכוניות המכילות מידע רב, בשטח נייר מועט. הטבלה נקראת בשני כיוונים, מלמעלה למטה ומלמטה למעלה.

כאשר מסלול השמש נמצא בתחום 0° ועד 180° הקריאה מתבצעת בכיוון מטה, וערכה של מנת המסלול שלילי ("לגרוע"), וכאשר מסלול השמש נמצא בתחום 180° ועד 360° הקריאה מתבצעת בכיוון מעלה וערכה של מנת המסלול חיובי ("להוסיף"). רצופה בזה טבלה הממחישה את כיוון קריאת הנתונים מהטבלה:

לוח מנת המסלול לשמש - כיוון קריאת הטבלה כאשר מסלול השמש הוא בין 180° ל- 360°						
						30°
						29°
						28°
						27°
						26°
						25°
						24°
						23°
						22°
						21°
						20°
						19°
						18°
						17°
						16°
						15°
						14°
						13°
						12°
						11°
						10°
						9°
						8°
						7°
						6°
						5°
						4°
						3°
						2°
						1°
						0°
330° to 360°	300° to 330°	270° to 300°	240° to 270°	210° to 240°	180° to 210°	← להוסיף

כדרכו שילב הנובר את שתי הטבלאות יחד לטבלה אחת.

ערן רכיב

הבעיה

הבעיה שהעלה איידלר במאמרו היא שלכאורה נתוני הטבלה אינם תואמים את הידע המדעי בתקופתו של הנובר, ואף מדויקים פחות מהערכים שהביא הנובר בחלק שני של ספרו (המתושבים שם על פי המודל הישן שבו השתמש הרמב"ם). בחלק הראשון התיימר הנובר להציג את הנתונים על פי האסטרונומיה המודרנית בתקופתו, ובפועל "כא לתקן ונמצא מקלקל". הכיצד?!

לשם המחשת הבעיה מציג איידלר טבלת השוואה:

מסלול השמש	מנת המסלול			
	Meeus ³² (1900)42	Hanover (1756)	Hanover (ancient astronomy)	Lalande ³³ (1764)
0°	0	0	0	0
10°	1225.2	1318	1260	1229
20°	2410.81	2592	2520	2418.3
30°	3518.74	3784	3660	3529.7
40°	4513.86	4859	4740	4527.8
50°	5365.17	5770	5580	5381.8
60°	6046.92	6503	6300	6065.6
70°	6539.28	7029	6780	6559.3
80°	6828.89	7337	7080	6849.7
90°	6909	7425	7140	6930.1
100°	6779.44	7281	7020	6800.1
120°	5921.65	6350	6060	6465.8
110°	6446.32	6926	6660	5939.5
130°	5222.7	5605	5340	5238.4
140°	4371.37	4689	4500	4384.4
150°	3393.42	3641	3480	3403.5
160°	2317	2490	2400	2328.8
170°	1175.69	1262	1200	1179.3
180°	0	0	0	0

טבלה מס' 1

אפשר לראות שהנתונים שמביא הנובר בעייתיים בחוסר דיוקם!

התאמת נוסחה לערכי הטבלה

כדי לשחזר את הטבלה של הנובר ביצענו שתי בדיקות עיקריות, הראשונה בדיקת התאמה למנת המסלול כפונקציה של המסלול והאקסצנטריות, על פי האסטרונומיה התלמאית,³⁴ והשנייה

32 אסטרונום בלגי יליד 1928.

33 אסטרונום יליד צרפת (1732-1807), ערך את האלמנך הצרפתי בשנים 1759-1774.

34 על פי הנוסחה: $\tan\beta = \frac{e_0 \sin\alpha}{1 + e_0 \sin\alpha}$, התוצאות לא התכנסו עם ערכי שגיאה נמוכים, דבר שמצביע על כך

שחזור וניתוח מתמטי של לוח "מנת המסלול לשמש" מספרו של ר' רפאל הלוי מהנובר

המסתמכת על נוסחה מהאסטרונומיה המודרנית.

הבדיקה העלתה שפילוג התוצאות בטבלה מתאים לחישובי האסטרונומיה המודרנית, אך עם ערך שגוי של אקסצנטריות. להלן נתאר את שיטת העבודה ונציג את השחזור המלא.

השיטה

שלב א

בניית קובץ אקסל המכיל את כל הנתונים המספריים שאותם אנו מעוניינים לבחון.

שלב ב

הגדרת מדדים כדי שנוכל לאפיין מהו הקירוב הטוב ביותר מתוך אוסף האפשרויות.

שלב ג

קביעת תחומי ההרצה והרזולוציה המבוקשת, והרצת המחשב.

שלב ד

מציאת התוצאה הטובה ביותר על פי המדדים שהוגדרו – "מינימום שגיאה" וכדומה.

שלב ה

בחינה וניתוח של התוצאה הגרפית של השגיאות.

הסבר מפורט

בנינו כלי עזר בגיליון אלקטרוני אקסל, המכיל את טבלת הנתונים. כל נתון מסומן כ- X_i . עמודה נוספת מכילה את טבלת התוצאות המספריות שהתקבלו מהחישוב באמצעות נוסחה, כל תוצאה מסומנת כ- Y_i . עמודת ההפרשים $X_i - Y_i$ מבטאת את השגיאה (הפער) בין כל מספר נתון למספר מחושב.

מדדי שגיאה: הגדרנו שלושה מדדים³⁵ לבחינת התוצאה שהתקבלה:

שזו אינה הנוסחה שבה השתמש הנובר בחלק זה של הספר, מקוצר היריעה נמנענו מלהציג תוצאות אלו כאן. תוצאת ההתכנסות הייתה עם $RMS=35$ (השימוש ב- RMS כמדד שגיאה יוסבר בהמשך), הפרשים בתחום של כ- $60\pm$, ואקסצנטריות $e=0.036$. איידלר במאמרו "The Equation of Time in Ancient Astronomy", בד"ר, 16 (2005), עמ' 49 בהערה 134 מוביח שקיים יחס של 2 בין ערכי האקסצנטריות של האסטרונומיה המודרנית מול זו של העת העתיקה $e_{ancients} = 2e_{moderns}$.

תוצאה זו עולה בקנה אחד עם מסקנותינו בהמשך המאמר.

תוצאה זו הוצגה, ככל הנראה לראשונה, ע"י אוטו נויבאוואר בספרו –

Otto Neugebauer, *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, Berlin; New York: Springer-Verlag, 1975, pp. 1101-1102.

35 בפועל כפי שנראה אפשר להסתפק במדד ה- RMS , אבל חשוב היה להראות שיש מתאם בין שלושת המדדים.

ערן רביב

- 'השגיאה המקסימלית' – הערך המוחלט של הפער הגדול ביותר בין הנתון למחושב.

$$\text{MAX}|X_i - Y_i|$$
- 'סך התאמות' – סך הערכים שבהם ערך השגיאה אפס ($X_i - Y_i = 0$).
- **RMS (Root Mean Square)** – מדד זה דומה מאוד לסטיית התקן המקובלת בסטטיסטיקה, אולם בסטיית התקן בודקים את ההפרש ביחס לערך הממוצע, ואילו ב-RMS לוקחים את הפער בין כל שני זוגות (ולא ביחס לממוצע), את התוצאה מעלים בריבוע ומחשבים את השורש הממוצע של סכום התוצאות, כדלהלן:

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - Y_i)^2}$$

נתוני הקלט למבלה:

- טווח שינוי המשתנה/ים – ערך התחלתי = Start, ערך סופי = Stop.
 - רזולוציה – מה גודל השינוי בכל LOOP שהתוכנה מבצעת = Step.
- התוכנה רושמת בכל LOOP את תוצאות מדדי השגיאה ואת ערכם של הפרמטרים, כל התוצאות מוצגות בגרף שממנו אפשר לקבל את התוצאה המבוקשת.

הדגמת הפעולה על נתוני Menu

הנוסחה לחישוב מנת המסלול - C, באסטרונומיה המודרנית היא:³⁶

$$C = (2e - 0.25e^3) \sin(M) + 2.5 e^2 \sin(M) * \cos(M)$$

כאשר M – מסלול השמש, e – אקסצנטריות,³⁷ ו-C Equation of the center ביחידות של ראדיאנים.

נגדיר הפרמטרים:

פרמטר	Start	Stop	step
e	0.0160	0.0170	0.0000100

טבלה מס' 2

זאת אומרת שנשנה את הפרמטר e כפרמטר שישתנה בין 0.016 לבין 0.017 בקפיצות של 0.00001

36 W.M. Smart, *Text Book on Spherical Astronomy*, Cambridge 1962, p. 120 מביא את הפיתוח שבסופו הביטוי $C = (2e - 0.25e^3) \sin(M) + \frac{5}{4} e^2 \sin(2M) + \frac{31}{14} e^3 \sin(3M) \dots$, לאחר הזנחת האיבר השלישי וכמה פעולות פשוטות מגיעים לביטוי שבגוף הטקסט.

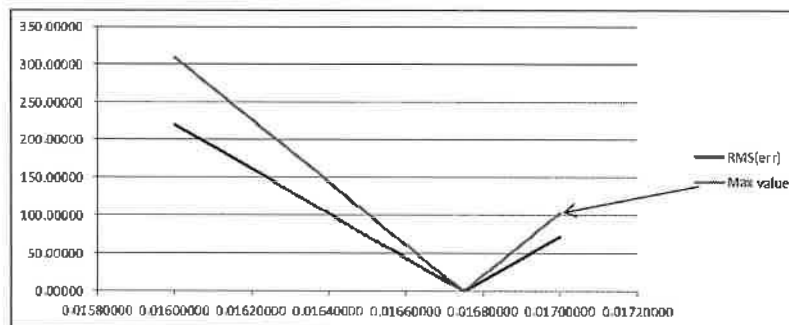
37 ראה הסבר מפורט במאמר של איידלר, "The Equation of Time in Ancient Astronomy" שראה אור ב-"בד"ר 16, עמ' 49 בהערה 134.

שחזור וניתוח מתמטי של לוח "מנת המסלול לשמש" מספרו של ר' רפאל הלוי מהנובר

טבלה מס' 3: טבלת הנתונים עבור ערך ההתחלה, $e=0.016$

מסלול	חישוב ע"י הנוסחה					ערכי Meuns	ריבוע ההפרשים	הפרשים	
	מנת המסלול	מעלות	דקות	שניות	סה"כ בשניות				
M	C								
10	0.324638478	0	19	28	1168	1225.2	57.2	3271.84	
20	0.638847162	0	38	19	2299	2410.81	111.81	12501.4761	
30	0.932581409	0	55	57	3357	3518.74	161.74	26159.8276	
40	1.196546941	1	11	47	4307	4613.86	206.86	42791.0596	
50	1.422526793	1	25	21	5121	5365.17	244.17	59618.9889	
60	1.603654681	1	36	13	5773	6046.92	273.92	75032.1664	
70	1.734623632	1	44	4	6244	6539.28	295.28	87190.2784	
80	1.811823532	1	48	42	6522	6828.89	306.89	94181.4721	
90	1.833406274	1	50	0	6600	6909	309	95481	
100	1.799281893	1	47	57	6477	6779.44	302.44	91469.9536	
110	1.711053061	1	42	39	6159	6446.32	287.32	82552.7824	
120	1.571898136	1	34	18	5658	5921.65	263.65	69511.3225	
130	1.386414883	1	23	11	4991	5222.7	231.7	53684.89	
140	1.160434731	1	9	37	4177	4371.37	194.37	37779.6969	
150	0.900824865	0	54	2	3242	3393.42	151.42	22928.0164	
160	0.615276591	0	36	54	2214	2317	103	10609	
170	0.312096839	0	18	43	1123	1175.69	52.69	2776.2361	
180	2.20127E-16	0	0	0	0	0	0	0	
							RMS	219.5373933	

הסבר: רואים שהערך 0.016 מגיב RMS גבוה, כך שברור שמאוס השתמש בערך אחר. עתה נריץ את הקובץ כאשר e משתנה כגבולות כטבלה 2 לעיל ונקבל:



(ציר X - ערכו של e)

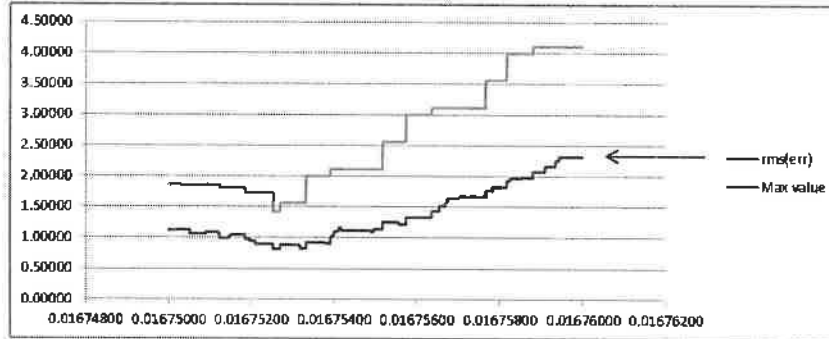
נבדוק מהו ערכו של e בנקודת המינימום ונקבל: $e = 0.0167526$

ערן רביב

נבצע הרצה נוספת באזור מצומצם יותר (ZOOM IN) ברזולוציה גבוהה יותר –

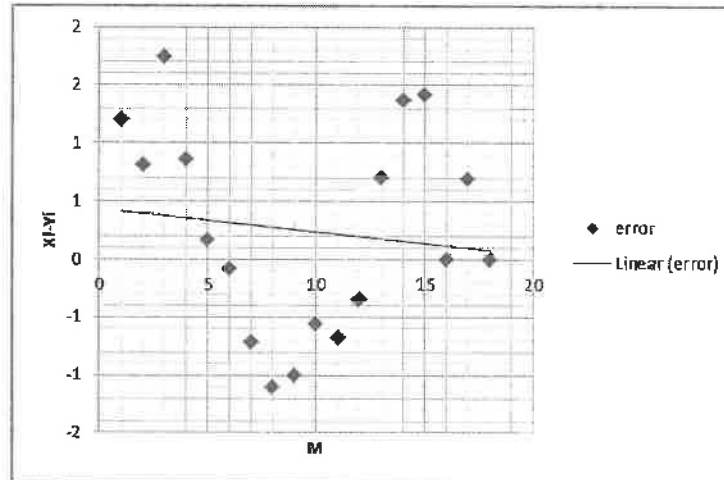
פרמטר	Start	Stop	step
e	0.016750	0.016760	0.0000001

ונקבל:



נבדוק מהו ה- e בנקודת המינימום, ונקבל: 0.0167525

פיזור השגיאות:



שחזור וניתוח מתמטי של לוח "מנת המסלול לשמש" מספרו של ר' רפאל הלוי מהנובר

טבלת הערכים המחושבים מול הנתונים תראה כך:

מסלול	חישוב ע"י הנומחה					ערכי Meuus	הפרשים	ריבוע ההפרשים
	מנת המסלול	מעלות	זקות	שניות	סה"כ בשניות			
M	C							
10	0.340214399	0	20	24	1224	1225.2	1.2	1.44
20	0.669471265	0	40	10	2410	2410.81	0.81	0.6561
30	0.977220818	0	58	37	3517	3518.74	1.74	3.0276
40	1.253707378	1	15	13	4513	4513.86	0.86	0.7396
50	1.490314616	1	29	25	5365	5365.17	0.17	0.0289
60	1.67985334	1	40	47	6047	6046.92	-0.08	0.0064
70	1.816779937	1	49	0	6540	6539.28	-0.72	0.5184
80	1.897338828	1	53	50	6830	6828.89	-1.11	1.2321
90	1.919627748	1	55	10	6910	6909	-1	1
100	1.88358975	1	53	0	6780	6779.44	-0.56	0.3136
110	1.790940122	1	47	27	6447	6446.32	-0.68	0.4624
120	1.645039452	1	38	42	5922	5921.65	-0.35	0.1225
130	1.450725723	1	27	2	5222	5222.7	0.7	0.49
140	1.214118485	1	12	50	4370	4371.37	1.37	1.8769
150	0.94240693	0	56	32	3392	3393.42	1.42	2.0164
160	0.64363145	0	38	37	2317	2317	0	0
170	0.326465321	0	19	35	1175	1175.69	0.69	0.4761
180	2.30258E-16	0	0	0	0	0	0	0
RMS								0.89464456

אם עושים "Zoom in" פנימה עבור $e=0.016751$, מתקבל $RMS = 0.7028$

ניסיון שחזור טבלת הנובר

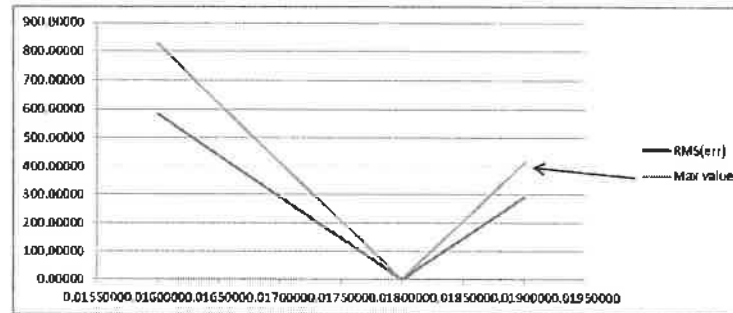
באופן דומה למוצג לעיל, ננסה לשחזר את ערכי הנובר, תחילה רק על הטבלה המצומצמת (בקפיצות של 10 מעלות), ובשלב השני נפעיל את תוצאות השלב הראשון על כל נתוני טבלת הנובר.

נתחיל בחיפוש גם בתחום -

פרמטר	Start	Stop	step
e	0.016000	0.019000	0.00010000

ערך רכיב

והתקבלה תוצאה כדלהלן:

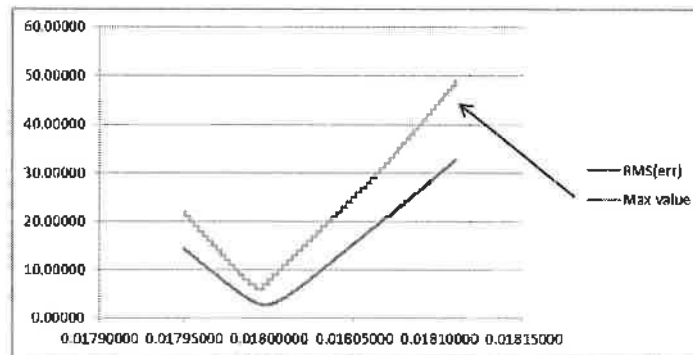


רואים שבאזור של $e = 0.018$, מדדי השגיאה מתקרבים לאפס.

נערוך חיפוש "עדין" בתחום המינימום -

פרמטר	Start	Stop	step
e	0.017950	0.018110	0.00000001

ונקבל:



בבדיקה מסתבר שערך המינימום הוא בסביבות: $e = 0.01799$

שחזור וניתוח מתמטי של לוח "מנת המסלול לשמש" מספרו של ר' רפאל הלוי מהנובר

נציב את ערכו של e , וטבלת הערכים המחושבים מול הנתונים תראה כך:

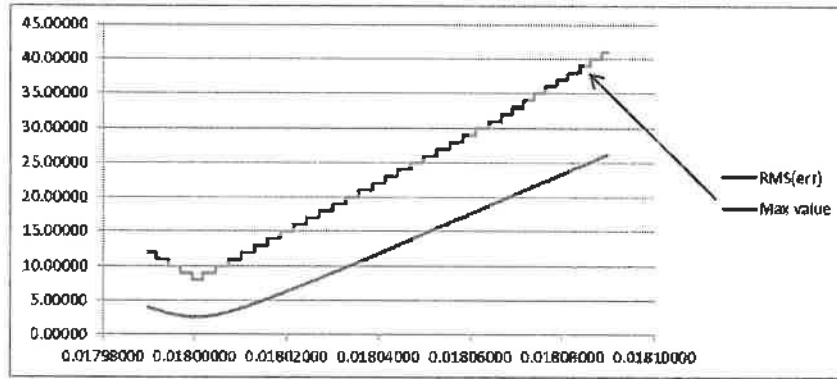
מסלול	חישוב ע"י הנוסחה					ערכי הנובר	הפרשים	ריבוע ההפרשים	
	M	C	מעלות	דקות	שניות				סה"כ בשניות
10	0.365889299	0	21	57	1317	1318	1	1	
20	0.719945919	0	43	11	2591	2592	1	1	
30	1.05078299	1	3	2	3782	3784	2	4	
40	1.347881304	1	20	52	4852	4859	7	49	
50	1.601965251	1	36	7	5767	5770	3	9	
60	1.80531462	1	48	19	6499	6503	4	16	
70	1.95199917	1	57	7	7027	7029	2	4	
80	2.038028856	2	2	16	7336	7337	1	1	
90	2.061418749	2	3	41	7421	7425	4	16	
100	2.022173476	2	1	19	7279	7281	2	4	
110	1.922200803	1	55	19	6919	6926	7	49	
120	1.765167389	1	45	54	6354	6350	-4	16	
130	1.556311504	1	33	22	5602	5605	3	9	
140	1.302227557	1	18	8	4688	4689	1	1	
150	1.010635759	1	0	38	3638	3641	3	9	
160	0.690147552	0	41	24	2484	2490	6	36	
170	0.350033919	0	21	0	1260	1262	2	4	
180	2.46875E-16	0	0	0	0	0	0	0	
RMS							3.566822427		

מסקנות ביניים:

1. הנובר אכן השתמש בנוסחה השאובה מהאסטרונומיה המודרנית (ראה הערה 34 לעיל).
2. הנובר השתמש בערך הקרוב ל- $e = 0.01799$.
3. צריך לבדוק התאמה לכל נתוני הטבלה.
4. צריך לברר מהיכן לקח את ערכו השגוי של e .

ערן רכיב

שלב ב – בדיקת התאמה עבור כל ערכי הטבלה של הנובר
לאחר הצבת כל נתוני הנובר והרצת הנתונים התקבלו תוצאות דומות, כדלהלן:



גם כאן נמצא שערכו של e המתאים למודי שגיאה במינימום של 0.0179996.

שחזור וניתוח מתמטי של לוח "מנת המסלול לשמש" מספרו של ר' רפאל הלוי מהנובר

נציב את ערכו של e , וטבלת הערכים המחושבים מול הנתונים תיראה כך:

חישוב ע"י הנוסחה							הנובר 1756	ריבוע ההפרשים	הפרשים
מסלול אס"י עתיקה	מסלול	מנת המסלול				סה"כ בשניות			
β	M	C	מעלות	דקות	שניות				
1	179	0.035186115	0	2	6	126	127	1	1
2	178	0.070362252	0	4	13	253	254	1	1
3	177	0.105518435	0	6	19	379	381	2	4
4	176	0.140644692	0	8	26	506	506	0	0
5	175	0.175731058	0	10	32	632	633	1	1
6	174	0.210767577	0	12	38	758	758	0	0
7	173	0.245744302	0	14	44	884	883	-1	1
8	172	0.2806513	0	16	50	1010	1010	0	0
9	171	0.315478653	0	18	55	1135	1137	2	4
10	170	0.35021646	0	21	0	1260	1262	2	4
11	169	0.384854839	0	23	5	1385	1388	3	9
12	168	0.41938393	0	25	9	1509	1512	3	9
13	167	0.453793896	0	27	13	1633	1637	4	16
14	166	0.488074927	0	29	17	1757	1761	4	16
15	165	0.522217239	0	31	19	1879	1885	6	36
16	164	0.55621108	0	33	22	2002	2008	6	36
17	163	0.590046729	0	35	24	2124	2126	2	4
18	162	0.6237145	0	37	25	2245	2245	0	0
19	161	0.657204744	0	39	25	2365	2369	4	16
20	160	0.69050785	0	41	25	2485	2490	5	25
21	159	0.72361425	0	43	25	2605	2608	3	9
22	158	0.756514416	0	45	23	2723	2727	4	16
23	157	0.789198869	0	47	21	2841	2838	-3	9
24	156	0.821658176	0	49	17	2957	2959	2	4
25	155	0.853882954	0	51	13	3073	3075	2	4
26	154	0.885863873	0	53	9	3189	3190	1	1
27	153	0.917591657	0	55	3	3303	3304	1	1
28	152	0.949057086	0	56	56	3416	3421	5	25
29	151	0.980251001	0	58	48	3528	3526	-2	4
30	150	1.011164302	1	0	40	3640	3641	1	1
31	149	1.041787954	1	2	30	3750	3751	1	1
32	148	1.072112988	1	4	19	3859	3858	-1	1
33	147	1.102130502	1	6	7	3967	3967	0	0
34	146	1.131831666	1	7	54	4074	4074	0	0
35	145	1.161207721	1	9	40	4180	4183	3	9
36	144	1.190249984	1	11	24	4284	4283	-1	1
37	143	1.218949851	1	13	8	4388	4385	-3	9
38	142	1.247298794	1	14	50	4490	4487	-3	9
39	141	1.27528837	1	16	31	4591	4589	-2	4
40	140	1.302910219	1	18	10	4690	4689	-1	1
41	139	1.33015607	1	19	48	4788	4789	1	1

ערן רביב

42	138	1.357017738	1	21	25	4885	4884	-1	1
43	137	1.383487131	1	23	0	4980	4980	0	0
44	136	1.409556251	1	24	34	5074	5075	1	1
45	135	1.435217196	1	26	6	5166	5167	1	1
46	134	1.460462161	1	27	37	5257	5257	0	0
47	133	1.485283445	1	29	7	5347	5346	-1	1
48	132	1.509673448	1	30	34	5434	5434	0	0
49	131	1.533624676	1	32	1	5521	5521	0	0
50	130	1.557129742	1	33	25	5605	5605	0	0
51	129	1.580181372	1	34	48	5688	5690	2	4
52	128	1.602772402	1	35	9	5769	5771	2	4
53	127	1.624895784	1	37	29	5849	5852	3	9
54	126	1.646544588	1	38	47	5927	5929	2	4
55	125	1.667712003	1	40	3	6003	6003	0	0
56	124	1.68839134	1	41	18	6078	6074	-4	16
57	123	1.708576036	1	42	30	6150	6144	-6	36
58	122	1.728259651	1	43	41	6221	6215	-6	36
59	121	1.747435878	1	44	50	6290	6284	-6	36
60	120	1.76609854	1	45	57	6357	6350	-7	49
61	119	1.784241592	1	47	3	6423	6415	-8	64
62	118	1.801859128	1	48	6	6486	6488	2	4
63	117	1.818945377	1	49	8	6548	6549	1	1
64	116	1.835494711	1	50	7	6607	6609	2	4
65	115	1.851501642	1	51	5	6665	6666	1	1
66	114	1.866960831	1	52	1	6721	6721	0	0
67	113	1.881867081	1	52	54	6774	6775	1	1
68	112	1.896215347	1	53	46	6826	6826	0	0
69	111	1.910000737	1	54	36	6876	6884	8	64
70	110	1.923218508	1	55	23	6923	6926	3	9
71	109	1.935864077	1	56	9	6969	6968	-1	1
72	108	1.947933017	1	56	52	7012	7011	-1	1
73	107	1.959421059	1	57	33	7053	7053	0	0
74	106	1.970324099	1	58	13	7093	7093	0	0
75	105	1.980638194	1	58	50	7130	7130	0	0
76	104	1.990359569	1	59	25	7165	7165	0	0
77	103	1.999484615	1	59	58	7198	7197	-1	1
78	102	2.008009893	2	0	28	7228	7228	0	0
79	101	2.015932135	2	0	57	7257	7256	-1	1
80	100	2.023248248	2	1	23	7283	7281	-2	4
81	99	2.029955311	2	1	47	7307	7305	-2	4
82	98	2.036050581	2	2	9	7329	7329	0	0
83	97	2.041531495	2	2	29	7349	7349	0	0
84	96	2.046395668	2	2	47	7367	7368	1	1
85	95	2.050640897	2	3	2	7382	7382	0	0
86	94	2.054265163	2	3	15	7395	7395	0	0

שחזור וגיתוח מתמטי של לוח "מנת המסלול לשמש" מספרו של ר' רפאל הלוי מהנובר

87	93	2.057266631	2	3	26	7406	7406	0	0
88	92	2.059643651	2	3	34	7414	7415	1	1
89	91	2.061394763	2	3	41	7421	7421	0	0
90	90	2.062518694	2	3	45	7425	7425	0	0
91	89	2.063014362	2	3	46	7426	7425	0	0
92	88	2.062880876	2	3	46	7426	7424	-2	4
93	87	2.062117537	2	3	43	7423	7423	0	0
94	86	2.060723841	2	3	38	7418	7418	0	0
95	85	2.058699478	2	3	31	7411	7407	-4	16
96	84	2.056044334	2	3	21	7401	7399	-2	4
97	83	2.05275849	2	3	9	7389	7386	-3	9
98	82	2.048842227	2	2	55	7375	7374	-1	1
99	81	2.044296022	2	2	39	7359	7357	-2	4
100	80	2.039120554	2	2	20	7340	7337	-3	9
101	79	2.033316698	2	1	59	7319	7319	0	0
102	78	2.026885531	2	1	36	7296	7296	0	0
103	77	2.019828332	2	1	11	7271	7269	-2	4
104	76	2.01214658	2	0	43	7243	7241	-2	4
105	75	2.003841954	2	0	13	7213	7211	-2	4
106	74	1.994916337	1	59	41	7181	7181	0	0
107	73	1.985371814	1	59	7	7147	7146	-1	1
108	72	1.975210672	1	58	30	7110	7109	-1	1
109	71	1.964435399	1	57	51	7071	7070	-1	1
110	70	1.953048686	1	57	10	7030	7029	-1	1
111	69	1.941053428	1	56	27	6987	6987	0	0
112	68	1.928452719	1	55	42	6942	6942	0	0
113	67	1.915249856	1	54	54	6894	6895	1	1
114	66	1.901448338	1	54	5	6845	6845	0	0
115	65	1.887051864	1	53	13	6793	6792	-1	1
116	64	1.872064335	1	52	19	6739	6739	0	0
117	63	1.856489848	1	51	23	6683	6683	0	0
118	62	1.840332705	1	50	25	6625	6624	-1	1
119	61	1.8235974	1	49	24	6564	6563	-1	1
120	60	1.80628863	1	48	22	6502	6503	1	1
121	59	1.788411285	1	47	18	6438	6439	1	1
122	58	1.769970453	1	46	11	6371	6373	2	4
123	57	1.750971414	1	45	3	6303	6305	2	4
124	56	1.731419643	1	43	53	6233	6235	2	4
125	55	1.711320806	1	42	40	6160	6163	3	9
126	54	1.690680761	1	41	26	6086	6087	1	1
127	53	1.669505554	1	40	10	6010	6012	2	4
128	52	1.647801419	1	38	52	5932	5933	1	1
129	51	1.625574775	1	37	32	5852	5853	1	1
130	50	1.602832227	1	36	10	5770	5770	0	0
131	49	1.57958056	1	34	46	5686	5691	5	25

ערן רביב

132	48	1.555826742	1	33	20	5600	5606	6	36
133	47	1.531577918	1	31	53	5513	5519	6	36
134	46	1.50684141	1	30	24	5424	5430	6	36
135	45	1.481624714	1	28	53	5333	5338	5	25
136	44	1.455935499	1	27	21	5241	5245	4	16
137	43	1.429781603	1	25	47	5147	5151	4	16
138	42	1.403171031	1	24	11	5051	5055	4	16
139	41	1.376111954	1	22	34	4954	4958	4	16
140	40	1.348612704	1	20	55	4855	4859	4	16
141	39	1.320681773	1	19	14	4754	4760	6	36
142	38	1.292327811	1	17	32	4652	4657	5	25
143	37	1.263559621	1	15	48	4548	4553	5	25
144	36	1.234386158	1	14	3	4443	4447	4	16
145	35	1.204816524	1	12	17	4337	4340	3	9
146	34	1.174859968	1	10	29	4229	4232	3	9
147	33	1.14452588	1	8	40	4120	4121	1	1
148	32	1.11382379	1	6	49	4009	4010	1	1
149	31	1.082763361	1	4	57	3897	3897	0	0
150	30	1.051354392	1	3	4	3784	3784	0	0
151	29	1.019606809	1	1	10	3670	3668	-2	4
152	28	0.987530663	0	59	15	3555	3553	-2	4
153	27	0.955136128	0	57	18	3438	3437	-1	1
154	26	0.922433497	0	55	20	3320	3320	0	0
155	25	0.889433176	0	53	21	3201	3200	-1	1
156	24	0.856145684	0	51	22	3082	3079	-3	9
157	23	0.822581645	0	49	21	2961	2960	-1	1
158	22	0.788751788	0	47	19	2839	2839	0	0
159	21	0.754666941	0	45	16	2716	2716	0	0
160	20	0.720338028	0	43	13	2593	2592	-1	1
161	19	0.685776066	0	41	8	2468	2468	0	0
162	18	0.650992155	0	39	3	2343	2342	-1	1
163	17	0.615997484	0	36	57	2217	2216	-1	1
164	16	0.580803318	0	34	50	2090	2090	0	0
165	15	0.545420999	0	32	43	1963	1962	-1	1
166	14	0.509861937	0	30	35	1835	1834	-1	1
167	13	0.474137613	0	28	26	1706	1706	0	0
168	12	0.438259568	0	26	17	1577	1577	0	0
169	11	0.402239401	0	24	8	1448	1448	0	0
170	10	0.366088766	0	21	57	1317	1318	1	1
171	9	0.329819365	0	19	47	1187	1187	0	0
172	8	0.293442945	0	17	36	1056	1058	2	4
173	7	0.256971296	0	15	25	925	926	1	1
174	6	0.220416242	0	13	13	793	794	1	1
175	5	0.183789639	0	11	1	661	662	1	1
176	4	0.14710337	0	8	49	529	529	0	0

שחזור וניתוח מתמטי של לוח "מגת המסלול לשמש" מספרו של ר' רפאל הלוי מהנובר

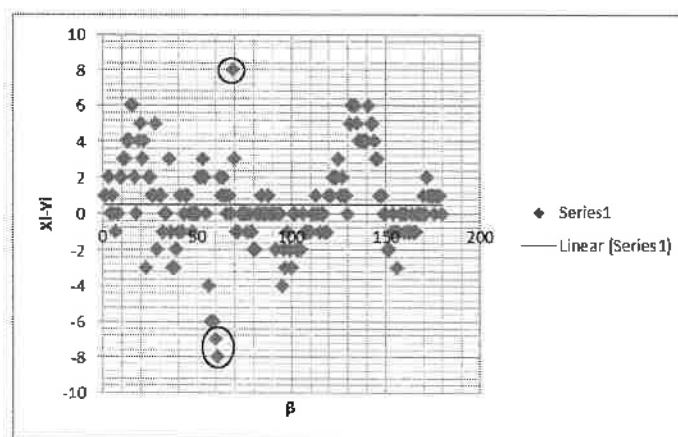
177	3	0.110369341	0	6	37	397	398	1	1
178	2	0.073599477	0	4	24	264	265	1	1
179	1	0.036805714	0	2	12	132	133	1	1
180	0	0	0	0	0	0	0	0	0
								RMS	2.523225

הערות:

1. התקבלו 51 התאמות מלאות בין הנתונים המחושבים לערכים שנוקט הנובר בטבלה.
2. עבור $\beta = 1$, נפלה שגיאה בטבלת הנובר תחת 172 צ"ל 127 (הנובר מתקן בעצמו בלוח טעויות שבסוף הספר³⁶); עבור $\beta = 59$, נפלה שגיאה בטבלת הנובר: תחת 6254 צ"ל 6284 (השערה שלי, וראה בגרף שלהלן 3 נקודות חשודות נוספות).

גרף פיזור ההפרשים:

(הערה: הנקודות המוקפות – נקודות חשודות כשגיאות רפוס).



38 ראה הערה 23 לעיל.

מסקנות:

1. הצלחנו לשחזר את הנוסחה העומדת מאחורי טבלת הנובר, עד כדי קירוב טוב.
2. לאור חקירתו של איידלר, כמעט לא יעלה על הדעת שהנובר נקט ערך גס כל כך של e – איידלר מצא שבזמנו של הנובר הערך המקובל עבור האקסצנטריות אצל האסטרונומים שעמדו בחזית המדע היה 0.0168027^{39} .
3. מכיוון שכל הטבלה של הנובר "מוסטת", סביר שטעות נפלה בחישובי הביניים של ערך האקסצנטריות. ועל כגון דא נאמר בתהילים "שגיאות מי יבין...".

השערת מקור הטעות

מכיוון שבתקופתו של הנובר לא היו מחשבים, בוצעו כל החישובים באופן ידני⁴⁰ ארוך ומייגע.

כדי להקל על החישובים אפשר לשער שהנובר העדיף לייצג מספרים נמוכים מ-1, באמצעות שימוש בשבר של שני מספרים שלמים.⁴¹

Continued Fraction

בעזרת תורת ה"שברים המשולבים" אפשר למצוא את המספרים השלמים שמנתם נותנת בקירוב הולך וגדל ערך מספרי מבוקש כלשהו.

39 הערך שנקב בו Lalande בשנת 1750. בשנת 1685 La Hire ו- Flamsteed נקבו בערך 0.01685 .
 40 סביר להניח שהמבר היה נגיש למכונת חישוב מכאנית שהמציא לייבניץ החל משנת 1670, והכניס בה שיפורים במהלך השנים. לייבניץ עצמו צורף ל-Royal Society כאפריל 1673 עקב הצגת המכונה בפני הוועדה. המכונות הורכבו בעיקר ע"י שני מומתה בשם אוליבר, ונקראו Stepped Reckoner – *staffelwalze*. המכונות ביצעו ארבע פעולות חשבון והוצאת שורש ריבועי (בניגוד למכונה של פסקל שביצעה רק פעולות חיבור וחיסור):



מכונת לייבניץ מסוף המאה ה-17 ראה:

<http://history-computer.com/MechanicalCalculators/Pioneers/Lebniz.html>

41 פעולות החשבון נעשו ע"י לוגריתמים, והרבה יותר קל לבצע פעולות על שלמים מאשר על מספר עם כמה ספרות אחרי הנקודה. משני ספריו של הנובר בגרמנית (ראה בהקדמה של איידלר) עולה שהנובר היה מימחה מדרגה ראשונה בשימוש בפעולות חשבון לוגריתמיות (שם בעיקר בפעולות חישוב כלכליות לניהול ספרי חשבונות), ולכן סביר שהעדיף לייצג את e כשבר של מספרים שלמים. המעבר לחישוב בלוגריתמים הופך כפל לחיבור וחלוקה לחיסור.

שחזור וניתוח מתמטי של לוח "מנת המסלול לשמש" מספרו של ר' רפאל הלוי מהנובר

נפעיל את השיטה עבור $e = 0.0168027$ ונקבל את הזוגות הבאים:

מונה	מכנה
2	119
35	2083
667	39696
702	41779
4879	290370
15339	912889
50896	3029037
117131	6970963
168027	10000000

ככל שנבחר זוג ממקום נמוך ביותר בטבלה הדיוק יהיה גבוה יותר אך הסרבול במספרים גבוהים יגדל בהתאם.

השערה:

אחת התוצאות שמקיימות מצד אחד דיוק גבוה ומצד שני המספרים שהם עדיין סבירים באורכם

$$\frac{702}{41779} = 0.0168026999 \text{ - הוא הזוג -}$$

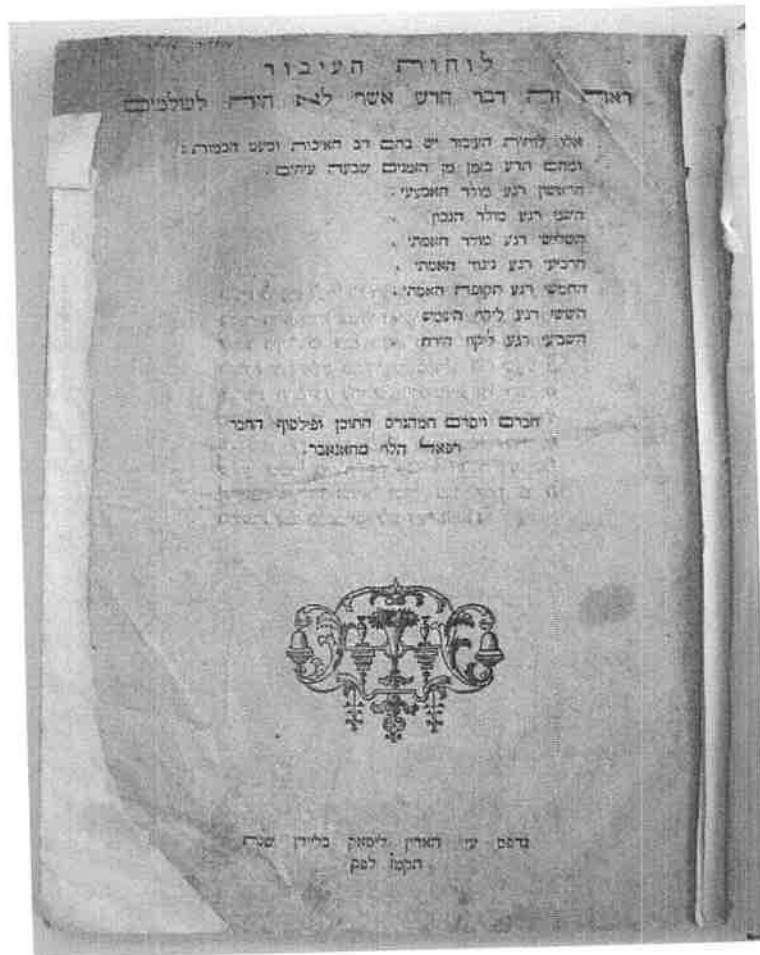
ערך הקרוב מאוד לערך של Lalande, טעות סופר קטנה ואפשר לקרוא את המונה כ-752 תחת

$$\frac{752}{41779} = 0.0179994734 \text{ - לערך של } e \text{ לערך של } -$$

זו כמובן השערה בעלמא והבעיה נותרה עדיין ב"צריך עיון".

ערן רביב

העתק השער מהמהדורה הראשונה (ללא תיקון):



שער לוחות העיבור – בכתיב מלא, עיבור באות יו"ד

שחזור וניתוח מתמטי של לוח "מנת המסלול לשמש" מספרו של ר' רפאל הלוי מהנובר

העתק השער מהמהדורה המתוקנת:



שער לוחות העבור – ללא האות יו"ד

אורך השנה השמשית על פי הנובר

מטבלאות לוח היתרונות של הנובר⁴² אפשר להסיק מהו הערך שהשתמש בו לאורכה של השנה השמשית.

42 לוחות העבור חלק א.

ערן רביב

19 שנות המחזור בלוח העברי מגדירות את "שנת רב אדא" (= 235 חודשים לחלק ל- 19).

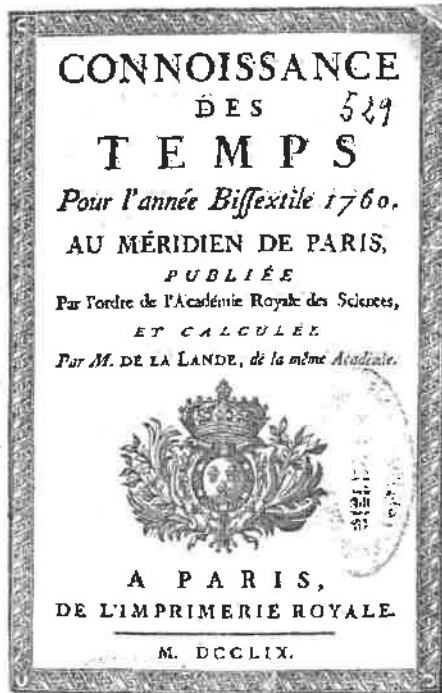
נסמן באות S את אורכה של השנה הטרופית על פי הנובר.
 879976 – תיקון הנובר ל-400 מחזורים (בחלקים).
 765433 – כט, יב, תשצג (בחלקים).
 4303.6 – ערך הנובר לתיקונים של 400 מחזורים (בחלקים)

והחישוב יהיה:

$$S = \text{שנת רב אדא} + \frac{-(879976+4303.6)}{400 \cdot 19} = \frac{235 \cdot 765433}{19} - \frac{884279.6}{400 \cdot 19} = 9467081.2790 \text{ parts}$$

לאחר המרה לימים מתקבל: 365d,5h,48m,57.596s

האלמנך הצרפתי



חלוץ האלמנכים היה האלמנך הצרפתי שהחל להופיע לקראת סוף המאה ה-17. באמצע המאה ה-18 אנו מוצאים מדי שנים אחדות ערכים שונים לאורכה של השנה הטרופית, ובאלמנך הצרפתי משנת 1760 (עמ' 166) רואים כמה אורכים של השנה הטרופית, בהתאם לערכים שקבעו אסטרונומים שונים. מבדיקה מסתבר ביותר שהנובר בחר את הערך של ג'ון פלמסטיד⁴³ (Flamsteed).

עמוד השער של האלמנך הצרפתי לשנת 1760

43 בשנת 1675 התמנה פלמסטיד למשרת האסטרונום המלכותי של אנגליה (הראשון). ונחשב כאחד המומחים הגדולים בתחום.

DE LA LONGITUDE DU SOLEIL

2. Colonne de la seconde page de chaque mois.

L'Écliptique, c'est-à-dire, le Cercle que le Soleil nous semble décrire en une année dans le Ciel, à cause du mouvement de la Terre, est divisé en douze parties égales, qui sont les douze Signes; chaque Signe contient 30 degrés: on trouve dans la seconde page de chaque mois la longitude du Soleil, comptée d'Occident en Orient sur l'Écliptique depuis l'Équinoxe du Printemps, en signes, degrés, minutes & secondes pour le Midi vrai de chaque jour au Méridien de Paris. Cette longitude sert aux Astronomes dans presque toutes leurs Observations, & nous l'avons calculée avec toute l'exacritude nécessaire pour leurs opérations.

Les nouvelles Tables du Soleil de M. l'Abbé de la Caille, sur lesquelles nous avons fait les calculs de ce Livre, diffèrent assez des Tables imprimées jusqu'à ce jour, pour qu'il faille en indiquer les différences.

1.° La durée de l'année y est supposée 365^d 5^h 48' 49"

M. Cassini dans ses Tables la suppose 365. 5. 48. 52

M. Halley 365. 5. 48. 54 $\frac{2}{3}$

M. Flamsteed 365. 5. 48. 57 $\frac{2}{3}$

2.° La plus grande équation est ici . . 1^d 55' 31",6

M. Cassini l'a fait dans ses Tables . . . 55. 51

M. Halley & M. Flamsteed 56. 20

3.° La longitude moyenne en 1760 est ici 9^d 10^d 34' 53"

Dans les Tables de M. Cassini . . . 9. 10. 34. 43

שם בעמוד 166 נספח לגבי אורך השנה השמשית.