

ערן רביב

המבנה המתמטי של לוח ארבעה שערים וחישובי שכיחויות בלוח העברי

במאמרים קודמים (”לוחות ושברי לוחות” – על מולדות ותכונותיהם”, בד”ד 22, “בין ארבעה שערים ללוח יס”א ראשים” – הצעה חדשה למציאת סימני הקביעות בעזרת לוח 16 שורות”, בד”ד 26 ו”לוח 213 ראשים”, בד”ד 27) הראינו שעל מנת לחשב את השכיחות של סוגי השנים בלוח העברי, יש צורך להביא בחשבון שמולד ראש מחזור לא יכול לחול בכל חלק וחלק מחלקי השבע. כמו כן הצענו לוח יס”א ראשים עם “גבולות מתוקנים” כך שניתן יהיה לחשב באמצעותו את השכיחות המדויקת של סימני השנים בלוח העברי. במאמר זה נדון בלוח ארבעה שערים – לוח קדום מימי הגאונים.

בחלקו הראשון של המאמר נסביר כיצד בנוי לוח ארבעה שערים. אבני היסוד של הלוח נובעים מניתוח של צירופי השנים במחזור י”ט. ננתח כל צירוף כיחידה עצמאית, ונבנה את הלוח.

בחלקו השני של המאמר נציג שיטה שבעזרתה נסיק אילו שינויים עלינו להחיל על אבני הבניין של לוח ארבעה שערים כדי למצוא את היקרויות סימני השנה בכל אבן בניין, ולבסוף, נרכיב לוח ארבעה שערים מורחב המכיל בתוכו את ההיקרויות של סימני השנה, כך שגם באמצעותו נוכל לחשב את שכיחויות סימני השנה.

חלק א': בניית לוח ארבעה שערים¹

גאוני בכל הנהיגו במאה התשיעית, את מציאת קביעות השנה רק על סמך מולד תשרי, וידיעת מספר השנה במחזור הירחי של 19 שנות המחזור, ללא צורך בידיעה ויישום של כללי “הרחיות”.

סימן השנה

סימן השנה הוא “קור” בן 3 אותיות, המכיל בתמצית את אפיונה של השנה. האות הראשונה מציינת את היום בשבוע בו חל א' של ראש השנה, האות השנייה מציינת את מספר הימים בחדשי מרחשוון וכסלו (ח – חסרה, מרחשוון וכסלו בני 29 ימים כל אחד), (כ – כסדרה,

1 החוצאות שמוצגות במאמר זה הן חלק מעבודת מחקר רחבה יותר בהנחיית פרופ' עלי מרצבך, מהמחלקה למתמטיקה, אוניברסיטת בר-אילן. חלק מהתוצאות אלו הוצגו בכנס תורה ומדע ה-19, שהתקיים באוניברסיטת בר-אילן, תשע”ב.

ערן רביב

מרחשוון 29, כסלו 30 ימים), (ש – שלמה, מרחשוון וכסלו בני 30 ימים כל אחר), וזהאות השלישית מציינת את היום בו חל פסח.

כיוון שבלוח העברי יש 14 סוגים שונים של קביעות, לכן לאחר ידיעת סימן השנה ניתן לעיין באחת מתוך 14 טבלאות מוכנות המפרטות את כל תאריכי השנה ואת המידע הנוסף הנחוצ.²

לוח ארבעה שערים

הלוח מבוסס על מציאת גבולות תשרי של כל שנה משנות המחזור, שבהם סימן השנה משתנה. בשיטה הקלאסית חישוב סימן השנה מצריך סדרה של חישובים:

- מציאת מולד תשרי של השנה המבוקשת.
- מציאת מולד תשרי של השנה העוקבת.
- החלת הדחיות על שתי השנים ומציאת יום ראש השנה בכל אחת מהן.
- חישוב הימים שבין שני ראשי השנים לצורך מציאת אורכם של חודשי מרחשוון וכסלו.

למציאת סימן השנה בעזרת לוח ארבעה שערים דרושים לנו שני נתונים בלבד:

- מולד תשרי של השנה המבוקשת.
- מספר השנה במחזור י"ט.

עיון בטבלה בשורה המתאימה יניב באופן מיידי את סימן השנה המבוקשת.

על מנת להבין את המבנה הלוגי של לוח זה, נבחן את המבנה הפנימי של מחזור 19 השנים בלוח העברי.

הערה: לאורך כל המאמר שיטת העבודה היא "בחלקים" כלומר את כל הפעולות החשבוניות אנו מבצעים בחלקים ורק את התוצאות הסופיות אנו ממירים שוב לכתוב המקובל של "יום", "שעה" ו"חלק".

2 להרחבה ראה: שר-שלום, רחמים. תשס"ט. שערים ללוח העברי. מוסד הרב קוק: ירושלים.

המבנה המתמטי של לוח ארבעה שערים וחישובי שכיתויות כלוח העברי

המבנה הפנימי של מחזור י"ט שנים

כפי שניתן לראות להלן ניתן להגדיר ארבעה "רצפים" כשבכל רצף שלוש שנים, כולהלן:

שנת תמוז	פ,מ,פ	מ,פ,מ	פ,פ,מ	מ,פ,מ
1	1	1	19	1
2	2	2	1	2
3	3	3	2	3
4	4	4	3	4
5	5	5	4	5
6	6	6	5	6
7	7	7	6	7
8	8	8	7	8
9	9	9	8	9
10	10	10	9	10
11	11	11	10	11
12	12	12	11	12
13	13	13	12	13
14	14	14	13	14
15	15	15	14	15
16	16	16	15	16
17	17	17	16	17
18	18	18	17	18
19	19	19	18	19
	1			

(מקראה: פ – פשוטה, מ – מעוברת, *פ – פשוטה אחר מעוברת).

- פ, *פ, מ (פשוטה בין פשוטה ומעוברת) [שנים: 2,5,10,13,16]
- מ, *פ, פ (פשוטה בין מעוברת ופשוטה) [שנים: 2,4,9,12,15]
- מ, *פ, מ (פשוטה בין 2 מעוברות) [שנים: 7,18]
- פ, מ, פ (מעוברת לעולם בין 2 פשוטות) [שנים: 3,6,8,11,14,17,19]

השנה הנברקת היא האות האמצעית ברצף לעיל.

ערן רביב

אם נסדר את סוגי השנים לפי האפשרויות השונות של צירופים נקבל:

ברצף פשוטה-מעוברת-פשוטה נקבל את השנים –

2	5	7	10	13	16	18
3	6	8	11	14	17	19
4	7	9	12	15	18	1

ברצף פשוטה-פשוטה-מעוברת נקבל את השנים –

1	4	9	12	15
2	5	10	13	16
3	6	11	14	17

ברצף מעוברת-פשוטה-פשוטה נקבל את השנים –

19	3	8	11	14
1	4	9	12	15
2	5	10	13	16

ברצף מעוברת-פשוטה-מעוברת נקבל את השנים –

6	17
7	18
8	19

העולה מכך, שעל מנת לבדוק את סימני כל 19 שנות המחזור נוכל להסתפק בבדיקת 4 שנים בלבד כשכל אחת מהן תלמד לא רק על עצמה אלא על התנהגות כל יתר השנים השייכות לאותו רצף.

לדוגמה בדיקת השתנות סימן השנה של השנה ה-2 במחזור, על פני חלקי השבוע, תלמד אותנו על השתנות סימן כל הדומות לה, קרי – השנים 5,10,13,16.

בדיקת השתנות סימן השנה בארבעת הרצפים

נבצע בדיקה נפרדת עבור כל "רצף" מארבעת הרצפים שלעיל, ונקבל טבלאות כלהלן:

3 בדיקה הכוונה – בדיקת השתנות סימן השנה, "במשך" כל חלקי השבוע (181440).

המבנה המתמטי של לוח ארבעה שיערים וחישובי שכיחויות בלוח העברי

עבור הרצף הראשון פ*, פ, מ, נקבל:

טבלה מס' 1

חלקים	שנה 2	פריסת גבולות		
		יום	שעה	חלק
19440	בחג	0	18	0
35844	בשה	1	9	204
71280	גכה	2	18	0
87684	הכז	3	9	204
139524	השא	5	9	204
149040	זחא	5	18	0
165444	זשג	6	9	204

עבור הרצף השני מ, פ*, פ, נקבל:

טבלה מס' 2

חלקים	שנה 1	פריסת גבולות		
		יום	שעה	חלק
19440	בחג	0	18	0
35844	בשה	1	9	204
68629	גכה	2	15	589
87684	הכז	3	9	204
139524	השא	5	9	204
149040	זחא	5	18	0
155928	זשג	6	0	408

עבור הרצף השלישי מ, פ*, מ, נקבל:

טבלה מס' 3

חלקים	שנה 7	פריסת גבולות		
		יום	שעה	חלק
19440	בחג	0	18	0
35844	בשה	1	9	204
68629	גכה	2	15	589
87684	הכז	3	9	204
139524	השא	5	9	204
149040	זחא	5	18	0
165444	זשג	6	9	204

עבור הרצף הרביעי פ, מ, פ, נקבל:

טבלה מס' 4

חלקים	שנה 3	פריסת גבולות		
		יום	שעה	חלק
19440	בחח	0	18	0
48011	בשז	1	20	491
71280	גכז	2	18	0
97200	החא	3	18	0
116255	השג	4	11	695
149040	זחג	5	18	0
177611	זשה	6	20	491

ערן רביב

שילוב של ארבעת הטבלאות לטבלה אחת, יניב את לוח ארבעה שערים.
 הערה: בכל אחת מהטבלאות יש 7 שורות בלבד. שילוב ארבעת הטבלאות מחייב לפתוח שורות כמספר הגבולות השונים של כל ארבעת הטבלאות לעיל, כך שכלוח ארבעה שערים יהיו 13 שורות, כדלהלן בטבלה מס' 5.

טבלה מס' 5
לוח ארבעה שערים – שילוב הטבלאות

מריסת גבולות			בחלקים	רצף 1 - בין פ ו-מ	רצף 2 - בין מ ו-פ	רצף 3 - בין מ	רצף 4 - שנים מעוברות
יוב	שעה	חלק		שנים 2,5,10,13,16	שנים 1,4,9,12,15	שנים 7,18	שנים 3,6,8,11,14,17,19
0	18	0	19440	בתג			בחה
1	9	204	35844	בשה	בשה	בשה	
1	20	481	48011		גכה	גכה	גכה
2	15	588	68628	הכז			
2	18	0	71280		השא	השא	השא
3	9	204	87684	זחא			
3	18	0	97200		זשג	זשג	זשג
4	11	885	118255	זשה			
5	9	204	138524		זשה	זשה	זשה
5	18	0	148040	זשה			
6	0	408	155928		זשה	זשה	זשה
6	9	204	165444	זשה			
8	20	491	177611		זשה	זשה	זשה

דוגמה לשימוש בלוח ארבעה שערים

מולד תשרי של שנת תשע"ב חל ב-3-23-158 (יום ג' בשבוע, שעה 23, 158 חלקים). שנת תשע"ב היא השנה ה-15 במחזור. נמצא את הגבול המתאים בעמודה הנקראת "פריסת גבולות", נמצא את השנה ה-15 במחזור ברצף השני ויתקבל סימן השנה ה,כ,ז (יום א' בתשרי ביום חמישי, תורשי השנה כסדרן, פסח בשבת).

- 4 בכל רצף של n שנים נקבל $3n+4$ שורות (יפה, קודות חשבון העבור – עמוד קס"ח בהערה המסומנת בכוכבית) יש להעיר שנוסחה זו לא נכונה למספר שנים "גדול" כי הלוח העברי חוזר על עצמו לאחר 689472 שנים, ולכן נוסח יותר זהיר של ניסוח יפה הוא – שלכל רצף של n שנים נקבל לכל היותר $3n+4$ שורות.
- 5 ע"פ הנוסחה – $5772 \bmod(19) = 15$

המבנה המתמטי של לוח ארבעה שערים וחישובי שכיחויות בלוח העברי

פרטים גנרליים				רצף 1 - בין פ-4 מ	רצף 2 - בין ח-4 פ	רצף 3 - בין מ-2 פ	רצף 4 - שנים מעוברות
סדר	שעה	חלק	בחלקים	שנים	שנים	שנים	שנים
				2,5,10,13,18	1,4,9,12,15	7,18	3,6,8,11,14,17,19
0	18	0	18440	בחג			בחה
1	9	204	25844	בשה	בשה	בשה	בשז
1	20	451	48011		גכה	גכה	
2	15	588	58828	הכז	הכז	הכז	החא
2	16	0	71280		השא	השא	
3	3	204	87884	זחא	זחא	זחא	זחג
3	18	0	97280		זשא	זשא	
4	11	885	112288				
5	9	204	139524				
5	18	0	148040				
6	0	408	185528				
6	9	204	185444				
8	20	451	177811				

חלק ב': לוח ארבעה שערים "מעודכן" וחישובי שכיחויות

על מנת לבצע חישוב שכיחות לכל סימן שנה, לכאורה היה עלינו "לחשב" את "השטח היחסי" שכל סימן שנה תופס בטבלה. השטח היחסי משמעו השטח המבוקש חלקי השטח של הטבלה כולה.

לדוגמה סימן השנה הכז מופיע ברצפים: 1,2,3 (12 מתוך 19 שנות המחזור), ובגבולות מ-87684 עד (ולא בכלל) 139524 וזאת אומרת שהשטח היחסי של סימן הכז בטבלה הוא:

$$\frac{12 * (139524 - 87684)}{19 * 181440}$$

במונה כתבנו את 'שטח' הכז ואילו במכנה כתבנו את 'שטח' הטבלה כולה (19 שנות המחזור כפול שבוע).

מסקנותינו הקודמות העלו (ביחס ללוח ס"א ראשים) ששיטה זו אינה מניבה את התוצאה המדויקת משום שמולד תשרי של ראש מחזור לא יכול לחול בכל רגע מרגעי השבוע. בניגוד ללוח ס"א ראשים כאן עלינו לברוק חלות מולד תשרי של כל שנה מ-19 שנות המחזור. לשם כך ננתח את הפונקציה המתארת את מולד תשרי של כל שנה ושנה.

פונקציית מולד תשרי

מולד תשרי של ראש מחזור יראה מהצורה:

$$f(x) = [57444 + (x * 69715)] \text{mod}(181440)$$

57444 - בהר"ד, 69715 - יתרון מחזור, 181440 - שבוע.

הסבר - נצא ממולד המוצא בהר"ד ונתקדם בקפיצות של 69715 חלקים כל פעם. mod(181440)

6 ראה בתקציר.

ערן רביב

– פירושו ניכוי השבועות השלמים).

מכיוון שהמחלק המשותף הגדול של שני המספרים (יתרון מחזור ושבוע בחלקים) הוא –

$$GCD(181440, 69715) = 5$$

לכן קפיצות של מחזור על פני שבוע, יניבו "רווחים" של 5 ביניהן, לכן את הפונקציה המתארת מולד ראש מחזור ניתן לכתוב כדלהלן:

$$f(x) = 4 + 5x$$

כאשר המשתנה מקבל את הערכים 0 עד $36287 \leq$ מחזוריות הלוח.

הסבר: ממולד בהר"ד השארנו את השארית לאחר החלוקה ב-5.

אמור מעתה שמולד תשרי של ראש מחזור לעולם יסתיים בספרה 4 עבור x זוגי, או בספרה 9 עבור x אי זוגי!!

עתה נשאלת השאלה כיצד נראית הפונקציה המתארת מולד תשרי של שאר השנים במחזור שאינן "ראש מחזור".

לשם פתרון בעיה זו נייעזר בטבלת מולד תשרי של 19 שנות המחזור הראשונות כלוח:

בחלקים	חלק	שעה	מספר ימים	יום בשבוע	מולד בהר"ד
57444	204	5	2	2	מולד בהר"ד
9242640	1080	13	356	6	מולד ו, י"ד
18427836	876	22	710	3	תשרי שנה 3
28378465	385	20	1094	2	תשרי שנה 4
37563661	181	5	1449	0	תשרי שנה 5
46748857	1057	13	1803	4	תשרי שנה 6
56699486	566	11	2187	3	תשרי שנה 7
65884682	362	20	2541	0	תשרי שנה 8
75835311	951	17	2925	6	תשרי שנה 9
85020507	747	2	3280	4	תשרי שנה 10
94205703	543	11	3634	1	תשרי שנה 11
104156332	52	9	4018	0	תשרי שנה 12
113341528	928	17	4372	4	תשרי שנה 13
122526724	724	2	4727	2	תשרי שנה 14
132477353	233	0	5111	1	תשרי שנה 15
141662549	29	9	5465	5	תשרי שנה 16
150847745	905	17	5819	2	תשרי שנה 17
160798374	414	15	6203	1	תשרי שנה 18
169983570	210	0	6558	6	תשרי שנה 19

המכנה המתמטי של לוח ארבעה שערים וחישובי שכיתויות בלוח העברי

כיוון שבין כל שנה במחזור n לבין המקבילה לה במחזור $n+1$ תמיד יחלפו 235 חודשים, לכן כל שנה מהווה מעין ראש מחזור ולכן "יתרון מחזור" = 69715 תקף גם כאן! נבדוק את המחזור הראשון החל ממולד בה"ד:

	יום בשבוע	שעה	חלק	בחלקים
מולד בה"ד	2	5	204	57444
מולד ו, י"ד	6	13	1080	9242640
תשרי שנה 3	3	22	876	18427836
תשרי שנה 4	2	20	385	28378465
תשרי שנה 5	0	5	181	37563661
תשרי שנה 6	4	13	1057	46748857
תשרי שנה 7	3	11	566	56699486
תשרי שנה 8	0	20	362	65884682
תשרי שנה 9	6	17	951	75835311
תשרי שנה 10	4	2	747	85020507
תשרי שנה 11	1	11	543	94205703
תשרי שנה 12	0	9	52	104156332
תשרי שנה 13	4	17	928	113341528
תשרי שנה 14	2	2	724	122526724
תשרי שנה 15	1	0	233	132477353
תשרי שנה 16	5	9	29	141662549
תשרי שנה 17	2	17	905	150847745
תשרי שנה 18	1	15	414	160798374
תשרי שנה 19	6	0	210	169983570
תשרי שנה 20	4	21	799	179934199
תשרי שנה 21	2	6	595	189119395
תשרי שנה 22	6	15	391	198304591
תשרי שנה 23	5	12	980	208255220
תשרי שנה 24	2	21	776	217440416
תשרי שנה 25	0	6	572	226625612
תשרי שנה 26	6	4	81	236576241
תשרי שנה 27	3	12	957	245761437
תשרי שנה 28	2	10	466	255712066
תשרי שנה 29	6	19	262	264897262
תשרי שנה 30	4	4	58	274082458
תשרי שנה 31	3	1	647	284033087
תשרי שנה 32	0	10	443	293218283
תשרי שנה 33	4	19	239	302403479
תשרי שנה 34	3	16	828	312354108
תשרי שנה 35	1	1	624	321539304
תשרי שנה 36	5	10	420	330724500
תשרי שנה 37	4	7	1009	340675129
תשרי שנה 38	1	16	805	349860325

ערן רביב

את סך החלקים של מולד תשרי נחלק ב-5 וניקח את השארית:
 מסקנה: מולד תשרי של שנה כלשהי יחול בהתאם ל-2 העמודות בצד ימין של הטבלה הבאה:

טבלה מס' 6

שנה	בחלקים	partMOD(5)	partMOD(5)+5
מולד בהר"ד	57444	4	9
מולד ו, י"ד	9242640	0	5
תשרי שנה 3	18427836	1	6
תשרי שנה 4	28378465	0	5
תשרי שנה 5	37563661	1	6
תשרי שנה 6	46748857	2	7
תשרי שנה 7	56699486	1	6
תשרי שנה 8	65884682	2	7
תשרי שנה 9	75835311	1	6
תשרי שנה 10	85020507	2	7
תשרי שנה 11	94205703	3	8
תשרי שנה 12	104156332	2	7
תשרי שנה 13	113341528	3	8
תשרי שנה 14	122526724	4	9
תשרי שנה 15	132477353	3	8
תשרי שנה 16	141662549	4	9
תשרי שנה 17	150847745	0	5
תשרי שנה 18	160798374	4	9
תשרי שנה 19	169983570	0	5

העולה מהתאמור שהפונקציה המתארת מולד תשרי (כל שהוא ולא רק "ראש מחזור") תמיד תהיה מהצורה:

$$f(x)a + 5x$$

כאשר a מציינת את ספרת היחידות של החלקים של מולד תשרי ((partMOD(5)), בטבלה 6 לעיל)

כפי שמולד תשרי של ראש מחזור נראה:

$$f(x) = 4 + 5x$$

מולד תשרי של השנה שמספרה 2 בכל מחזור יראה:

$$f(x) = 0 + 5x$$

וכן יתר הפונקציות המתארות את מולד ראש המחזור, בהתאמה. מצוידים במידע זה נחזור לבדיקת הרצפים המרכיבה את טבלת 'ארבעה שערים'.

המבנה המתמטי של לוח ארבעה שערים וחשובי שכיחויות בלוח העברי

בדיקת הרצף הראשון (פ*,פ, מ):

הטבלה הראשונה מכילה את הגבולות עבור השנים 2,5,10,13,16. (מודגש באפור בטבלה)
מעיון בטבלה מס' 6 אנו למדים ששנים אלו מסתיימות בחלקים כלהלן:

שנה	חלקים
תשרי שנה 1	4,9
תשרי שנה 2	0,5
תשרי שנה 3	1,6
תשרי שנה 4	0,5
תשרי שנה 5	1,6
תשרי שנה 6	2,7
תשרי שנה 7	1,6
תשרי שנה 8	2,7
תשרי שנה 9	1,6
תשרי שנה 10	2,7
תשרי שנה 11	3,8
תשרי שנה 12	2,7
תשרי שנה 13	3,8
תשרי שנה 14	4,9
תשרי שנה 15	3,8
תשרי שנה 16	4,9
תשרי שנה 17	0,5
תשרי שנה 18	4,9
תשרי שנה 19	0,5

באופן מפתיע קיבלנו כיסוי מלא של כל החלקים!! שנה 2 מסתיימת ב-0 או 5, שנה 5 ב-1 או 6 וכן הלאה. כלומר סך ההיקריות הנובעות מהרצף הראשון, יהיה שווה לסך כל החלקים שבין הגבולות של טבלה זו (השנים ברצף זה מודגשות).

בדיקת הרצף השני (מ, פ*,פ):

הטבלה השנייה מתייחסת לשנים: 1,4,9,12,15 גם כאן מקבלים בדיוק כיסוי מלא של כל החלקים (השנים ברצף זה מודגשות).

שנה	חלקים
תשרי שנה 1	4,9
תשרי שנה 2	0,5
תשרי שנה 3	1,6
תשרי שנה 4	0,5
תשרי שנה 5	1,6
תשרי שנה 6	2,7
תשרי שנה 7	1,6
תשרי שנה 8	2,7
תשרי שנה 9	1,6
תשרי שנה 10	2,7
תשרי שנה 11	3,8
תשרי שנה 12	2,7
תשרי שנה 13	3,8
תשרי שנה 14	4,9
תשרי שנה 15	3,8
תשרי שנה 16	4,9
תשרי שנה 17	0,5
תשרי שנה 18	4,9
תשרי שנה 19	0,5

ערן רביב

בדיקת הרצף השלישי (מ, פ, *מ):

רצף זה מתייחס לשנים 7, ו-18 במחזור.

שנה 7, מסתיימת בחלקים 1 או 6, ואילו שנה 18 ב-4 או 9. כאן כבר לא ניתן לומר שסך ההיקריות שווה לסך החלקים.

להלן טבלה המכילה את הגבולות המתוקנים לשנה 7 ולשנה 18 (בהתאם לחלות מולד תשרי

שלהן), ואת חישובי ההיקריות בהתאם.

טבלה מס' 7

סידור	שנה 18			שנה 7			סך היקריות	סך היקריות	מ-ב	מ-ב	מ-ב	מ-ב	מ-ב	מ-ב	מ-ב	מ-ב	מ-ב	
	עד נולד בכלל	עד נולד בכלל	עד נולד בכלל	עד נולד בכלל	עד נולד בכלל	עד נולד בכלל												עד נולד בכלל
19440	0	18	0	19441	35846	3281	19444	35844	3280	6561								
35844	בשה	1	9	204	35846	68631	6557	35844	68629	6557	13114							
68629	גכה	2	15	589	68631	87686	3811	68629	87684	3811	7622							
87684	הכז	3	9	204	87686	139526	10368	87684	139524	10368	20736							
139524	השא	5	9	204	139526	149041	1903	139524	149044	1904	3807							
149040	זחא	5	18	0	149041	165446	3281	149044	165444	3280	6561							
165444	זשג	6	9	204	165446	200881	7087	165444	200884	7088	14175							
							36288				36288							

הסבר לטבלה מספר 7:

"תיקוני גבולות"

שנה 7:

ראשית עלינו "לתקן" את הגבולות בהתאם להיקרות ספרת היחידות של החלקים. שנה 7 שבאמור מולד תשרי שלה תמיד יהיה מהצורה $5X + 1$ יכולה להסתיים או ב-'1' או ב-'6' ולכן כאשר אנו רוצים לחשב את ההיקריות של שנה זו, עלינו "לעגל" את מולד ההתחלה של הגבול נלפי מעלה כך שיסתיים בספרה - '1' או בספרה '6'.

נוסחת המרה לגבולות 'מ'-ו-'עד' (עד לא בכלל):

כאשר סך החלקים = P , את הגבול החדש נסמן ב- Z , בצורה הכללית מולד תשרי תמיד יהיה

מהצורה $5X + a$, נוסחת המרה לגבול תהיה:

$$Z = p + [a + 5 - p \bmod 5] \bmod 5$$

הסבר לנוסחה:

P הוא מספר כלשהו, ועלינו להביאו לצורה שספרת היחידות שלו תהיה או a , או $a + 5$. לשם כך עלינו להוסיף למספר P את סך החלקים החסרים.

$5 - p \bmod 5$ - נותן את שארית החלקים לאחר חלוקה ב-5.

נפחית את השארית הנ"ל, מ- $a + 5$ (הוספנו 5 ע"מ שלא יהיה מספר שלילי, ועקב כך צריך

גם להוסיף שוב, למקרה שהמספר בסוגריים מעל 5).

עבור המקרה הפרטי של שנה 7, $a = 1$ ולכן נוסחת ההמרה תהיה:

$$Z = p + [6 - p \bmod 5] \bmod 5$$

המכנה המתמטי של לוח ארבעה שערים ותישובי שכיחויות בלוח העברי

בדיקה: אם P מסתיים בספרה '1' או '6' אזי ולכן $Z = P$.

אם P מסתיים בספרה '7' או '2' אזי ולכן $Z = P + 4$

אם P מסתיים בספרה '8' או '3' אזי $p \bmod 5 = 3$ ולכן $Z = P + 3$

אם P מסתיים בספרה '9' או '4' אזי $p \bmod 5 = 4$ ולכן $Z = P + 2$

אם P מסתיים בספרה '0' או '5' אזי $p \bmod 5 = 0$ ולכן $Z = P + 1$

הערה: מכיוון שהטבלה "מעגלית", גבול "ער" מהשורה האחרונה נבנה על ידי הוספת 181440 חלקים לגבול שבשורה הראשונה, כלומר $181440 + 19411$ נותן 200881.

שנה 18:

באופן דומה נברוק לגבי שנה 18. שנה 18 מסתיימת בספרה '4' או בספרה '9'.

מולד תשרי שלה תמיד מהצורה $5X + 4$.

כאשר אנו רוצים לחשב את ההיקריות שלו עלינו את המולד התחלה של הגבול "לעגל"

כלפי מעלה כך שיסתיים בספרה- '4' או ב-'9'.

נוסחת המרה לגבולות 'מ' ו-'ער' (ולא בכלל):

כאשר סך החלקים = P , את הגבול החרש נסמן ב- Z

$$Z = p + [9 - p \bmod 5] \bmod 5$$

ניתן להראות את נכונות הנוסחה באופן דומה.

לאחר שחישבנו בנפרד את ההיקריות לשנה 7 ולשנה 18 סיכמנו בעמודה הנקראת סיכום

את סך ההיקריות של סימני השנים שברצף השלישי.

בדיקת הרצף הרביעי (פ, מ, פ):

רצף זה מתייחס לשנים המעוברות במחזור.

שנה	חלקים
1 תשרי שנה	4,9
2 תשרי שנה	0,5
3 תשרי שנה	1,6
4 תשרי שנה	0,5
5 תשרי שנה	1,6
6 תשרי שנה	2,7
7 תשרי שנה	1,6
8 תשרי שנה	2,7
9 תשרי שנה	1,6
10 תשרי שנה	2,7
11 תשרי שנה	3,8
12 תשרי שנה	2,7
13 תשרי שנה	3,8
14 תשרי שנה	4,9
15 תשרי שנה	3,8
16 תשרי שנה	4,9
17 תשרי שנה	0,5
18 תשרי שנה	4,9
19 תשרי שנה	0,5

ערן רביב

כדי לחשב כאן את ההיקריות נברוק גם כאן את ספרת היחידות של החלקים בשנים הנ"ל. נמצא שבנוסף לרצף 0,1,2,3,4 מופיע עור '0' ועוד '2'. ולכן צריכים לחשב את סך החלקים שגבי הגבולות (ברומה לרצף הראשון והשני) להוסיף לסך ההיקריות את התוספת הנובעת מהכפילות של הספרה '2' והספרה '0' כלהלן:
להלן טבלה המכילה את הגבולות המתוקנים לשנה 8 (מסתיימת ב-2) ולשנה 17 (מסתיימת ב-0) (בהתאם לחלות מולד תשרי שלהן), ואת חישובי ההיקריות בהתאם.

$$K45 = (045 + \text{MOD}(((7 - \text{MOD}(045, 5))), 5))$$

$$N45 = 045 + \text{MOD}(((5 - \text{MOD}(045, 5))), 5)$$

f	g	h	i	j	k	שנה 8			שנה 17			q
						מ	עד ניכא ככלס	היקריות	מ	עד ניכא ככלס	היקריות	
45	19440	בחה	0	18	0	19442	48012	5714	19440	48015	5715	11429
46	48011	בשו	1	20	491	48012	71282	4654	48015	71280	4653	9307
47	71280	גכו	2	18	0	71282	97202	5184	71280	97200	5184	10368
48	97200	החא	3	18	0	97202	116257	3811	97200	116255	3811	7622
49	116255	השג	4	11	695	116257	149042	6557	116255	149040	6557	13114
50	149040	זחג	5	18	0	149042	177612	5714	149040	177615	5715	11429
51	177611	זשה	6	20	491	177612	200862	4654	177615	200880	4653	9307
		בדיקה						36288			36288	

שנה 8:

באופן הרומה לחישוב לעיל כאן הנוסחה לגבולות תהיה:

$$Z = p + [7 - p \bmod 5] \bmod 5$$

שנה 17:

באופן הרומה לחישוב לעיל כאן הנוסחה לגבולות תהיה:

$$Z = p + [5 - p \bmod 5] \bmod 5$$

לאחר שברקנו את ההיקריות של כל ארבעת הרצפים נסכם בטבלה את ההיקריות של כל סימן וסימן, כלהלן:

טבלה מס' 8

טבלת סיכום ההיקריות של כל סימני השנים

באתרים	סך היקריות	היקריות מוצף רביעי	היקריות מוצף שלישי	היקריות מוצף שני	היקריות מוצף ראשון	השנה סימן
5.710021582	39369		6561	16404	16404	בחג
11.79670821	81335		13114	32785	35436	בשה
6.248404576	43081		7622	19055	16404	גכה
18.04511278	124416		20736	51840	51840	הכז
3.312534809	22839		3807	9516	9516	השא
4.329833004	29853		6561	6888	16404	זחא
13.71527778	94563		14175	44952	35436	זשג
5.801540889	40000	11429	28571			בחה
4.7247749	32576	9307	23269			בשו
5.263157895	36288	10368	25920			גכו
3.869192658	26677	7622	19055			החא
6.657123132	45899	13114	32785			השג
5.801540889	40000	11429	28571			זחג
4.7247749	32573	9307	23269			זשה
100	689472	72576	181440	181440	181440	שודת בדיקה

המבנה המתמטי של לוח ארבעה שערים חישובי שכיחויות כלוח העברי

הסבר לטבלה מס' 8:

הרצפים הראשון והשני מכילים את כל החלקים של השבוע ולכן מהטבלאות לעיל חושבה ההיקרות ע"י החסרת גבול עליון מהגבול התחתון, ואכן בשורת הבדיקה סיכום העמודה מורה על 181440.

עמודת הרצף השלישי נלקחה מהעמודה הימנית בטבלה הפרטנית של הרצף. שורת הבדיקה מצביעה על $36288 * 2 = 72576$.

עמודת הרצף הרביעי בנויה מסך החלקים כשבוע בתוספת ההיקרויות של השנים ה"כפולות" גם כאן שורת הבדיקה מצביעה על $36288 * 2 = 72576$.

סיכום הסיכומים במשבצת הימנית התחתונה מצביע על 689472 שהם 19 שנה כפול $36288 =$ מחזוריות השנים כלוח הקבוע.

בדיקת השוואה – התוצאות שקיבלנו אכן זהות לתוצאות חישובי השכיחויות מלוח ס"א ראשים!!⁶

הערה: בטבלה מס' 8, השנים המעוברות מסומנות ע"י האות 'מ' בצד שמאל של סימן השנה. חישוב שכיחות הסימנים: לאחר שבנינו את טבלת ההיקרויות עבור כל סימן וסימן, ניתן לשלב נתונים אלו בטבלה אחת ונקבל:

לוח 'ארבעה שערים המורחב'

רצף 1 – בין פ-מ			רצף 2 – בין מ-פ			רצף 3 – בין מ-2			רצף 4 – שנים מעוברות		
מולד תשרי בחלקים	שנים 2,5,10, 13,16	סך היקריות	חלקים	שנים 1,4,9 12,15	סך היקריות	חלקים	שנים 7,18	סך היקריות	חלקים	שנים 3,6,8,11 14,17 19	סך היקריות
19440	בחג	16404	19440	בחג	16404	19440	בחג	6561	19440	בחה	40000
35844	בשה	35436	35844	בשה	32785	35844	בשה	13114	48011	בשז	32576
			68629	גכה	19055	68629	גכה	7622	71280	גכז	36288
71280	גכה	16404	87684	הכז	51840	87684	הכז	20736	97200	החא	26677
139524	השא	9516	139524	השא	9516	139524	השא	3807	116255	השג	45899
149040	זחא	16404	149040	זחא	6888	149040	זחא	6561	149040	זחג	40000
			165444	זשג	35436	155928	זשג	44952	165444	זשג	14175

קיבלנו טבלה שבה ניתן לראות את ההיקרויות של כל סימן שנה בהתאם לשנה במחזור. מטבלה מס' 8 לעיל, ניתן באופן פשוט לחשב את שכיחות הסימנים.

7 כסך החלקים בשבוע.

8 במאמר "לוחות ושכרי לוחות" המוזכר בתקציר.