

אורי צור ויהודה אשכנזי

שפופרת דרבן גמליאל ועומקו של גיא – גאודסיה תלמודית

עניינו של מאמר זה לציין ולבחון את שיטותיהם של חכמים שונים למדידת מרחק במישור ועומקו של גיא בעזרת שפופרת. דבריהם מבססים על שיטתו של רבן גמליאל במסכת עירובין (מג ע"ב) למדידת העומק של גיא בעזרת שפופרת, שיטה שאינה ברורה דיה במקורות. הפרשנים ניסו להסביר את שיטת המדידה ואף הרחיבו את דבריהם בהתאם לידע המתמטי שהיה ידוע להם בזמנם. חלקם מציעים שיטות מדידה פשוטות ולפעמים אף עם טעויות מתמטיות.

במסכת עירובין ישנה ברייתא¹ המתארת שפופרת מיוחדת שהייתה לרבן גמליאל, שאפשר היה למדוד בעזרתה מרחקים של עד אלפיים אמה במישור וכן אפשר היה למדוד בעזרתה גם זוויות, או לפחות לקבע את השפופרת על זווית מסוימת כדי למדוד מרחקים באמצעות דמיון משולשים. הברייתא מתארת את השימוש שהיה רבן גמליאל עושה בשפופרת – מדידת עומקו של גיא באמצעות שפופרת ומדידת גובהו של דקל,² וכך נאמר בברייתא:

תנא³: שפופרת⁴ היתה לו לרבן גמליאל, שהיה מביט וצופה⁵ בה אלפים אמה ביבשה

- 1 עירובין מג ע"ב.
- 2 ראה שפת אמת, שם, מג ע"ב, שהעיר: "לכאורה גם בדקל י"ל ע"י שפופרת, והיה נראה דראי' של גובה אינו דומה לראי' של אורך ולפ"ז גם כגיא מנ"ל שיהיה שוה לאורך. גם כאמת קשה כיון דגיא אין השמש מאירה מסתמא נפחת הראי', ודוחק לפרש דמקודם הוא מבחין ע"י גיא קטן לידע ההפרש של הראי' של אורך לעומק, דסתמא תני. ותו, רכל שיש יותר אורך מחשיך טפי וצ"ע. מיהו ודאי נראה דס"ל דהסתכלות ככל מקום שוה. א"כ צ"ל דבדקל מוסיף עוד תקנה לבר מהשפופרת". בעל שפת אמת טוען למעשה, שאפשר למדוד את גובהו של דקל בעזרת שפופרת למרות שמפשט הברייתא, משמע שלא מדובר בשימוש בשפופרת אלא בשימור היחס בין גובה לאורך הצל.
- 3 הרי"ף, שם, מג ע"ב: "תניא".
- 4 ראה ירוש', עירובין, פ"ד ה"ב, כא ע"ד: "מצודות היו לו לרבן גמליאל שהיה משעיר בה עיניו במישר"; ראה פירוש קרבן העדה, שם, ד"ה מצודות; פני משה, שם, ד"ה מצודות, פירושיהם דחוקים; ראה ירוש', עירובין ד, ב, כ"י סקליגר 3 (Or 4720), עמ' 471: "מצודות"; סינופטיס לתלמוד הירושלמי, עירובין, כרך ב, י"ל ע"י פ' שפר וה"י בקר, MS Leiden, 4, 2, טובינגן 1991, עמ' 98: "מצודות"; השוה הר"ח, שם, מג ע"ב: "מצופית", והסבירו: "כעין שפופרת עשויה מנחושת"; ספר העתים, ה' ערובי תחומין, סי' לו, עמ' 54: "מצופית", ובהע' עב: "ובאמת ט"ס וצ"ל מצופות... והיא משורש צופה"; ספר ראבי"ה, הלכות עירובין, סי' שפ, עמ' 417: "מצופות" ובהע' 14: "ירוש' בטעות הדפוס: מצודות"; אור זרוע, חלק שני, הלכות ערב שבת, עמ' 4, סי' ו: "מירושלמי ראי' מצופות הי' לי' לר"ג והי' משער בעיניו"; ערוך השלם, מהר"ח קאהוט, חלק שמיני, ניו

וכנגדה אלפים בים. הרוצה לידע כמה עומקו של גיא,⁶ מביא שפופרת ומביט בה,⁷ וידע כמה עומקו של גיא. והרוצה לידע כמה גובהו של דקל מודר קומתו וצלו וצל קומתו, וידע כמה גובהו של דקל.

במאמר זה נתמקד במדידת עומקו של גיא בעזרת השפופרת. לפי דברי הברייתא, דרך המדידה אינה ברורה. מעט מאוד חכמים פירשו את שיטת המדידה, חלקם הבינו לפי היריע המתמטי שהיה קיים בזמנם, וחלקם מעתיקים⁸ שהעתיקו מחכמים שקדמו להם בצורה לאקונית מבלי שהבינו את דבריהם.⁹ יש להדגיש, שבתקופתו של רבן גמליאל לא היה שימוש בערשות אופטיות למטרה זו. רבן גמליאל השתמש בשפופרת חלולה. על דרכי השימוש בשפופרת זו לצורך מדידת מרחקים ומדידת גובה ועומק, הדעות חלוקות. כמו כן נציין את השיטות השונות של חכמים ונבחן את דרך המדידה על ידי שפופרת המוצעת בדבריהם.

שיטת הגאונים

השיטה הראשונה מתקופת הגאונים,¹⁰ נעתיק אותה כלשונה, ובמהלכה נתייחס לתוכן הדברים:

ושש' שפופרת. כך נראה לנו הדבר שהשפופרת¹¹ בזמן שאדם מעמיד אותה כאילו היא נכונה ועומדת ומביט מהמאור העליון שלה צופה את המקום אשר היא נכונה עליו. אבל כשעוקם אותה כגון שמוריד את הקצה הרחוק מכלפי עיניו מעט והקצה הקרוב אל עיניו עולה כנגדו ומביט בראש העליון צופה הוא מקום רחוק לפי אותו השיפוע ששופע אותה. וכל זמן שמוריד את הקצה העליון והקצה התחתון גוביה כנגדו ומביט צופה הוא מקום שהוא רחוק לכל מעט ומעט מדה גדולה. וכל זמן שמחסר להשיפוע מוספת המדה שצופה

יודק תשט"ו, עמ' קלח, ערך "שפופרת": "והג' היותר מעולה היא מצופית... כמו שגרס ר"ח בעירו' בהעתקת היור'"; ערוך השלם, שם, חלק שביעי, עמ' לב-לג, ערך: "צף": "ומזה השרש נאצל מצופית כג' ר"ח בעירובין מג: בהשקת היור' עירו' פ"ד רב"א ע"ד ופי' קנה חלול לצפות למרחוק"; ראה ש' ליברמן, הירושלמי כפשוטו, עירובין, ירושלים תרצ"ה, עמ' 282 והע' 1; *HUCA* IV; S. Gandz, "The Astrolabe in Jewish Literature", (1927), p. 481 n. 63; ראה לקמן, עמ' 13, שיטת הר"ח.

5 הרי"ף, שם: "מסתכל".

6 בכ"י אוקספורד 366 [=כ"א], שם, נוסף: "הרוצה לידע" וכו'.

7 בכ"א, שם; כ"י ותיקן 109, שם; וכ"י מינכן 95, שם; הרי"ף, שם, גרסו: "ביבשה".

8 ראה חירושי המאירי, שם, מהר' ש"ו ברודא, ירושלים תשל"א, עמ' רחצ, הע' 219: "והעתיק רבינו לשון רש"י ממש"; ראה רבינו יהונתן, שם, מג ע"ב; פירוש ר"י בן חכמון, שם, מג ע"ב, מובא לקמן; שם, עמ' צו: "וראיתי המעתיקים שבשו אותה בהעתקתם ידעתי שהתקשה מלעמוד עליה למי ייגע בשמועה"; פירוש הר"ח בן שמואל, עירובין, עמ' רעא-ערה.

9 ראה בית הבחירה, שם, מהר' מ' הרשור, ירושלים תשכ"ב, עמ' קסו: "ורכרים אלו... מתוך שהם רבירים סתומים"; פירוש ר"י בן חכמון, שם, עמ' צו: "ואני לא הבנתי מעשה הטבלה שאמר הגאון".

10 ראה אוצר הגאונים, מסכת עירובין, כרך שלישי, מהר' ב"מ לוין, ירושלים תרצ"א, עמ' 38-41 (להלן: אוצה"ג); ראה תשובות הגאונים, מהר' א"א הרכבי, ברלין תרמ"ז, סי' כח עמ' 10-11.

11 ראה עירובין, מג ע"ב, מהר' ע' שטיינזלץ, ציור והסבר קצר לשפופרת דרבן גמליאל.

אותה עד שיעמידנה שטוחה ונכונה נכח עיניו. ובהיותה כן כשמביט בה אין שיעור למה שצופה אותו אילא צופה הוא כל שיש כח בעיניו¹² לראותו ואין בה שיפוע שמעמיד אותו על קצב מדה ידועה. לפיכך כשעומד במקום ומודד אלפים אמה מאותו המקום ועושה סימן כותל או לוח במקום תמת¹³ אלפים אמה ומשפע את השפופרת ממקומו ומביט בה עד שצופה את אותו הסימן שומר הוא את קצב אותו השיפוע באותה השפופרת. וכל זמן שמשפע אותה כקצב השיפוע ההוא ומביט בה צופה ממקומו אלפים אמה נכוחו לא חסר ולא יתר. ואם רוצה לשמור את מדת השיפוע ההוא באמת שלא יטעה בו עושה טבלה עגולה שלנחושת או שלעץ כדרך שעושין ההוברין¹⁴ הנקראין מנגמין¹⁵ טבלה עגולה לאצטרוליב¹⁶ ומעמיד את השפופרת מסומרת באמצעיתה במסמר וסובבת במקומה כדרך שעושין את המטוטלת הנקרא עצאדה¹⁷ באיצטרוליב שצופין בה גבהה שלחמה [= של חמה]¹⁸ עת בעת ומשימין סימן למקום אשר יציב עליו את ראש השפופרת ויהי צופה בה אלפים אמה ואינו טועה. בדרך זו או במה שיוצא¹⁹ היה לו לרבן גמליאל ביבשה וכן בים. ומה צורך לו בים שאם היה צופה והולך והוא בים עת שיגיע לרחוק אלפים אמה מחומת המדינה ידע אם מבעוד יום היה או משחשכה וכן שנינו (מ"א) מעשה שנכנסו ללמין²⁰

- 12 אוצה"ג, שם, עמ' 38 הע' י: "בעציו".
- 13 שם, הע' יא: "סוף".
- 14 ראה א' אבן שושן, המלון החדש, כרך ראשון, ירושלים 1993, עמ' 246, ערך: "הבר", תת-ערך: "הוברי שמים".
- 15 החוים ככוכבים, איצטגנין (מלשון ערבית: نجوم نجمة נגים = כוכבים); אוצר הגאונים, ברכות, כרך ראשון, מהר"ב"מ לוין, חיפה תרפ"ח, לקוטי גאונים, עמ' 109: "אצטגנין ושם, הע' א: "אצטגנין, מנגמין"; ראה הערוך השלם, מהר"ח"י קאהוט, ניו יורק תשט"ז, עמ' קסו, ערך: "אצטגנין"; שם, עמ' קעו, ערך: "אסטרונוג".
- 16 פירוש המשניות להרמב"ם, שם, מא ע"ב: "הבריה שהוא בכלי נחשת שמסתכלין בו החוים ככוכבים ונקרא בערבי אצטרול"ב"; האצטרולב הוא כלי עור קדום ששימש למדידת זוויות גובה של כוכבים, גובה השמש ולמטרות נווטות. המציאו אותו כנראה במאה ה-3 או ה-4 לפה"ס. על האצטרולב ככלי, ראה S. Gandz, "The Astrolabe in Jewish Literature", *HUCA* IV (1927), pp. 469-486; על תולדות האצטרולב, ראה ש' סלע, אסטרונוגיה ופרשנות המקרא בהגותו של אברהם אבן עזרא, אוניברסיטת בר-אילן, רמת-גן תש"ס, עמ' 206-207 והע' 2; repr. New York 1967, p. 1; G. Chaucer, *A Treatise on the Astrolabe*, (A.D. 1391), 1st repr. New York 1967, p. 2; xxiv; א' ב"ר חייא, ספר צורת הארץ, אמסטרדם 1968; ראה ציור לדוגמה א' בן שושן, שם, כרך רביעי, השלמות וערכונים (מאת ר' סיוון), עמ' 1501, ערך: "אצטרולב".
- 17 ראה נ' אלוני, "אלפאט' נוספים ממשנת שבת ועירובין", לשוננו, יט (תשי"ד), עמ' 36: "חוט המתנועע"; Gandz, *ibid.*, p. 485 n. 90.
- 18 סוגריים מרובעים שלנו [א"צ, י"א].
- 19 אוצה"ג, שם, עמ' 39 הע' ב: "כיוצא".
- 20 אוצה"ג, שם, הע' ג: "לא נכנסו לנמל"; השווה עירובין מא ע"ב: "לא נכנסו לנמל"; פירוש המשניות להרמב"ם, שם, מא ע"ב: "קורין נמל למקום שהספינות נסתרות שם מן הרוח ויוצאות ליבשה"; השווה ירוש', עירובין ד, ב, כ"י סקליגר 3 (Or. 4720): "לא נכנסו ללמן"; סינופסיס לתלמוד הירושלמי, עירובין, כרך ב, יו"ל פ' שפר וה"י בקר, MS Leiden, 4,2, עמ' 96: "לא נכנסו [ללמן] (לנמל)"; שאילתות דרב אחאי גאון, שמות, מהר"ש"ק מירסקי, ירושלים תשכ"ד, בשלח, נב, עמ' צח, חילופי נוסחאות: "ללמן לנמל", ובאורים והערות: "כמו למן במקום נמל"; ראה ערוך השלם, מהר"ח"י קאהוט, חלק חמישי, ניו יורק תשט"ז, עמ' 44, ערך: "למן"; "למן הוא נמל"; פירוש ר"ן בן כמון, עירובין מא ע"ב: "ויש נוסחאות שכתוב בהן למן מקום שמעמידין בו הספינה" וכו' והע' 127; פירוש הר"ח בן שמואל, עירובין, מהר"ש קליין, ירושלים-קליבלנד תשנ"ו, עמ' רעא: "ויש שגורסין ללמין".

וכו' כל' שצפיתי את מקום התחום בשפופרת מבעוד יום ועליה שנו חכמים מעשה שלשפופרת. ולענין עמקו שלגיא כאשר הוא משפע אותה נגד הארץ השווה וצופה בה יודע ממנה עומקו שלגיא כדרך שהוא יודע מדת הארץ השווה שהרי אמרנו אם ישימנה סוכבת בטבלא עגולה כמטוטלת של איצטרוליב אפשר שישים [סימ]נין על מדת חצי חצי²¹ שיעורה כמה מדת מה שצופה בהיותה כן וידע מדידות הרבה מאד לפי מדת השפופרת בארכה וכו'.

בקטע זה מוסבר כיצד אפשר למרוד מרחקים במישור בעזרת השפופרת. העיקרון הוא שככל שהשפופרת משופעת יותר מטה, כך הנקודה שאותה רואים דרך השפופרת קרובה יותר. ההצעה היא לקבע את השפופרת על ידי ציר למעין לוח עגול שעליו יסומן המרחק הנצפה על ידי השפופרת כאשר מטים אותה בשיפוע המסומן (ראה לקמן ציור א). בלוח זוויות כזה השתמשו הרבה לפני כן בכלי הנקרא אצטרולאב. כלי זה הומצא על ידי אסטרונומים בערך בשנת 200 לפסה"נ, במקור הוא שימש למציאת כוכבים על ידי כיוון המכשיר בזווית ידועה מקו האופק. מאוחר יותר השתמשו באצטרולאב לשם גיווט כים. הנווטים קבעו את קו הרוחב בו הם נמצאים על ידי מדידת הזווית בין האופק לכוכב ידוע.

ציור א



ככל שהשיפוע מן האופק גדל המרחק קטן.

הרוצה לידע עומקו שלגיא...²² דע כי דבר זה על אותה שפופרת שהיתה לו לרבן גמליאל] אמורה ועל כיוצא בה שהיה מעמידה בשיפוע לרואות כל אמות שהוא רוצה ומעיקרה לתחום שבת היתה עשויה, דהכין תניא שפופרת היתה לו לרבן גמליאל שהיה צופה ומביט בה אלפים אמה כיבשה.

כנראה המטרה העיקרית של השפופרת הייתה מדידת תחום שבת שהינה לפי רוב הדעות אלפיים אמה,²³

ועיקר דבר זה שאם מעמיד אדם את השפופרת נגד עינו כשהיא נכונה הוא צופה ומביט בה כל מה שיש כח בעיניו לראות בלי קצב ובלי מדה.

21 אוצה"ג, שם, עמ' 39 הע' ד: "כפול בכ"י".

22 אוצה"ג, שם, עמ' 39 הע' ז: "כל התשובה הזאת הביא גם המאירי בחידושו בשנויים קלים"; ראה תשובות הגאונים, מהר" הרכבי, סי' שיר, עמ' 147-149.

23 סוטה כז ע"ב.

אם מסתכל אדם דרך השפופרת כאשר היא אופקית הוא יראה למרחק הרב ביותר שעניו יכולות לראות, משום שכיוון הסתכלותו מקביל לקרקע.

ואם משפיע אותה כלפי מטה ושם עינו בקצה העליון לצפות ולהביט כלפי מטה אם מרבה לה שיפוע צופה מדה קטנה כעשר וכעשרים וכשלשים אמה וכל זמן שמחסר את שיפועה ומקרב אותה לשווה ולנכונה מוספת מדת מה שצופה ומביט בה מפני שמראה העיץ יוצא ממנה כשהוא משופע באלכסון וכאילו חוט מתוח הוא לפי הגובה שהציבה וכאילו ראש דוד²⁴ יוצא השיפוע ששיפע אותה

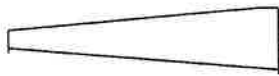
ככול שמשפיעים את השפופרת מטה בוויית גדולה יותר מקו האופק תהיה השפופרת מכוונת למקום קרוב יותר אל הצופה.

כי האלכסון בזמן ששני הצלעים שוין יוסיף שני חומשי צלע לדברי חכמ' שהוא קירוב דאמר' (נז). כל אמתא בריבועא אמתא ותרי חומשי באלכסונא. ואם הציב את השפופרת משופעת בשיפוע אלכסון שלמרובע אין צופה ממנו אלא כמדת אותו האלכסון אמתא ותרי חומשי לא חסר ולא יתר.

על פי משפט פיתגורס, משפט שהיה ידוע כבר מהמאה החמישית לפסה"ג, אורך האלכסון בריבוע גדול פי $\sqrt{2} = 1.41$ מאורך הצלעות. $\sqrt{2}$ הוא בקירוב $1\frac{2}{3}$ ככתוב.

ואם הצלע התחתון שהוא כמין כאן²⁵ אורך הוא והצלע העומד קצר כגון זה הקצר והאררך ואלכסונם ומציב את השפופרת כשיעור שיפוע אלכסון שבין שני הצלעים האלה שאחד ארוך ואחד קצר צופה ממנה את מדת האלכסון ההוא ובזמן

ששומר את כיוון השיפוע הזה ועושה כלי שמכוון בכיוונו מן הברזל או מנחשת או מן העץ כגון זה



והשפופרת עליו משופעת כשיפועו כל זמן שמגביהו מוספת מדת מה שצופה לפי הגובה. והרי אנו מבררין דרך זו לתחום שבת בזמן שרוצה להגביה את השפופרת כמדת קומת איש ד' אמות ולצפות ממנה ב' אלפים אמה באיזה צד הוא עושה לפי שארבע אמות אחד מחמש מאות באלפים אמה עושה בארץ או על הנייר כיר אחד שנקרא כט²⁶ גבהו אצבע אחת ועושה לו צלע כמין כאן מתחתיו שרחבו חמש מאות אצבעות ומציא²⁷ ראש תור²⁸

24 אוצה"ג, שם, עמ' 40 והע' א: "תור יוצא משיפוע שמשפע".

25 אוצה"ג, שם, עמ' 40 והע' ב: "כמין כן. ובסיס".

26 אוצה"ג, שם, עמ' 40 והע' ג: "ר"ל: קו".

27 אוצה"ג, שם, עמ' 40 והע' ד: "ומוציא".

28 ראה ערוך השלם, מהרד"ח" קאהוט, חלק שביעי, ניו יורק תשט"ו, עמ' רלר-רלה, ערך: "ראש", ובעמ' רלה, העתיק ציורים של ראש תור מהכ"י. שם, עמ' רלה: "ופי' הערוך בענין ראש תור כמדומה לי הועתק מפי' רה"ג

מקצה הצלע שהיא אצבע אחת עד קצה הצלע שהוא ה' מאות אצבע ושומר את אותו השיפוע שלאותו תור בכלי מחוזק כדי שלא ישתנה. וכבר נודע לו שכל אצבע גובה ראש תור שלו חמש מאות אצבעות לפיכך בזמן שמציב עם אותו ראש התור שפופרת על גובה אצבע צופה ממנה חמש מאות אצבעות ובזמן שמגביהו אצבע שנייה יש לה לאותה אצבע עוד חמש מאות אצבע אחרות נמצא ראש תור שעל גובה ב' אצבעות ארכו אלף אמה ושעל גובה שלש אצבעות ארכו אלף וחמש מאות אמה ושעל גובה ארבע אצבעות ארכו אלפים אמה לכל אחד חמש מאות. וכשמביט בשפופרת משם כן הוא צופה כמדה הזאת. וכן אם יגביה את הצלע אמה ויוציא ראש תור כאותו השיפוע הראשון שכבר שמרו²⁹ הרי יש לאמה הגבה ה' מאות אמה ארך באלכסון. ואם יגביה ד' אמות ומשם ימתח את החוט יש להן אלפים אמה. לפי' בזמן ששומר את אותו השיפוע שהזכרנו למעלה ומשים עליו השפופרת למעלה מד' אמות נכוונות ומביט בה צופה אלפים אמה מן הארץ שפניה שוין שאין בה עיקום לא חסר ולא יתר שאילו מתח משם חוט ראש תור בשיפוע ההוא לא נגע בארץ אלא בסוף אלפים אמה לא חסר ולא יתר.

בקטע זה מדובר על העיקרון של דמיון משולשים. מאחר שגובהו של אדם ממוצע הוא כ-4 אמות ואנו מעוניינים למדוד מרחק של כ-2000 אמה, היחס בין גובה האדם דמויך את המרחק ובין המרחק שברצוננו למדוד הוא: 1:500. מכאן שאם נצייר משולש ישר זווית שיחס ניצביו הוא 1:500 נקבל זווית שאם אדם ממוצע יכוון את השפופרת בזווית זו אל הקרקע, תהא הנקודה עליה השפופרת מכוונת במרחק של 2000 אמה.

ויש בזה מעשה אחר שאין צריך לנסות שיפועו לשמרו, עושה טבלה עגולה כגון צפיחה שלאצטרוליב העשוי לאצטגנין. וכשם שלאצטרוליב זה שלא לו האצטגנין חלוק הוא ג' מאות וששים חיל³⁰ כחיילות של גלגל חולק את אותה הטבלה אלפים חיל³¹ כנגד אלפים אמות שהוא רוצה לצפותן.

אין צורך לשמור על השיפוע שנותן יחס של 1 ל-500 בין ניצב אחד למשנהו, אלא ניתן להכין מראש מעין טבלה עגולה המחולקת לזוויות כפי שיש באצטרוליב, המכשיר שבו משתמשים האיצטגנין (החוזים בכוכבים). אצל החוזים בכוכבים טבלה עגולה זו מחולקת לשלוש מאות וששים זוויות שוות, כאשר כל זווית נקראת מעלה. ההצעה היא לחלק את הטבלה ל-2000

לזרעים... וחבל על ראבדיון"; ערוך השלם, שם, חלק שמיני, עמ' רע, ערך: "תר (=מלשון תורא)" וכו', ועמ' רעא, ערך: "תר (=תור ראש תור)" וכו'; ראה א' אבן שושן, המלון החרש, כרך שלישי, ירושלים 1993, עמ' 1241, ערך: "ראש", ערך משנה: "ראש-תור"; "בחקלאות) ראש שורה, חלקת שדה בצורת זווית של משלש, כעין טריז: 'היה ראש תור חטיב נכנס בתוך של שעורים (כלאים ב ז)"; שם, כרך רביעי, עמ' 1441, ערך: "תור", ערך משנה: "ראש-תור".

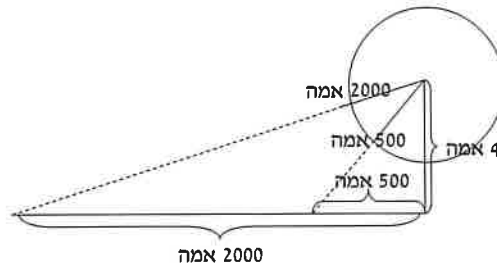
29 אוצה"ג, שם, עמ' 40 והע' ו: "המ' בקמץ".

30 אוצה"ג, שם, עמ' 41 והע' ב: "מעלה, מעלות".

31 הכוונה: חלק, ראה ההסבר בהמשך.

חלקים כנגד 2000 אמה שרוצים למרוד. הערה אחרונה זו אינה מתאימה כל כך, שהרי חלוקת המעגל ל-2000 חלקים שווים, ברומה לחלוקת המעגל ל-360 מעלות, לא תיתן את האפקט הנדרש. ייתכן שהכוונה היא סימון של 2000 קווים לאו דווקא במרחקים שווים זה מזה כך שעל ידי כיוון השפופרת על פי הסימון נצפה בנקודה הנמצאת במרחק המסומן, מן האדם המורד (ראה לקמן ציור ב). ברור גם שכל הסימונים יהיו רק ברביע אחד של המעגל, כלומר באחד הרבעים התחתונים הימני או השמאלי (בניח לשם הפשטות שהסימון יהיה ברבע השמאלי התחתון ונקרא לרבע זה הרביע השלישי).

ציור ב



נמצא כל רביע ממנו ה' מאות אמה, ומציב בו את השפופרת במסמר כדרך שמציבין את המטוטלת הנקרא עצארה. ובזמן שמשפע אותה חיל אחד מאותן חיילות הרי הוא מביט וצופה בשפופרת אלפים אמה לא חסר ולא יתר.

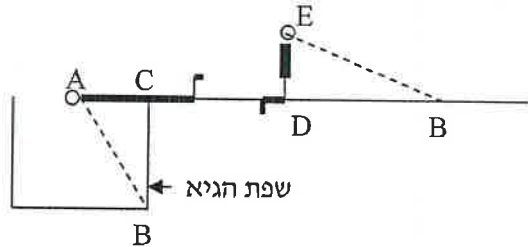
כאן נראה די בכיורו שחל שיבוש כלשהו בדרכי הגאונים. אם נחלק את המעגל ל-4 רביעים שווים, או אפילו רק את הרביע השלישי ל-4 חלקים שווים לא תצביע כל קרן לתוספת של 500 אמה. יתר על כן אם נחלק את המעגל ל-2000 חלקים שווים ונחסר מקו האופק חיל אחד (אחד חלקי 2000 מן המעגל השלם) ונוציא קרן בכיוון זה היוצאת מגובה של אדם, שגובהו 4 אמה, תגיע הקרן למרחק של כ-1273 אמה ולא 2000 אמה. כדי שהקרן תגיע למרחק של 2000 אמה יש לחסר מקו האופק זווית שהיא בקירוב החלק ה-3140 של המעגל.

בדרכים הללו או כיוצא בהן היתה שפופרת של רבן גמ'. והרי ביררנו שכשם שיכול לצפות בה אלפים אמה כך יכול לצפות בה חסר מיכן ויתר מיכן לפי הגובה והשיפוע.

ולענין הרוצה לידע עומקו של גיא יש כמה דרכים שיוודע בהן עמקו של גיא אלא מיהו אינן כדרך הזאת ששנו חכמ' מביא שפופרת ומביט בה ביבשה ויודע כמה עמקו של גיא, וא"א לעמוד על עמקו של גיא בדרך הזאת אלא בזמן שהגיא משתפע ויורד שיפוע נכון ובזמן שאדם עומד על שפתו ומסב פניו ומטה אותן ומצדיד אותן ומעמידן כנגד שיפועו כאילו הוא נכון על גביו ומביט בשפופרת כמה מרת ארכו למטה וכמה עד קרקעיתו בשיפוע מחשב ויודע כמה הוה עמקו...

נראה שהגאונים מסתייגים מעט מן הפשטות אשר מצטיירת מדברי חכמים בכל הקשור למדידת עומקו של גיא. הם מציינים שעל מנת לגזור ממדידה של מרחק במישור למדידת עומק הגיא על הגיא להיות משופע באופן הנכון, ולא – הדבר אינו אפשרי בצורה שמציעים חכמים. על פי הבנתנו, השיפוע הנכון עליו הם מדברים הוא שיפוע אנכי. במקרה זה על המודד להעמיד את השפופרת בצורה אופקית (כאשר מרחק השפופרת מקצה השפה כגובה החזקת השפופרת כאשר מרד את המרחק במישור) ואז להסתכל על תחתית הגיא בנקודה הסמוכה לשפת הגיא עליו הוא עומד ואז מדידת העומק היא בדיוק כמו מדידת מרחק במישור (ראה לקמן ציור ג).

ציור ג



גובה הגיא CB שווה למרחק במישור DB במידה שזווית DEB שווה לזווית CAB.

אבל לדעת רחבו שלגיא בשפופרת דרך קרובה היא. והוא פשוטן שלא לה הרברים שמשפיע את השפופרת משפה זו שלגיא עד שרואה את השפה האחרת ומחזיר את פניו ליבשה כשאותו השיפוע שלשפופרת שמור כמות שהיה ורואה את המקום שצופה אותו ומהלך אדם אחר ומשים בו סימן וחוזר ומודד את אותו המקום שביבשה כמה הוא והוא שיעור רחבו שלגיא או שלנהר לא חסר ולא יתר.

כדי למדוד רחבו של גיא אין צורך בסרבוול המתואר כאשר מודדים את עומקו. עומדים על שפה אחת של הגיא ומסתכלים על השפה השנייה, משאירים את השפופרת באותו השיפוע ומסתכלים במישור. אדם נוסף הולך ומסמן את הנקודה אליה מכוונת השפופרת, על פי הוראות הצופה. כעת נשאר רק למדוד מרחק זה במישור, דבר פשוט יחסית (אם השפופרת צמודה לטבלת מרחקים במישור כמצוין לעיל, אז ניתן פשוט להסתכל בטבלה ולדעת את המרחק) וזהו רחבו של הגיא (מצוין גם שבדרך זו ניתן למדוד גם רחבו של נהר). יש לשים לב שמדידה זו של רחבו של הגיא תלויה בהנחה ששתי השפות של הגיא זהות בגובהן.

וכך רצו חכמים להראות כמה מעשים יש לעשות בשפופרת לפיכך הזכירו בה עמקו שלגיא ואע"פ שדרך רחוקה היא מאד.

ודע כי אלפים אמה שמביט אותן בראש תור אינן מן הכאן³² אלפים אמה שלמות אלא חסרות פחות משליש אמה לפיכך צריך להוסיף עליהן כשליש אמה כדי שישלימן.³³

פה כנראה חלה שגיאה. הכוונה במשפט האחרון היא כנראה לכך, שכאשר האלכסון – מעיני הצופה (שגובהו כ-4 אמות) ועד הנקודה שהוא צופה בה – הוא 2000 אמה, אז המרחק במישור מרגלי הצופה ועד לנקודה קטן בשליש האמה מ-2000 אמה. אולם על פי משפט פיתגורס מרחק זה קטן רק ב-0.004 אמה מ-2000 אמה, שזהו מרחק זניח לעומת שאר אי-הדיוקים.

שיטת רבינו חננאל³⁴

שפופרת היתה לו לר"ג... פי' כעין שפופרת עשויה מנחושת היתה לו לר"ג ושיער בה אלפים אמה ביבשה והיתה אצלו לשער בה בים. ומפורש כך בירושלמי מצופית³⁵ היתה לו לר"ג והיה משער בה עיניו למישור אלפים אמה והיה משער בה בים ... הרוצה לידע כמה עומקו של גיא מביא שפופרת ומביט בה קרקעית הגיא וחוזר וצופה ומביט בה למעלה במישור. אם רואה במישור ק' אמה יודע שעומקו של גיא ק' אמה.

טענתו של ר"ח היא שרבן גמליאל ידע בעצם לשער מרחקים בעזרת השפופרת. הוא אינו מפרט כיצד רבן גמליאל עשה זאת. רבנו חננאל סבור שרבן גמליאל השתמש במדידה של מרחק על הקרקע כדי למדוד את אותו מרחק גם בים. העיקרון המונח בשיטתו של רבנו חננאל הוא מדידה בקרקע מישורית של 2000 אמה בשיטה כלשהי, באופן חד-פעמי, וקיבוע סימון מסוים בשפופרת על מנת שיתאפשר למדוד מרחק זה לאחר-מכן באופן פשוט. נראה שרבנו חננאל מתכוון גם הוא לשיטת הגאונים, כלומר סימון הזווית מתחת לאופק בה נצפית נקודה מסוימת הנמצאת במרחק הדרוש. באופן דומה, אם כי בסדר הפוך, הוא מציע למדוד את עומקו של גיא. תחילה יש לכוון את השפופרת לתחתית הגיא (עדיף, כשהוא שוכב על הקרקע ומכוון לתחתית הצלע עליו הוא נמצא, ראה לעיל ציור ג), אחר-כך ימדוד מרחק זה במישור תוך כדי שמירת הזווית מן האופק וימדוד את המרחק ממקומו ועד לאותה נקודה על המישור אליה מכוונת השפופרת. מרחק זה, מניח רבנו חננאל, אפשר למדוד בקלות וזהו גם עומקו של גיא. למעשה, שיטת רבנו חננאל מצדדת בדברי הגאונים.

32 ראה לעיל, הע' 25.

33 ראה בית הבחירה, עירובין, עמ' קסז, הביא בשינויים מ"ולענין הרוצה לידע עמקו שלגיא" עד כאן.

34 עירובין מג ע"ב.

35 ראה לעיל, הע' 4.

שיטת רש"י³⁶

שפופרת. קנה חלול וכשהוא ארוך אין צופין בו למרחוק וכשהוא קצר צופין בו יותר והיתה שפופרת של רבן גמליאל מתוקנת למדת צפיית אלפים או בים או ביבשה. כמה עומקו של גיא מביא שפופרת³⁷ ומביט בה. כיבשה וימדוד כמה אמות הוא יכול לצפות בה ואח"כ ילך על שפת הגיא ויצפה בה לעומקו ויתרחק לאחוריו עד שיבחיץ³⁸ שבמקום שכלה עומקו של גיא שם כלה צפיית השפופרת שאם יתרחק עוד מעט לא יראה את קרקעית הגיא וידע שעומקו של גיא והרחקתו שנתרחק משפתו הוי כמדת צפיית השפופרת.

רש"י מדבר על שפופרת שניתן למקדה על ידי הארכתה וקיצורה, או על מספר שפופרות קבועות באורכים שונים למדידת מרחקים קבועים שונים. ככל שהשפופרת קצרה יותר כך ניתן לראות למרחק גדול יותר, ולרבן גמליאל הייתה שפופרת שאורכה קבוע למדידת אלפים אמה. לפי רש"י, אם לדוגמה שפופרת מסוימת מתאימה למדידה של 500 אמה, אזי כדי למדוד מרחק של 500 אמה מעצם מסוים, יש להסתכל על עצם זה ולהתרחק ממנו. מרחקנו מן העצם יהיה 500 אמה בדיוק ברגע שאין ביכולתנו לראות את העצם יותר. כדי למדוד את עומקו של גיא מציע רש"י ראשית למדוד מרחק מסוים במישור, בעזרת מיקוד השפופרת עליו. רש"י מתכוון כנראה לכך, שאדם יכין מראש מספר רב של שפופרות, כל אחת מתאימה למדידת מרחק קבוע כלשהו (או לסמן מספר רב של מרחקים על שפופרת הניתנת להארכה וקיצור). לאחר מכן לעמוד על שפת הגיא ולכוון את השפופרת לקרקעיתו. אם המודד הכין מראש מספר רב של שפופרות, רש"י מניח שאחת השפופרות תתאים למדידת עומקו של הגיא. ייתכן שיצטרך לפסוע מעט מאוד לאחור כדי להתאים את המרחק לשפופרת שהכין. טענתו של רש"י היא שעומק הגיא בתוספת למרחק שהתרחק משפתו יהיה אז שווה לאורך שמדד בתחילה במישור, וכך ניתן להסיק את עומקו של הגיא.

מסקנת רש"י אינה מדויקת מבחינה מתימטית, אולם מאחר שההנחה היא שההליכה לאחור תהיה למרחק קצר מאוד (אחרת שפת הגיא תסתיר את תחתיתו), זהו קירוב טוב למדידת עומק הגיא. חוסר הדיוק בשיטה זו גורם לחישוב של אומדן למרחק בלבד.

- 36 רש"י, עירובין מג ע"ב, ד"ה שפופרת, וד"ה כמה עומקו של גיא.
 37 הגהות מוהריב"ן, שם, ד"ה רש"י: "נ"ב זה יתכן בשפופרת שמדת צפייתה יתרה על עומקו של גיא אך לא בגיא העמוק יותר".
 38 מלא הרועים, שם, ד"ה רש"י: "נ"ב נ"ל שמרחיק ועולה על סולם גבוה וקוף אצל הגיא, והשפופרת כבר מדודה עד כמה יכול לראות בה למטה לעומק"; ראה מנחם משיב נפש, שם, על הגהת מלא הרועים: "עד שיבחיץ שבמקום שכלה עומקו של גיא וכגון שמדד ביבשה שיכול לצפות בהשפופרת מאה אמה. ועולה על סולם בגובה עשרים אמה ורואה קרקעית הגיא, ואם עולה עוד מעט למעלה מעשרים אמה אינו יכול לראות עוד את קרקעית הגיא א"כ יודע שעומקו של גיא שמונים אמה ועם הרחקתו שנתרחק משפתו על גובה הסולם עשרים אמה הוי מאה אמה כמידת צפיית השפופרת".

שיטת רש"י למידת מרחקים מתבססת על העיקרון האומר שככל שהשפופרת קצרה יותר כך ניתן לראות בה למרחקים גדולים יותר. בניגוד לשיטת הגאונים שטענו כי במצב אופקי ניתן לצפות בשפופרת באופן עקרוני עד אין סוף, אלמלא מגבלות הראייה של האדם.

תורת חיים (על דברי רש"י)³⁹

וכנגדה אלפיים אמה בים הא פשיטא דכיון דהיה צופה בה אלפים ביבשה היה צופה בה נמי אלפים בים דמה לי ים מה לי יבשה אלא לפי שתחילת תיקונה נעשית למדת אלפים אמה דיבשה. דביבשה יכולין למדוד כמה אמות הוא צופה בה והיה יכול לתקנה למידת אלפים אמה אבל בים אי אפשר למדוד ועל ידי שהיה צופה בה ביבשה מידת אלפים כשהיה צופה בה בים היה יודע נמי שהוא שיעור אלפים והיינו דנקט לישנא דכנגדה אלפים בים משום שאלפים דים הם כנגד אלפים דיבשה הוה והשתא הוי דומיא דהא דקתני הרוצה לידע כמה עומקה של גיא וכו' דהתם נמי הוא יכול למדוד שיעור מה שהוא מביט בה על היבשה ואינו יכול למדוד שיעור עומקו של גיא. והא דקתני מביא שפופרת ומביט בה וידע כמה עומקו של גיא צריך לומר כדפי' רש"י ז"ל שמביט בה ביבשה וימדוד כמה אמות הוא יכול לצפות בה ואח"כ ילך על שפת הגיא ויצפה בה לעומקו ויתרחק לאחוריו עד שיבחין שבמקום שכלה עומקו של גיא שם כלה צפיית השפופרת שאם יתרחק עוד מעט לא יראה את קרקעית הגיא כו' דלפי' זה הוי דומי' דשפופרת דר"ג כדפי' [רש"י]

אבל קשה היאך יכול להבחין דבר זה שהרי כשמרחק לאחוריו ארבע וחמש אמות שוב לא יראה את קרקעית הגיא לא מפני המרחק אלא לפי ששפת הגיא מפסיק בינו לבין קרקעית הגיא ואם נפרש דלא כפירש"י ז"ל אלא ה"ק מביא שפופרת ועומד על שפת הגיא ומביט בה לעומקו ומתקן השפופרת מצומצם למדת צפיית קרקעית הגיא שאם מתרחק משפת הגיא אפילו אמה אחת שוב אינו רואה את קרקעית הגיא ואח"כ מביט בה ביבשה וימדוד כמה אמות הוא יכול לצפות בה והוא שיעור עומקו של גיא א"כ לא הוי דומיא דשפופרת דרבן גמליאל.

בעל תורת חיים מסב את תשומת לבנו לעובדה שנאמר שבעזרת השפופרת היה יכול רבן גמליאל למדוד 2000 אמה ביבשה וכנגדן גם 2000 אמה בים, והרי אין הברל ביניהם. אלא, ביבשה יכול הוא למדוד באמצעים אחרים 2000 אמה, ולפי תוצאות המדידה ביבשה יוכל למדוד גם בים, שם קשה למדוד באמצעים אחרים (ראה לעיל בשיטתו של רבנו חננאל).

מכאן הוא משליך למדידת עומקו של גיא. יש למקד את השפופרת לתחתית הגיא על ידי הארכתה או קיצורה כדי שתתאים לצפיית מרחק השווה לעומקו של הגיא ורק אחר כך לבדוק במישור מרחקו של מיקוד זה, וזהו עומקו של הגיא.

בעל תורת חיים חולק על פירושו של רש"י ההופך את סדר המדידות.

תורת חיים מצביע על הבעיה הטמונה לדעתו בשיטת רש"י, והיא – שאם ילך אדם מספר צעדים לאחור, הוא לא יוכל לראות את קרקעית הגיא משום ששפת הגיא תסתיר את הקרקעית. כלומר, לפי דברי תורת חיים, הבעיה בשיטת רש"י נעוצה בכך שיש לשער במדויק ומלכתחילה את עומקו של הגיא, אחרת שיטתו של רש"י לא תצלח.

הוא מעיר גם על חוסר הדיוק המתמטי בשיטת רש"י. אמנם יש צדק בדבריו, אך מכיוון שתוצאות המדידה הן רק הערכה גסה – לעומקו של הגיא, הרי שהחישוב של רש"י למדידת עומקו של גיא אינו פוגע במידת הסטייה של הערכה זו.

בן יהודע⁴⁰ (על דברי תורת חיים ופירוש רש"י)

והגאון תורת חיים ז"ל תמה על פירוש רש"י היאך יוכל להבחין דבר זה שהרי כשמתרחק לאחוריו ארבע וחמש אמות שוב לא יראה קרקעית הגיא לא מפני המרחק אלא לפי ששפת הגיא מפסיק בינו לבין קרקעית הגיא עכ"ד והניח כ"ז בקושיא ע"ש.

בעל תורת חיים תמה על פירוש רש"י, שכן אם ילך אדם מספר צעדים לאחור לא יוכל לראות את קרקעית הגיא משום ששפת הגיא תסתיר את הקרקעית.

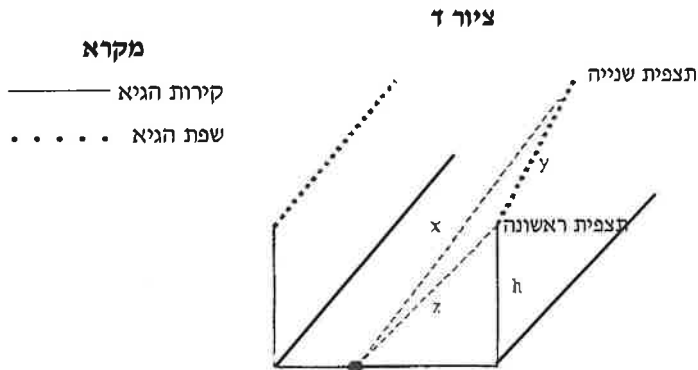
ולי... נ"ל... כונת רש"י ז"ל ברורה ופירושו הוא מוכרח מאד דאין כונת רש"י ז"ל לומר שיחזור לאחוריו והיינו לצד היבשה המתרחקת משפת הגיא כמו שמבין הגאון ת"ח ז"ל דזה לא יתכן כלל וכמו שטען אך הכונה היא אם רוצה לידע עומקו של גיא בדקדוק ואינו יכול למדוד מחיצתו מפני הגובה יעשה כך יביא שפופרת שיש בה לצפות בה יותר משיעור עומק הגיא לפי אומד הדעת למרובה באופן שכרוך לו שיעור צפיית השפופרת יותר משיעור עומק הגיא בודאי ויעמוד על שפת הגיא בצד אחד מצדדי הגיא ויביט בשפופרת והיא בקרקעית הגיא בנקודת קרקעית הגיא אשר לפני מעמד רגליו ממש וזו הנקודה תהיה מטרתו ויתחיל לילך על אורך שפת הגיא לאחוריו והשפופרת בידו וצופה בה באותה נקודה אשר בקרקעית הגיא שהיתה כנגד מעמד רגליו אשר שם אותה למטרה ובעת הילוכו על אורך שפת הגיא הנה הוא רואה את הנקודה של קרקעית הגיא באותה השפופרת ואחר שיתרחק במהלכו לאחוריו על שפת הגיא עד שלא יוכל לראות עוד את הנקודה והיא על קרקעית הגיא מפני שנשלם כח צפיית השפופרת שבידו או נתברר לו

40 בן יהודע, עירובין מג ע"ב, ד"ה שם מביא שפופרת.

בזה עומקו של גיא כמה כי אז ימדוד הקרקע של שפת הגיא שהלך בה בהיותו צופה בשפופרת שבידו ויתחיל למדוד מן מקום שכלה בו צפיית השפופרת עד מקום שעמדו רגליו בראשונה שהוא למעלה מאותה הנקודה שבקרקעית הגיא ואם למשל עלה המדידה של שפת הגיא שלשים אמה והוא יודע שצפיית השפופרת היא שיעור מאה אמה הנה בזה נתברר לו דעומק הגיא הוא שבעים אמה כי צריך לנכות מן שיעור מאה אמה של צפיית השפופרת שלשים אמה של מהלך שפת הגיא.

בן יהוידע מפרש באופן אחר את דברי רש"י. אדם יעמוד על שפת הגיא ויסתכל עם השפופרת על נקודה קבועה בתחתית הגיא, לפניו. על השפופרת להיות מתואמת למדידת מרחק ידוע מראש אשר עולה על גובה הגיא. אז יצעד לאחור לאורך שפת הגיא כאשר הוא ממשיך להסתכל על אותה הנקודה, עד שיפסיק לראות נקודה זו. המרחק מהנקודה בה הוא נמצא ועד הנקודה הנצפית בתחתית הגיא שווה למרחק שהשפופרת מותאמת למדוד. כעת, אומר בן יהוידע דבר שאינו נכון מתמטית. אם יחסר ממרחק זה את המרחק שהלך על השפה יקבל את עומק הגיא. במקרה זה הטעות אינה זניחה כמו בשיטת רש"י.

אמנם בן יהוידע לא דייק מבחינה מתמטית, אולם למרות זאת מסתדר בדבריו רעיון מבריק. כדי להסביר רעיון זה מצורף הציור הבא:



נסמן ב- h את גובה הגיא, ב- z את המרחק האווירי בין נקודת התצפית הראשונה לנקודה הקבועה בתחתית הגיא, ב- y את המרחק מנקודת התצפית השנייה לנקודת התצפית הראשונה על שפת הגיא וב- x את המרחק האווירי בין נקודת התצפית השנייה ועד לנקודה הקבועה בתחתית הגיא. המשולש אשר צלעותיו הן z, y, x הוא משולש ישר זווית, כאשר הזווית הישרה היא בין y ל- z . מכאן שעל פי משפט פיתגורס $z^2 = x^2 - y^2$. כלומר בניגוד לדברי בן יהוידע ישנה משמעות להחסרת ריבועי המרחקים x ו- y והתוצאה המתקבלת אינה עומק הגיא, h , אלא ריבוע המרחק z . ידיעת מרחק זה מקרבת אותנו מאוד למטרתנו. אם למשל הנקודה הקבועה תהיה קרובה מאוד לשפת הגיא עליה נמצא האדם, אז z הוא בקירוב טוב שווה ל- h .

ו"ש רש"י ז"ל ילך על שפת הגיא ויצפה בה לעומקו דהינו מקום העומק שהוא תחת רגליו שעומד שם ויתרחק לאחוריו ר"ל יתרחק לאחוריו על שפת הגיא עצמו לאורכו ולא לצד היבשה שאחרי שפת הגיא אלא הולך על שפת הגיא עצמו לאחוריו ועיניו תצפנה באותה הנקודה של קרקעית הגיא שהיא תחת מקום שהתחיל לעמוד בו כי יעשה לו איזה סימן מתחילה והוא יהלך עד שיבחין שבמקום שכלה עומקו של גיא כלומר במקום שכלה ראיית הנקודה ההיא הראשונה שם כלה צפיית השפופרת אשר שיעור צפייתה ידועה אצלו כמה אמות היא צופה שאם יתרחק עוד מעט לא יראה עוד את נקודת קרקעית הגיא ההיא ובזה ידע שמירת גבהו של גיא ומדת אורך שפת הגיא שהלך בו מן מקום המכוון כנגד הנקודה ההיא עד מקום שכלה צפיית השפופרת הנה כל זה המידה היא מידת צפיית השפופרת הידועה לו ואז בזה יבין עומקו של גיא בכירור ע"י שימדוד שפת הגיא שהלך בו ויראה אם עלה שלושים אמה והוא יודע ששיעור צפית השפופרת מאה אמה ינכה שלושים מן המאה וידע שעומק הגיא הוא שבעים אמה וזה ברור.

בקטע אחרון זה חוזר בן יהודע על תיאורו כדי לשכנע שלכך התכוון רש"י:

והרחבתי את הרברים בזה כדי להקל על המעיין שיהיה קשה ההבנה יען כי ראיתי אדם גדול וגאון קדמון הוא התורת חיים ז"ל... לא דק... להבין דברי רש"י ז"ל על אמתות וחשב בהם דרך אחרת ולכך נתקשה בהם.

הוא מסביר שהסיבה לכך שהוא מרחיב בביאור דברי רש"י טמונה בכך שאפילו גאון כמו הרב תורת חיים נשתבש בהבנת דברי רש"י:

ועוד ראיתי להגאון ת"ח ז"ל הנ"ז שעשה אופן אחר בפירוש הגמרא דלא כפירוש רש"י ז"ל... ונ"ל... דרש"י ז"ל לא בחר בפירוש הרב ז"ל מפני דלפי פירושו הול"ל יתקן שפופרת כפי עומקו של גיא ומביט בה ביבשה ואומרו יביא שפופרת משמע שהיא מתוקנת ומכוונת על שיעור ידוע ורק יביט בה ביבשה כדי לברר על ידה שיעור הגיא.

שיטת ר"י בן חכמון⁴¹

תאנא שפופרת היתה לו לרבן גמליאל,⁴² שצופה בחללה ומביט ממנה אלפים אמה ביבשה, כשיהיה מהלך ביבשה, וכנגדן אלפים אמה, כשיהיה מהלך בים. ובני מערבא גרסי מצופות⁴³ היתה לו לרבן גמליאל והיה משער בעיניו במישור. והרצה לידע עמקו של גאי, פי' גאי נחל ועומק וכיוצא בו, הרוצה לידע עמקם, מביא שפופרת מביט בה, בגאי, והוא עומד על שפתו עד שיביט בקרקעית הגאי כנגד הכתל שלפניו

41 פירוש רבינו ישמעאל בן חכמון על הלכות הרי"ף, מהר"ם שטינברג, בני-בוק תשלי"ד, עירובין מג ע"ב.

42 השמטנו את ההדגשות [א"צ, י"א].

43 ראה לעיל, הע' 4.

ובשפופרת, ואחר כך מחזיר פניו כנגד היבשה והשפופרת בשפועה כמו שיתה⁴⁴ משופעת כשהיה מביט בה בקרקעית הגאי לא שיוסיף בשיפוע ולא שישוה השפופרת, אלא כמות שהיתה מביט בה בגאי, כך מחזיר פניו ומביט בה ביבשה, במקום שוה אם היה בין מקום לרגליו⁴⁵ לבין מקום שראה – שתי אמות, ידע שרוחב הגאי הוא עשר אמות וגבהו שש עשרה אמה, שכל שיעור ראיית אמה ביבשה, שיעורה בעומק הגיא שמנה אמות ורחבה חמש אמות, מפני שהעומד על שפת הגאי ומביט לקרקעית הכותל שכנגד פניו לעולם אינו רואה אלא באלכסון, ודבר ידוע הוא שהאלכסון יתר על רוחב הריבוע שני חמשי מן המדידה, כמו שאמרו חכמים כל אמתא בריבועא אמתא ותרי חומשי באלכסונא⁴⁶ נמצאו השש עשרה אמות שהן גובה הגאי הן מאלכסונו עשרים אמה שהן חמש קומות, שכן דרך המושחזן לתת שיעור הקומה ארבע אמות, ישליך מהעשרים אמה גובה קומתו שהוא שיעור ארבע אמות, נמצא שגובה הגאי שש עשרה אמה. לפי' אם ראייתה ביבשה חמש אמות, תבין בלא ספק שעומק הגאי ארבעים אמה ורחבו עשרים וחמש אמה.

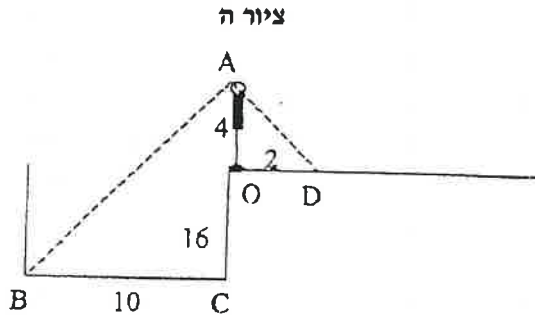
ישנה הנחה בסיסית, החוזרת על עצמה גם כאן, שצורת הגיא מלבנית וגובה שתי שפות הגיא שווה. עקרונית, הצעתו של ר"י בן חכמון היא לעמוד על שפת הגיא ולכוון את השפופרת לתחתית הקיר הנגדי של הגיא. לאחר מכן להסתובב עם השפופרת, תוך כדי שמירה על השיפוע, ולכוונה כך במישור. כעת ניתן לחשב את עומק הגיא בעזרת דמיון משולשים, בהנחה שידוע רוחב הגיא (בקטע הבא מוצעת דרך למדידת מרחק במישור) וגובהו של האדם (ההנחה היא בדרך כלל שקומתו של אדם היא בערך 4 אמות). ראה לקמן בציור המשולש ישר הזווית ABC דומה למשולש ישר הזווית AOD, זאת מאחר ש- $\angle CAB = \angle OAD$. מכאן שהיחס $AO:OD$ שווה ליחס $AC:BC$. אורכי הצלעות AO (גובהו של האדם), OD (מרחק הנקודה במישור מרגלי האדם) ו-BC (רוחב הגיא) ידועים. מכאן אפשר להסיק את OC שהוא עומקו של הגיא. ר"י בן חכמון פותח בדוגמה המתוארת בציור. אם רוחב הגיא הוא למשל 10 אמות ומרחק הנקודה D מרגליו 2 אמות, אז עומק הגיא יהיה 16 אמות. זאת משום ש-AC יהיה 20 אמות ואם נחסר את קומתו של אדם שהיא 4 אמות נקבל שעומקו של הגיא 16 אמות. על פי ההמשך נראה שהכותב שמע פרטים אלו מאדם אחר שידע כיצד לבצע את החישובים, אולם לא הבינם כראוי. הכותב ממשיך ומציין שהיחס בין רוחב הגיא לעומקו הוא $5:8=10:16$, כך שאם נדע למשל שרוחבו של הגיא הוא 25 אמה יהיה עומקו 40 אמה, אך דבר זה אינו נכון מאחר שמשולש OCB אינו דומה למשולש AOB. האדם, שממנו נלקח החישוב הנכון, ידע שיש להוריד מן המשולש הרומה את קומתו של האדם.

44 ראה ר"י בן חכמון, שם, והע' 137: "צ"ל: שהיתה".

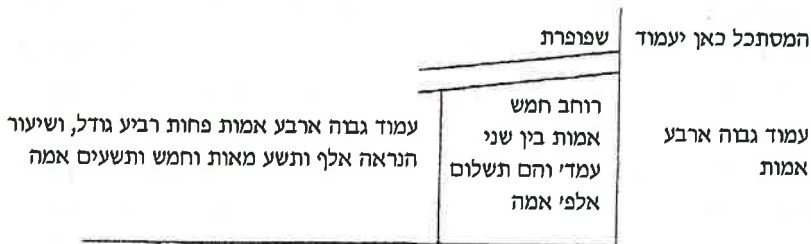
45 שם, הע' 139: "רגליו".

46 עירובין נו ע"א.

דבר נוסף שהוכנס בכתוב למעלה ואינו קשור לעניין הוא היחס בין האלכסון לניצבים בריבוע. האלכסון בריבוע ארוך פי $1\frac{2}{3}$ מניצביו. תכונה זו היא נכונה, אולם היא אינה קשורה לנושא הנידון, משום שבמציאות, בדרך כלל, מדובר במלבן ולא בריבוע.



אמר הר"ם במז"ל [=הרמב"ם] בפירוש שעשה לגמ' דעירובין,⁴⁷ דע כי יש דרכים הרבה לידע רוחק המקום שאתה רוצה לידע כמה רחוק בינך לבינו, ואותן הדרכים מבוררים לבעלי המשוחות, והנה אנו מפרשים לך אחד מאותן הדרכים בקירוב, תביא קורה נצוחה⁴⁸ או אבן שפניה שוין, ותקים בה עמוד שיש בגבהו ארבע אמות ותרחיק ממנו המש אמות באורך הקורה או באורך האבן, ותקים עמוד אחר שיש בגבהו ארבע אמות פחות⁴⁹ ממאה באמה, ויהיו שני העמודים זה כנגד זה ואינן נוטין לא לכאן ולא לכאן, ותקח השופרת אחת הלולה ותתן אותה על ראש שני העמודים ותחבר אותה שם, ותסתכל מראש השופרת שמצד העמוד הראשון שיש בו ארבע אמות, ומקום שתראה מן הצד השני מן הארץ הוא סוף האלפים,⁵⁰ וזו צורתה:



47 ראה במבוא לפירוש רבינו ישמעאל בן חכמון, שם הסיק: "שהיה לפני רבינו גם פירוש הש"ס של הרמב"ם... ונמצא שיש בידינו את פירוש הרמב"ם למסכת עירובין מכלי שני"; השווה משנה עם פירוש רבינו משה בן מימון, עירובין, מהד' י' קאפה, ירושלים תשכ"ד, פ"ד מ"א, עמ' עה: "ואיני רואה שכראי להאריך ולבאר איך רואין את זה מפני שארך הרבור וימשך ולא ישיג ממנו תועלת אלא מי שידע הנדסה וידע יחסי המשולשים הדומים".

48 השווה פירוש רבינו חננאל בן שמואל, עירובין מג ע"ב: "נכוחה".

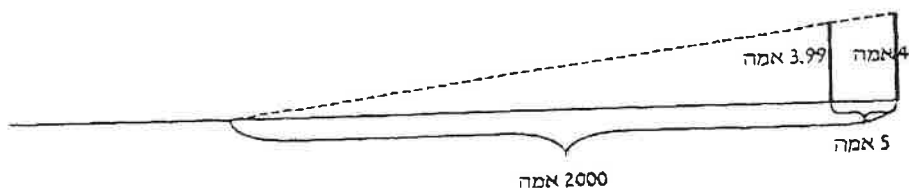
49 בר"ח בן שמואל, שם, נוסף: "מאחר".

50 שם, נוסף: "ממקומך".

ר"י בן חכמון מציין דרך למדידת מרחק של 2000 אמה במישור על פי הרמב"ם. לוקחים שתי קורות, האחת באורך 4 אמות והשנייה אורכה 3.99 אמה. מניחים קורות אלו במרחק 5 אמות זו מזו. כאשר נניח את השפופרת על הקורה הארוכה ונסתכל דרכה על הקצה העליון של הקורה הנמוכה, המשך הקרן היוצאת מעיני הצופה תפגע בקרקע במרחק 2000 אמה (ראה לקמן ציור ו). הדרך המתוארת כאן נכונה, אולם מסורבלת מעט לצרכנו. היא טובה למדידת מרחק קבוע מראש, אולם כדי למדוד מרחק שאינו ידוע מראש נצטרך לשנות את המרחק בין הקורות או את היחס בין אורכיהן עד שהקרן תפגע בנקודה שנרצה למדוד ועל פי הנתונים החדשים לחשב את המרחק.

ציור ו

שיטת הרמב"ם למדידת מרחק במישור



ועל דרך זו⁵¹ אמר הגאון תדע עמקו של גאי. על דרך שאנו מפרשין והוא שיחשב רוחב הגאי מן השפה אל השפה ויעמוד על שפת הגאי⁵² סמוך לכותל שכנגד פניו ויחזיר פניו אל היבשה והשפופר' באותו השפוע שראה בו קרקעית הגיא ויביט בארץ במישור וידע כמה בין מקום רגליו ובין מקום שראה, ושיעור מקום זה שראה מרוחב הגיא הוא שיעור גובה הגאי.⁵³ מגובה לגאי עם עמקו ישליך מן הכל גובה קומתו והנשאר הוא גובה הגאי.⁵⁴

כאן הוא מציין שבעזרת חישוב רוחב הגיא כמרחק במישור, בעזרת השיטה המתוארת בתחילה ובעזרת דמיון משולשים נקבל את עומקו של הגיא, לאחר שנחסיר את קומתו של האדם מן הגובה המתקבל.

מכאן ואילך, יש בדברי ר"י בן חכמון חזרה על ההסבר למדידת עומקו של גיא כאשר ידוע רוחבו, בעזרת דמיון משולשים.

51 שם, הע' 21: "ונראה שג"ז מלשון הרמב"ם בפירושו למסכת עירובין".
 52 שם, הע' 22: "מכאן עד 'קרקעית הגיא' חסר בריב"ח [=ר"י בן חכמון], כנראה בטעות הדומות: הגאי-הגאי, ויש להשלים עפ"י הלשון כאן" [ויביט בשפופרת עד שיראה קרקעית הגיא!].
 53 שם, נוסף: "עם גובה קומתו".
 54 שם, הע' 26: "הלשון בפי' ריב"ח משובשת כאן. שכ': 'הוא שיעור גובה הגאי מגובה לגאי עם עמקו ישליך מן הכל' וכו', וצ"ל כלשון רבינו" [=ר"ח בן שמואל].

בהמשך דבריו, הוא חוזר על שיטת הגאונים למדידת מרחק במישור על ידי בניית טבלה מעגלית של מרחקים שהשופרת מחוברת אליה בציר כמו באצטרולב. הוא מציע למדוד מרחק של 2000 אמה על ידי כך ששני צייר משולש ישר זווית שאחד מניצביו גדול פי 500 מן השני (הוא מציע שניצב אחד יהיה כרוחב אצבע והשני כרוחב 500 אצבעות) ואז להשתמש בזווית שנוצרת כדי למדוד 2000 אמה. שהרי אם אדם שגובהו 4 אמות יכוון את השופרת על פי הזווית שמול הניצב שאורכו 500 אצבעות הוא יצפה על נקודה במרחק 2000 אמה, בגלל שמירה על היחס 1:500.

לכסוף, מזכיר ר"י בן חכמון את הצעת הגאונים לטבלה לשם מדידת מרחקים.⁵⁵ ר"י בן חכמון טוען שהשרטוטים ששורטטו כדי להסביר את דברי רב האי גאון היו משובשים ולכן קשה היה להבינם. לפיכך החליט להוסיף שרטוט משלו אשר מערבב כמה מהרעיונות יחדיו.

סיכום

שיטת הגאונים ורבנו חננאל – כשיטה זו מדובר בעיקר על מדידת מרחק במישור בעזרת שופרת המקובעת על ידי ציר לטבלת מרחקים מעגלית, כך שהמרחק נמדד על פי שיפוע השופרת. בעזרת שיטה זו אף מוסבר כיצד ניתן למדוד עומק של גיא במקרה שדופן הגיא אנכית.

שיטה זו טובה מאוד למדידת מרחקים במישור ומשתמשים בה עד היום. היא די מסורבלת למדידת עומק של גיא, אך בהתחשב באמצעים שהיו בשימוש בזמנו של רבן גמליאל היא הטובה ביותר ומדויקת.

שיטת רש"י – בעייתית מבחינה מתמטית.⁵⁶ שיטתו מבוססת על האפשרות להתאים שופרות באורכים שונים כדי למדוד מרחקים שונים או שופרת אחת הניתנת להארכה וקיצור. הוא מציע למדוד תחילה מרחק מסוים במישור, או מספר רב של מרחקים והתאמת שופרות למרחקים

55 ראה דברינו לעיל, עמ' 8.

56 ש' בולג'וד' בן עזרא, פיסיקה במקורות יהודיים, ירושלים תשס"ד, עמ' 1-50, יש מספר בעיות ביחס לשופרת הנדרונה שם:

1. השיטות ב"מבוא המדעי" אף שהן טובות, אינן מוזכרות ע"י חז"ל ודורשות ידע רב מדי לעומת השיטות של חז"ל.
2. הכותבים נמנעים מלומר במפורש שרש"י לא דייק בדבריו, כנראה מפאת כבודו, ומנסים לשים כפיו דברים שלא אמר ואינם קרובים לדבריו. ראה לדוגמה, שם, עמ' 16, הכותבים טוענים שכנראה רש"י רוצה למדוד 2000 אמה בתוך הגיא ולא את עומקו – אין זה מתאים לדברי רש"י.
3. הכותבים מצטטים לעתים את דברי חז"ל ומסבירים אותם מילולית בלבד, ואינם מציינים שיש טעות מתמטית בדבריהם. ראה לדוגמה, שם, עמ' 37, הכותבים מצטטים את פירושו של המאירי המפרש את דברי רש"י באופן דומה לפירושו של בן יהודע. בפירושו של המאירי יש טעות מתמטית שלא צוינה ע"י הכותבים.

קבועים שונים. לאחר מכן הוא מציע שיש להסתכל על נקודה בתחתית הגיא וללכת לאחור עד שנחדל לראות את תחתית הגיא, מפני שהשפופרת מתואמת למרדית מרחק זה. לטענתו המרחק שהלך לאחור יחד עם עומק הגיא שווה למרחק הקבוע שמרד מלכתחילה, ברור שטענה זו אינה נכונה. אך בהנחה שההליכה לאחור לא ארכה יותר מאמה אחת או שתיים, עומק הגיא שיתקבל ממרד זה יהיה בקירוב נכון. מעניין לראות את המאמצים של חכמים שונים⁵⁷ המבחינים בבעיות בדברי רש"י, לפרש את דברי רש"י בפירושים משונים (לפעמים נכונים מתמטית אולם בכירור לא מתאימים לכוונת רש"י). הניסיון לחלץ את פירושו של רש"י בא אפילו על דבר פירושו של חכם אחר (תורת חיים). לדוגמה, בן יהודע מפרש את ההליכה לאחור כהליכה לאורך שפת הגיא, חכם אחר⁵⁸ מפרש את ההליכה לאחור כהליכה לכיוון מעלה בעזרת סולם (כאן יש לנו שיטה נכונה מתמטית אולם לא מעשית ובכירור לא מתאימה לדברי רש"י).

שיטת תורת חיים – שיטתו מסתמכת על כך שניתן להתאים את השפופרת למרדית מרחק מסוים, כך שכאשר מביטים על עצם שנמצא במרחק זה רואים את החפץ בכירור ואם מתרחקים מעט מתחיל החפץ להיטשטש. הוא מציע למקד את השפופרת על הקרקעית בנקודה קרובה לשפת הגיא עליו עומד המודד. לאחר מכן לברוק במישור מהו המרחק עליו ממוקדת השפופרת. שיטה זו היא מעשית ומבריקה בפשטותה, אולם היא מסתמכת על כך ששפת הגיא יורדת בצורה אנכית, אחרת המרחק עד הקרקעית לא יהיה כעומקו של הגיא.

שיטת בן יהודע – כאמור, בן יהודע מנסה להסביר את פירושו של רש"י. הוא טוען שבעל תורת חיים וחכמים אחרים דלעיל לא הבינו את רש"י. בן יהודע מסביר, שכאשר רש"י מציע ללכת לאחור הוא מתכוון לאורך שפת הגיא. על פי שיטתו ממקד האדם את השפופרת על מרחק קבוע, מסתכל על נקודה קבועה בתחתית הגיא ולאחר מכן צועד לאורך שפת הגיא עד אשר השפופרת מתמקדת על נקודה קבועה זו. טענת בן יהודע היא שבמקרה זה מרחק קבוע זה שווה לעומק הגיא יחד עם המרחק שצעד לאורך שפת הגיא. טענה זו אינה נכונה מתמטית. לעיל⁵⁹, צוין כיצד ניתן לשפר שיטה זו כדי לקבל תוצאות טובות.

4. כשדברי חז"ל יש טעות, הכותבים מנסים לשייך את הדברים למשהו אחר או משמיטים את החלקים הלא נכונים בדברי חז"ל. הפירוש מופסק בנקודה הבעייתית כשהפרשן מתחיל בטעויות מתמטיות. ראה לדוגמה, שם, עמ' 39-40, בפירושו של ר"י בן חכמון לדברי הרמב"ם. ציטטו מדבריו את פירושו לדברי הרמב"ם לגבי מרדית מרחק במישור ולא הביאו את תחילת דבריו לגבי השיטה שלו למרדית עומק גיא, למרות ששיטתו טובה. לא הזכירו את הטעות המתמטית שהוא עושה, בכך שהוא משווה יחסים $44:25 = 4:5$ (ראה דבריו, שם: "לפי" אם ראיתה כיבשה חמש אמות, תבין בלא ספק שעומק הגיא ארבעים אמה ורחבו עשרים וחמש אמה" (יש לקחת בחשבון את גובה המודד כ-4 אמות).

57 ראה לעיל, עמ' 16-18, שיטת בן יהודע.

58 ראה לעיל, הע' 38.

59 ראה לעיל, עמ' 17 וציור ד.

שיטת ר"י בן חכמון – שיטה זו בניגוד לשיטות הקודמות מתבססת על דמיון משולשים. ראשית יש למרוד את רוחב הגיא. מדידת רוחב הגיא מתוארת כמדידת מרחק במישור. מוצעות לכך שתי דרכים, כאשר הטובה ביניהן מתבססת על הצמדת השפופרת על ידי ציר לטבלת מרחקים מעגלית כמו באיצטרולב. לאחר מדידת רוחב הגיא מכוונים את השפופרת לתחתית הגיא בשפה הרחוקה. מסובכים את השפופרת, תוך כדי שמירת השיפוע, מסתכלים על נקודה במישור ומודדים את המרחק אל נקודה זו (מספיק להסתכל על המרחק בטבלה המצוינת לעיל).⁶⁶ כעת על פי דמיון משולשים ניתן לקבוע את עומק הגיא. שיטה זו טובה מאוד ומדויקת יותר מן השיטות הקודמות. יתר על כן השיטה מתבססת על ידע מתמטי גבוה יותר מאשר השיטות האחרות.

שיטת הרמב"ם למדידת מרחק במישור – מציבים שתי קורות, האחת באורך ארבע אמות והשנייה בגובה 3.99 אמות במרחק של חמש אמות זו מזו. אם נסתכל מהקצה העליון של הקורה הגבוהה דרך הקצה העליון של הקורה הנמוכה יותר, ונמשיך קו זה עד שהוא נפגש בקרקע, מקום המפגש יהיה במרחק של אלפיים אמות (ראה לעיל ציור 1). אפשר למדוד בצורה זו מרחקים שונים על-ידי שינוי אורכי הקורות והמרחק ביניהן.

לסיכום, השיטות הנסקרות מתייחסות למדידת מרחק מישורי והן נחלקות לשתי דרכים עיקריות:
 א. מדידת זווית מתחת לאופק ושימוש בדמיון משולשים (הגאונים, ר"ח, רמב"ם, ר"י בן חכמון).
 ב. מדידה ישירה של מרחק על-ידי ידיעת גבול חדות הראייה (רש"י, תורת חיים, בן יהוידע).

השיטות המודרניות

מדידה של עומק גיא כיום יכולה להתבצע בהרבה אופנים ובצורה מדויקת מאוד. עם זאת, רוב השיטות של היום מתבססות על עקרונות דומים לעקרונות המוזכרים במאמר.
 אם נרצה למדוד היום את עומקו של גיא כאשר אנו עומדים על שפתו ללא ירידה לתחתיתו נוכל למשל לעשות זאת באופן הבא:

בשלב הראשון נעמיד חצובה על שפת הגיא ונפלוס אותה (בניגוד לחכמי התלמוד אין אנו מניחים ששפת הגיא אופקית במדויק). הפילוס מתבצע בעזרת פלס שנמצא על החצובה. את המכשירים שנמדוד בעזרתם נקבע לחצובה.

בשלב שני נמדוד בעזרת סרט מדידה את גובה החצובה.

בשלב שלישי נמדוד את המרחק ממקום עמידתנו ועד נקודה כלשהי בתחתית הגיא (נסמן מרחק זה ב- d) בעזרת מד טווח לייזר (מכשיר זה עובד על פי אותו העיקרון שבאמצעותו משתמש העטלף להתמצאות בשטח. מכשיר זה נראה כמשקפת רגילה. מכוונים משקפת זו על עצם מסוים

ולוחצים על לחצן הפעלה. המכשיר שולח קרן לייזר הפוגעת בעצם וחוזרת אל המכשיר. המכשיר מורה על המרחק עד העצם על פי חישוב הזמן שלקח לקרן לעבור את המרחק הלוך ושוב). בשלב רביעי נמדוד את זווית העומק בה נראית הנקודה בתחתית הגיא (נסמן זווית זו ב- α), למשל בעזרת מכשיר שנקרא תיאודוליט, מכשיר מדויק בהרבה מן האצטרולב. יש לפלס ראשית את המכשיר כך שיראה זווית עומק של 0° כאשר הוא אופקי (הפילוס נעשה בעזרת פלס הנמצא על המכשיר). גם מכשיר זה מכיל משקפת אשר יכולה להסתובב על ציר אנכי, כדי למדוד זוויות עומק ועל ציר אופקי כדי למדוד זוויות סיבוב (מה שנקרא גם אַזימוט). מכוונים את המשקפת על הנקודה בתחתית הגיא ובעיניית מופיעה זווית העומק של נקודה זו. כעת, אם נסמן ב- h את עומק הגיא, אז $h = d \cdot \sin\alpha$ (בניגוד לחכמי התלמוד גם את החישוב הסופי ניתן לבצע בצורה מדויקת הרבה יותר בעזרת מחשבון פשוט).

