עמוס אלטשולר ונתנאל אלטשולר

טור גיאומטרי אינסופי חבוי במשנת הראב״ד

מוקדש לחתן פרס נובל פרופ׳ ישראל אומן
אשר הסב את תשומת הלב למשנה זו
וביארה לאור תורת המשחקים

בשני מאמרים[1] שזכו לפרסום רב, דן פרופ׳ אומן במשנה בבבלי כתובות צג ע״א. משנה זו דנה באדם שמת ואין בעזבונו די כדי לשלם את כתובות שלוש נשותיו. כיצד יחולק ביניהן העיזבון? במשנה מתוארים שלושה מקרים פרטיים של גובה העיזבון (הכתובות קבועות) ונשאר לנו למצוא את כלל החלוקה. מאחר שכלל חלוקה המתאים למקרים המתוארים אינו נראה לעין, מציעים מספר פרשנים שיטות חלוקה משלהם, אף כי אינן הולמות את המקרים המתוארים במשנה.

אומן (בצד מתן שיטתו שלו, לאור תורת המשחקים, אשר הולמת את המשנה) מתאר שלוש שיטות כאלה: שיטת רש״י (ואחרים, אשר גם נקבעה להלכה), שיטת הגאונים (על פי הרי״ף) ושיטת הראב״ד. בעוד שתי השיטות הראשונות קלות לחישוב, ובמקרה שהעיזבון גדול דיו כדי לכסות את כל הדרישות, הן אכן נותנות לכל אישה את מלוא מבוקשה, שיטת הראב״ד מסובכת יותר. זאת ועוד, כאשר הראב״ד טוען שכאשר העיזבון גדול דיו לכיסוי כל הדרישות אזי כל אישה מקבלת את מלוא דרישתה, אין זה ברור כלל שזה אכן נובע משיטת החלוקה של ראב״ד ולא מהשכל הישר גרידא.

במקרה שהעיזבון נופל מעט מסכום הדרישות מחייב האלגוריתם שבשיטת הראב״ד מספר גדול של צעדי חישוב, ומספר זה שואף לאינסוף ככל שההפרש בין העיזבון לסכום הדרישות קטן. עולה כאן אפוא שאלת התכנסות של טור אינסופי, והתכנסות למספר מסוים דווקא. השאלה, האם במקרה הגבולי אכן מתקבלת בשיטת הראב״ד התוצאה אשר מתחייבת מן השכל הישר באופן בלתי תלוי בשיטתו, הינה אפוא משמעותית ביותר לביסוס עקיבות שיטת הראב״ד.

במאמר אנו מכלילים את שיטת הראב״ד למספר כלשהו של נשים (כתובות) ומוכיחים שבכל מקרה, כאשר סכום העיזבון גדול דיו כדי לשלם בו את כל הכתובות, אכן מקנה שיטת הראב״ד לכל אישה את מלוא כתובתה.

1 R.J. Aumann and M. Maschler, "Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud", *J. Economic Th*. Vol. 36 No. 2 (1985), pp. 195-213; **י׳ אומן, ״בענין מי שהיה נשוי שלוש נשים״, מוריה שנה כב (ג-ד), עמ׳ צח-קז.**

א. מי שהיה נשוי שלוש נשים...

המשנה במסכת כתובות צג ע"א דנה בעניין "מי שהיה נשוי שלש נשים ומת, כתובתה של זו מנה (= 100) ושל זו מאתיים ושל זו שלש מאות" ואין בעיזבון די כסף כדי לשלם לכולן — כיצד חולקין. כדרכה, אין המשנה קובעת כלל לחלוקה, אלא מתארת שלושה מקרים פרטיים — כאשר העיזבון הוא 100, 200 או 300 — ומשאירה לנו למצוא את הכלל. החלוקה המתוארת במשנה מוצגת בטבלה 1.

העיזבון	תובעת ה-100	תובעת ה-200	תובעת ה-300
100	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$
200	50	75	75
300	50	100	150

טבלה 1: החלוקה לפי המשנה

הגמרא מתקשה למצוא כלל אחד ההולם את שלושת המקרים המתוארים במשנה. בסופו של דבר זונחת הגמרא את הצעות החלוקה שבמשנה, ומביאה את דברי רבי (רבי יהודה הנשיא, עורך המשנה) המציע חלוקה שונה, לפי כלל שהוא מכנה "חולקות בשווה". גם נסיונות מאוחרים יותר (רב האי גאון — לפי תיאור הרי"ף, ורב סעדיה גאון) למצוא כלל חלוקה אשר יהלום את המשנה לא צלחו, עד אשר לאחרונה, בשנת 1985, הציעו פרופ' אומן ופרופ' משלר כלל פשוט ההולם יפה הן את המשנה, הן את נסיונו של רב האי גאון והן את דרכן של המשנה והגמרא במקומות אחרים (שניים אוחזין בטלית). פרופ' אומן תיאר הצעה זו במאמרו ב"מוריה", טבת תשנ"ט.

בפירוש הכלל של רבי "חולקות בשווה" רבו החולקים, ובאותו מאמר מתאר פרופ' אומן שלוש שיטות של הראשונים בהבנת דברי רבי: שיטת הרי"ף (על אתר), שיטת רוב הפוסקים (ביניהם רש"י ורמב"ם) ושיטת הראב"ד בהשגתו על הרי"ף. לצורך הדגמת שיטות אלה, וכן שיטתו שלו, מוסיף פרופ' אומן שלושה מקרים על אלה הנדונים במשנה, וכך הדוגמאות הניתנות הן במקרים בהם העיזבון הוא 100, 200, 300, 400, 500 ו-600. כך בשלוש מתוך ארבע השיטות. היוצאת מן הכלל היא שיטת הראב"ד, שם מדגים פרופ' אומן את שלושת המקרים הראשונים בלבד. הראב"ד עצמו מדגים את שיטתו בארבעת המקרים הראשונים. שני המקרים האחרונים, עיזבון של 500 ועיזבון של 600, נותרו אפוא ללא הדגמה. לכאורה גם אין צורך בהדגמה נוספת זו, שהרי הראב"ד מתאר בפרוטרוט את כלל החלוקה שלו.

אף על פי כן נראה לנו שחשוב להדגים את הכלל של הראב"ד במקרה שהעיזבון הוא 600. לכאורה יש מקום לתמוה — הרי מקרה זה, בו העיזבון הוא 600, הוא פשוט ביותר: כאן סכום העיזבון מספיק (בדיוק) כדי לתת לכל אחת משלוש הנשים את מלוא תביעתה! אכן, אין אנו זקוקים לכללו של הראב"ד במקרה זה כדי להגיע לחלוקה הטבעית, כי אם להפך: אנו זקוקים

למקרה זה כדי לבדוק באמצעותו את כלל החלוקה של הראב״ד! לו יצוייר שהפעלת כלל החלוקה של הראב״ד על המקרה של עיזבון 600 תיתן תוצאה אחרת מאשר שכל אשה תקבל את מלוא דרישתה, הרי זה שומט את הבסיס ההגיוני מכללו של הראב״ד. דבר זה נכון כמובן גם לגבי שלוש השיטות האחרות המתוארות במאמרו של פרופ׳ אומן, אלא שבאלה הבדיקה פשוטה ביותר ונעשית כלאחר יד. לעומת זאת הפעלת שיטת הראב״ד על המקרה הנדון אינה פשוטה, ואף צופנת בקרבה הפתעה, שהיא עיקר עניינן של שורות אלה.

בסעיף ב נתאר את שיטת החלוקה של הראב״ד. בסעיף ג נפעיל את שיטת החלוקה של הראב״ד לגבי המקרים של עיזבון 400 ועיזבון 500, ובסעיף ד נטפל במקרה שבו העיזבון הוא 600. הכלל של הראב״ד אמור לפעול גם במצב הכללי, כאשר מספר הנשים הוא לאו דווקא שלוש, דרישותיהן — סכומים כלשהם והסכום העומד לחלוקה גם הוא כלשהו. בסעיף האחרון, סעיף ה, נתאר ונפתור את הבעיה הכללית.

ב. שיטת הראב״ד

נביא את כללו של הראב״ד בלשונו, כאשר הוא מסביר את כלל החלוקה שלו אגב הדגמת המקרה שבו העיזבון הוא 400:

ועתה לדעת רבי כדברי הגאונים ז״ל כשיש שם [עיזבון של] מנה או מאתים או ג׳ מאות כבר פירשנו כי עד מקום ששוה שעבודן תשוה חלוקתן, אבל כשהיו שם ד׳ מאות או יותר לא נתפרש איך תהיה חלוקתן. עתה אפרש כי בודאי עד [עיזבון של] ג׳ מאות כח השלישית יפה מכולן כי היא אומרת [?] כל אלה שעבודיהם ובעלת המנה חולקת עמהם במנה הא׳ מפני ששעבודה גם הוא עליו וכן בעלת המאתים עד מאתים ומשם ולהלן אין להם שעבוד ואין להם חלק במנה השלישי. אבל עכשיו שיש שם עוד מנה רביעי כולן חוזרות עמה לחלוקה באותו מנה, לפי שאין שעבודה מג׳ מאות ומעלה יותר מחברותיה. עתה נחשוב כמה נטלו בשלושת המנים ומה שחסרו מתפיסתן חוזרות ונוטלות באותו המנה הד׳ עד מקום שהגיע שעבודם. והנה בעלת המנה מגיע שעבודה באותו מנה עד שיתין ושיתא ותרי תילתי [= $66^2/_3$] לפי שנוטלת במנה הראשון תלתין ותלתא ותילתא [= $33^1/_3$] ועד כאן חולקות בשוה עמהם. ומשם ועד השלמת המנה חולקות בעלת מאתים ובעלת ג׳ מאות בשוה. וכן אם היו שם [עיזבון של] ה׳ מאות על זה הדרך הן חולקות, כי מג׳ מאות ולמעלה כלן חוזרות לחלוק עמה זו עד מקום הגעת שעבודה להשלמת חסרון גבייתה מן הגבוי [=גביה] הראשון וזו עד מקום הגעת שעבודה להשלמת חסרון גבייתה מן הגבוי הראשון וזו עד מקום שעבודה להשלמת הגבוי הראשון. והדרך הזו מבואר ואין בו ספק. וכשיהיו שם ו׳ מאות כבר מצאו כולן כל שעבודיהן, זו נוטלת מנה וזו נוטלת מאתים וזו ג׳ מאות.

ובלשוננו: יש לחלק באופן שווה כל שקל החל מהשקל הראשון בין כל הנשים אשר תביעתן כוללת שקל זה. לאחר מכן, אם נותר כסף לחלוקה הוא יתחלק באותו אופן בין כל הנשים אשר טרם קיבלו את מלוא תביעתן ושוב נחזור על התהליך עד שייגמר הכסף או עד שתקבלנה כל הנשים את דרישותיהן.

ובאופן מפורט יותר:

נסמן את הדרישות, לפי גודלן, בסדר עולה: a, b, c (בשלב הראשון, a=100, b=200, c=300). התובעות אותן, לפי הסדר, הן הראשונה, השנייה והשלישית. את העיזבון נחלק לארבעה חלקים: a, b-a, c-b ומה שנשאר — כלומר העיזבון פחות c (שהוא סך הכספים שחולקו עד כה) יסומן ב-d. ייתכן כמובן שהחלק הרביעי, d, יהיה ריק, וזאת כאשר העיזבון כולו אינו עולה על c, ואולי גם החלק השלישי יכיל פחות מאשר c-b (זאת כאשר העיזבון הוא פחות מ-c), וכן הלאה.

כלל החלוקה: את החלק הראשון, a, תובעות שלושתן, לכן הוא מתחלק ביניהן באופן שווה. הראשונה יוצאת (זמנית) מהתמונה. את החלק השני, b-a, תובעות השנייה והשלישית בלבד, לכן הוא מתחלק ביניהן באופן שווה. השנייה יוצאת (זמנית) מהתמונה. את החלק השלישי (אם בכלל נשאר משהו מהעיזבון) תובעת השלישית בלבד, ולכן היא מקבלת אותו.

עד כה אף אחת לא קיבלה את מלוא תביעתה. הראשונה קיבלה רק שליש מתביעתה, השנייה קיבלה פחות ממחצית תביעתה וגם השלישית לא קיבלה את מלוא תביעתה. (כל זה אמור כאשר העיזבון הוא לא פחות מ-c.) לכולן יש אפוא תביעות. התביעות ה"חדשות" הן מסכום העיזבון ה"חדש" העומד לחלוקה, הוא d, והתהליך חוזר חלילה (כל זמן שנשאר משהו ב-d).

מאחר שבמהותו של תהליך זה הוא שאף אחת מהתובעות אינה מקבלת את מלוא תביעתה, יוצא שגם כאשר סכום העיזבון מספיק כדי למלא את כל הדרישות (כגון כאשר התביעות הן בסך 100, 200 ו-300 והעיזבון הוא 600), שום מספר סופי של צעדים בתהליך זה לא יביאנו אל החלוקה הטבעית, שבה כל אחת מקבלת את מלוא תביעתה.

אכן, אולי אפשר להבין מלשונו של הראב"ד, שבמקרה זה הוא זונח את שיטתו, אין בה עוד צורך, שכן "כבר מצאו כולן כל שעבודיהן".

היום אנו יודעים מה שבזמנו של הראב"ד אולי לא היה ידוע, שגם תהליך אשר מורכב ממספר אינסופי של צעדים יכול להסתיים בזמן סופי ולתת תוצאה סופית. ובלשון המתמטיקה — גם טור אינסופי יכול להתכנס.

נשאלת אפוא השאלה: במקרה שגודל העיזבון שווה לסכום התביעות, האם החזרה האינסופית על התהליך הנ"ל תסתיים (= תתכנס) בתוצאה שבה כל התובעות מקבלות את מלוא תביעתן? אם לא כך הדבר, אזי יש פגם מהותי בעצם השיטה של הראב"ד.

אפשר וראוי לפצל את שאלתנו לשתי שאלות. האחת: האם החזרה האינסופית הזו בכלל תסתיים (תתכנס) והשנייה: במידה והתשובה לשאלה הראשונה היא חיובית, האם ההתכנסות תהיה כמצופה.

מבחינה מתמטית התשובה לשאלה הראשונה היא כמובן חיובית, שהרי מדובר בטור חיובי חסום (על ידי סכום התביעות). התשובה לשאלה השנייה מורכבת יותר ואינה כה ברורה שכן ייתכן שהתהליך על אינסוף שלביו יתן לתובעות סכומים המסתכמים בפחות מהעיזבון. שאלה זו בעינה עומדת גם כאשר העיזבון קטן מ- 600 (למשל 599).

ג. עזבונות 400 ו-500

נבדוק את התוצאות המתקבלות מהפעלת שיטת הראב"ד כאשר העיזבון הוא 400 או 500. כל צעד בהפעלת כלל החלוקה של הראב"ד ייקרא "שלב".

השלב הראשון: מאחר שהאישה הראשונה תובעת 100 ואת ה-100 האלה תובעות גם שתי האחרות, מקבלת כל אחת $33\frac{1}{3}$. לגבי הראשונה הסתיים בכך שלב א. את המאה הבאה מחלקות ביניהן שתי האחרות, ואת המאה השלישית מקבלת השלישית בלבד.

בשלב א קיבלו אפוא: הראשונה — $33\frac{1}{3}$, השנייה — $83\frac{1}{3}$ והשלישית — $183\frac{1}{3}$.

הן דורשות עוד: הראשונה — $66\frac{2}{3}$, השנייה — $116\frac{2}{3}$ והשלישית — $116\frac{2}{3}$.

אנו מגיעים **לשלב השני**. עתה $a=66\frac{2}{3}$, $b=116\frac{2}{3}$, $c=116\frac{2}{3}$.

את ה-$66\frac{2}{3}$ שהראשונה דורשת, דורשות גם האחרות. לכן סכום זה מתחלק ביניהן בשווה — כל אחת מקבלת שליש מזה, דהיינו $22\frac{2}{9}$.

עתה, אם **העיזבון הוא 400**, אזי הסכום הנותר לחלוקה הוא $33\frac{1}{3}$, והוא מתחלק בין השנייה והשלישית, שהרי שתיהן דורשות אותו. (b-a, שהוא הדרישה הנוכחית של האישה השנייה ושל השלישית, הוא 50.) יוצא אפוא שכאשר העיזבון הוא 400, מקבלת הראשונה $55\frac{5}{9}=22\frac{2}{9}+33\frac{1}{3}$, השנייה מקבלת $122\frac{2}{9}=16\frac{2}{3}+22\frac{2}{9}+83\frac{1}{3}$ והשלישית מקבלת $222\frac{2}{9}$.

לעומת זאת, כאשר **העיזבון הוא 500**, אזי הסכום הנותר לחלוקה הוא $133\frac{1}{3}$. האישה השנייה, אשר עד כה קיבלה רק $105\frac{5}{9}=22\frac{2}{9}+83\frac{1}{3}$, דורשת b-a, כלומר 50, וכך גם השלישית. 50 אלה מתחלקים אפוא ביניהן, וכל אחת מקבלת 25. נותר מהעיזבון $83\frac{1}{3}$. עתה c-b הוא 0, ולכן מסתיים בכך השלב השני.

נתוני הפתיחה של **השלב השלישי** הם אפוא:

הראשונה כבר קיבלה עד כה $55\frac{5}{9}$ ולכן מותר תביעתה הוא $a=44\frac{4}{9}$.

השנייה כבר קיבלה עד כה $130\frac{5}{9}$ ולכן מותר תביעתה הוא $b=69\frac{4}{9}$.

השלישית כבר קיבלה עד כה $230\frac{5}{9}$ ולכן מותר תביעתה גם הוא $c=69\frac{4}{9}$.

מה שנותר לחלוקה מן העיזבון הוא $83\frac{1}{3}=133\frac{1}{3}-50$.

$a=44\frac{4}{9}$ מתחלק בין שלושתן וכל אחת מקבלת ממנו $14\frac{22}{27}$. ב- b-a, שהוא 25, מתחלקות שתי האחרות, כל אחת מקבלת $12\frac{1}{2}$. c-b הוא 0 ולכן מסתיים בכך השלב השלישי.

נתוני הפתיחה של **השלב הרביעי** הם אפוא:

הראשונה כבר קיבלה עד כה $14\frac{22}{27}+55\frac{5}{9}$ כלומר $70\frac{10}{27}$ ולכן מותר תביעתה הוא $a=29\frac{17}{27}$.

השנייה כבר קיבלה עד כה $12\frac{1}{2}+14\frac{22}{27}+130\frac{5}{9}$ כלומר $157\frac{47}{54}$ ולכן מותר תביעתה הוא $b=42\frac{7}{54}$.

השלישית כבר קיבלה עד כה $12\frac{1}{2}+14\frac{22}{27}+230\frac{5}{9}$ כלומר $257\frac{47}{54}$, ולכן מותר תביעתה גם הוא $c=42\frac{7}{54}$.

מה שנותר לחלוקה מן העיזבון הוא $83\frac{1}{3}-44\frac{4}{9}-25$, כלומר $13\frac{8}{9}$.

את הסכום הזה דורשות שלושתן, לכן הוא מתחלק ביניהן בשווה, דהיינו כל אחת מקבלת $4\frac{17}{27}$, ובכך מסתיים התהליך.

יוצא אפוא שכאשר **סכום העיזבון הוא 500**, האישה הראשונה מקבלת $4\frac{17}{27}+70\frac{10}{27}$ כלומר 75, השנייה מקבלת $4\frac{17}{27}+157\frac{47}{54}$ כלומר $162\frac{1}{2}$ והשלישית מקבלת $4\frac{17}{27}+257\frac{47}{54}$ כלומר $262\frac{1}{2}$.

סיכום כל הדברים הללו מופיע בטבלה 2, פרט לשורה האחרונה שם. שורה אחרונה זו, המקרה בו העיזבון הוא 600, היא פשוטה וטבעית, הראב"ד אומר אותה במפורש, אך עדיין לא ברור אם היא אכן מתיישבת עם כלל החלוקה של הראב"ד.

העיזבון	תובעת ה-100	תובעת ה-200	תובעת ה-300
100	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$
200	$33\frac{1}{3}$	$83\frac{1}{3}$	$83\frac{1}{3}$
300	$33\frac{1}{3}$	$83\frac{1}{3}$	$183\frac{1}{3}$
400	$55\frac{5}{9}$	$122\frac{2}{9}$	$222\frac{2}{9}$
500	75	$162\frac{1}{2}$	$262\frac{1}{2}$
600	100	200	300

טבלה 2: החלוקה לפי הראב"ד

ד. עיזבון 600

מהטיפול הקודם במקרה של עיזבון 500, בו נזקקנו לארבעה שלבים, ברור שככל שהעיזבון גדול יותר (אך קטן מ-600), כך גדל — ובקצב גובר והולך — מספר שלבי החישוב.

כאמור לעיל, כאשר העיזבון הוא 600, מספר השלבים בחישוב הוא אינסופי. השאלה הנשאלת היא: האם, לגבי כל אחת מהנשים, הטור האינסופי של הסכומים שהיא מקבלת בשלבי החישוב מתכנס אל סכום הכסף שהיא דורשת? עצם ההתכנסות של הטור ברורה, שכן זהו טור חיובי חסום, השאלה היא רק לגבי סכומו.

שאלה נוספת היא: נתבונן במקרה בו העיזבון איננו שווה לסכום כל הדרישות, אלא מעט קטן ממנו. מה מבטיח שמספר השלבים בחישוב הוא סופי?

שתי השאלות הללו קשורות זו בזו. אם התשובה לשאלה הראשונה חיובית, כלומר לגבי כל אחת מהנשים, במקרה בו העיזבון שווה לסכום הדרישות, טור הסכומים שהיא מקבלת בשלבי

החישוב מתכנס אל דרישתה, אזי מכיוון שתהליך החלוקה תלוי בסכום התביעות ולא תלוי בעיזבון, ברור שבמקרה בו העיזבון קטן מסכום הדרישות, הטור הנ״ל הוא סופי. ולהפך: אם בכל מקרה שהעיזבון קטן מסכום הדרישות, מספר שלבי החישוב הוא סופי, אזי משיקולי רציפות (כאשר המשתנה הוא העיזבון) מתקבלת תשובה חיובית לשאלה הראשונה. נתרכז אפוא בעיון בשאלה הראשונה. (העיון דלהלן הוא בעיקרו אמפירי. השיקולים המבוססים יובאו בסעיף הבא.)

נתבונן בסדרת הסכומים שמקבלת האישה הראשונה בשלבים השונים של החישוב, כאשר העיזבון קרוב ל-600. בעיזבון 500 היא קיבלה בשלושת השלבים הראשונים: $33\frac{1}{3}$, $22\frac{2}{9}$ ו- $14\frac{22}{27}$. נשים לב לכך שגודלו של כל איבר בסדרה זו הוא שני שלישים מקודמו. עוד נשים לב לכך שהשלב הרביעי במקרה של עיזבון 500 נכון רק לעיזבון מיוחד זה, כיוון שמה שנותר בו לחלוקה היה פחות מדרישת האישה הראשונה. כאשר העיזבון קרוב ל-600 תקבל האישה הראשונה בשלב הרביעי שני שלישים ממה שקיבלה בשלב השלישי, בשלב החמישי היא תקבל שני שלישים ממה שקיבלה בשלב הרביעי, וכן הלאה. יוצא שבעיזבון של 600 היא תקבל את הסכום של טור גיאומטרי אינסופי שאיברו הראשון $33\frac{1}{3}$ וכל איבר בו (החל מן השני) הוא שני שלישים מקודמו. סכומו של טור כזה ידוע, והוא $33\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}$ כלומר בדיוק 100.

דרך אחרת להתבונן בדבר היא כך: בתום השלב הראשון חסר לראשונה $66\frac{2}{3}$, שהם $100\cdot\frac{2}{3}$ כלומר שני שלישים מתביעתה. בשלב השני היא קיבלה שליש מזה, ולכן בתום השלב השני חסרים לה שני שליש מהחסר הקודם, כלומר $100\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$. בשלב הבא חסרים לה שני שליש מזה, כלומר $100\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$, וכן הלאה. בשלב ה-n יחסר לה $100\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$, וככל ש-n גדל, מספר זה קטן ושואף ל-0.

יוצא שהאישה הראשונה מקבלת, במקרה של עיזבון 600, את מלוא תביעתה — גם לפי שיטת הראב״ד.

מה המצב לגבי שתי הנשים האחרות?

האישה השנייה קיבלה בשלב הראשון 50 יותר מהראשונה. בשלב השני היא קיבלה **עוד** 25 יותר מהראשונה. בשלב השלישי היא קיבלה **עוד** $12\frac{1}{2}$ יותר מהראשונה, וכן הלאה. בכל שלב התוספת שהיא מקבלת יותר מאשר הראשונה היא מחצית מהתוספת שקיבלה בשלב הקודם. תוספות אלה מסתכמות בטור האינסופי: $50 + 50\cdot\frac{1}{2} + 50\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 50\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots$ וזהו טור גיאומטרי אינסופי שסכומו הוא $50\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$, כלומר 100. האישה השנייה מקבלת אפוא 100 יותר מהראשונה. הראשונה קיבלה 100, לכן השנייה קיבלה 200. השלישית דומה בכל לשנייה, פרט לכך שבשלב א היא קיבלה 100 יותר מהשנייה, יוצא אפוא שהיא מקבלת 300.

שיטת הראב״ד נותנת אפוא את התוצאה המקווה גם במקרה שהעיזבון הוא 600.

אין ספק שהמשנה, וכן הראב״ד, לא התכוונו רק למקרה המתואר במשנה, אלא ראו בו דוגמה לשיטה כללית. נשאלת אפוא השאלה, האם כלל הראב״ד יעמוד בפני ביקורת דומה גם במצב הכללי? אולי רק מקרה הוא שבדוגמה המתוארת במשנה הראב״ד ״יוצא בשלום״ מן הביקורת? בכך נדון בסעיף הבא.

ה. הבעיה הכללית ופתרונה

את הבעיה המתוארת במשנתנו ואת הפתרון של הראב"ד אפשר להכליל כדלקמן:
n נושים שיסומנו A_i $(1 \le i \le n)$, תובעים את כספם מאדם החייב לכל אחד מהם כסף. דרישת הנושה A_i תסומן a_i $(1 \le i \le n)$ והסכום שעומד כעת לרשות החייב וממנו דורשים הנושים לקבל את חלקם יסומן R.

נניח שהנושים מסודרים בהתאם לגודל תביעתם דהיינו $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n$ ונסמן $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$.
המקרה המעניין הוא כמובן כאשר $S > R$ אך כאמור אנו נתעניין גם במקרה בו $S = R$ ונבחן כיצד יתחלק הסכום R בין הנושים (על פי הראב"ד).

כלל החלוקה של הראב"ד הוא: נגדיר $a_0 = 0$. לכל $1 \le i \le n$, הסכום $\min\{a_i - a_{i-1}, R\}$ יחולק בשווה בין הנושים $A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n$. בכך קיבלו הנושים A_i סכומים שיסומנו b_i $(1 \le i \le n)$ בהתאמה. אם $b_i = a_i$ לכל $1 \le i \le n$, או $R = \sum_{i=1}^{n} b_i$, סיימנו. אם לא כך — נגדיר את a_i להיות $a_i - b_i$ לכל $1 \le i \le n$ ואת R להיות $R - \sum_{i=1}^{n} b_i$ והתהליך חוזר.

השאלה הנשאלת היא: עבור $S = R$ התהליך הוא אינסופי. האם במקרה אחרון זה, לכל $1 \le i \le n$ סדרת ה-a_i שואפת ל-0? לשון אחר: לכל $1 \le i \le n$, טור הערכים של b_i הוא טור חיובי חסום (על ידי a_i) ולכן הוא מתכנס. האם הוא מתכנס ל-a_i?

התשובה לשאלה זו היא חיובית, ולהלן נציג שלוש דרכים להגיע אליה. הדרך הראשונה, הקצרה ביותר, הוצעה על ידי קורא המאמר מטעם המערכת — והמחברים מודים לו על כך. היא אינה אלגוריתמית ואופיה הוא זה של הוכחת קיום. הדרך השנייה היא בעלת אופי אינדוקטיבי ועוקבת אחרי האלגוריתם של שיטת הראב"ד. הדרך השלישית אלגוריתמית אף היא, אך היא "מטפלת" בעת ובעונה אחת בכל הנושים, ולכן אולי נוחה יותר לקריאה. מאידך אופיה פחות אלמנטרי ובשלבה האחרון יש שימוש בכלים מתמטיים מתקדמים.

בכל שלוש הדרכים אנו מניחים כי $S = R$, כלומר n הנושים תובעים בדיוק את הסכום שבידי הנתבע.

דרך א

נוכיח שכאשר מספר השלבים (בשיטת הראב"ד) שואף לאינסוף, הסכום הכללי שהם מקבלים אמנם שואף ל-R. נניח שלאחר m שלבים נותר סכום X שלא חולק. סך כל תביעות הנושים מעודכנות לקראת השלב הבא הוא כמובן X. הסכום שיחולק בפועל בשלב הבא שווה בדיוק לתביעה הגדולה ביותר, שהיא לפחות $\frac{1}{n}X$. לכן אחרי השלב הבא יישאר לכל היותר סכום של $X\left(1-\frac{1}{n}\right)$. מכיוון ש-$1-\frac{1}{n}$ מקיים: $0 < 1-\frac{1}{n} < 1$ ואינו תלוי במספר השלב m, ברור שהסכום הנותר חסום מלעיל על ידי סדרה הנדסית ושואף לאפס כאשר m שואף לאינסוף.

כלל החלוקה של הראב"ד תקף אפוא גם כאשר סכום התביעות שווה לגודל העיזבון.

דרך ב

נוכיח, בשלושה צעדים, כי אכן שיטת הראב"ד נותנת לכל נושה את מלוא תביעתו.

תחילה יש לשים לב לכך שהסדר $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_n$ נשמר בכל שלב של התהליך.

הצעד הראשון:

נסמן ב- $a_i(m)$ וב-$b_i(m)$ את הערכים של a_i ו-b_i בהתאמה בשלב ה-m של התהליך ובנוסף נגדיר $a_i(1) = a_i$.

נוכיח כי הנושה הראשון מקבל בסוף התהליך את כל תביעתו, כלומר $\sum_{m=1}^{\infty} b_1(m) = a_1$.

לכל m מתקיים: $a_1(m+1) = a_1(m) - b_1(m)$ וכן $b_1(m) = \frac{1}{n} a_1(m)$.

מכאן:

$$a_1(m+1) = a_1(m) - \tfrac{1}{n} a_1(m) = (1-\tfrac{1}{n}) a_1(m) = (1-\tfrac{1}{n})^2 a_1(m-1) = \ldots =$$

$$= (1-\tfrac{1}{n})^m a_1(1) = (1-\tfrac{1}{n})^m a_1 \xrightarrow[m=\infty]{} 0$$

לכן $a_1(m) \to 0$ כאשר $m \to \infty$, ובמילים אחרות: $\sum_{m=1}^{\infty} b_1(m) = a_1$.

הנושה הראשון מקבל אפוא את כל תביעתו.

הצעד השני:

נדון בבעיה דומה לבעיה המקורית, המתקבלת מהמקורית בהשמטת הנושה הראשון ובהקטנת סכומי התביעות ורכוש החייב. הנושה הראשון A_1 יצא מהתמונה, כל אחד מהנושים האחרים דורש a_1 פחות מאשר דרישתו המקורית, ורכוש החייב מספיק כדי לשלם בדיוק את כל התביעות. נפעיל על בעיה זו את כלל הראב"ד. כאן הנושה הראשון הוא A_2, כל נושה A_{i+1} $(1 \le i \le n\text{-}1)$, תובע סכום $a_i' = a_{i+1} - a_1$, ורכוש החייב הוא $R' = R - na_1$. כל הסימונים יהיו כמקודם, אך בתוספת תגים.

נשים לב לכך שלכל m ולכל $1 \le i \le n\text{-}1$ מתקיים $a_i'(m) = a_{i+1}(m) - a_1(m)$, ולכן

$$b_i'(m) = a_i'(m) - a_i'(m+1) = a_{i+1}(m) - a_1(m) - [a_{i+1}(m+1) - a_1(m+1)] = b_{i+1}(m) - b_1(m)$$

ומכאן, לכל $1 \le i \le n\text{-}1$: $\sum_{m=1}^{\infty} b_i'(m) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{i+1}(m) - \sum_{m=1}^{\infty} b_1(m) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{i+1}(m) - a_1$ (*)

ובפרט עבור $i=1$: $\sum_{m=1}^{\infty} b_1'(m) = \sum_{m=1}^{\infty} b_2(m) - a_1$.

לפי הצעד הראשון, הנושה הראשון, שכאן הוא A_2, מקבל את מלוא תביעתו הנוכחית, כלומר $\sum_{m=1}^{\infty} b_1'(m) = a_2 - a_1$.

עתה, משני השוויונות האחרונים מתקבל $\sum_{m=1}^{\infty} b_2(m) = a_2$.

הנושה A_2, שהוא במקור הנושה השני, מקבל אפוא את מלוא תביעתו המקורית.

הצעד השלישי:

עבור $i = 2$ מתקבל מ- (*): $\sum_{m=1}^{\infty} b_2'(m) = \sum_{m=1}^{\infty} b_3(m) - a_1$.

תביעתו של A_3 בצעד השני היא $a_3 - a_1$. בצעד השני A_3 הוא הנושה השני. כבר הוכח שהנושה השני מקבל את מלוא תביעתו. הוא מקבל $\sum_{m=1}^{\infty} b_2'(m)$, לכן $\sum_{m=1}^{\infty} b_2'(m) = a_3 - a_1$. משני השוויונות האחרונים מתקבל $\sum_{m=1}^{\infty} b_3(m) = a_3$, כלומר גם הנושה השלישי מקבל את מלוא תביעתו.

שימוש חוזר בצעד השלישי, תוך הגדלת i ב-1 בכל פעם, נותן כי כל אחד מהנושים מקבל את מלוא תביעתו.

דרך ג

ננסח מחדש את כלל החלוקה של הראב״ד:

יש לחלק באופן שווה כל שקל החל מהשקל הראשון בין כל הנושים אשר תביעתם כוללת שקל זה. לאחר מכן, אם נותר כסף לחלוקה הוא יתחלק באותו אופן בין כל הנושים אשר טרם קיבלו את מלוא תביעתם; ושוב נחזור על התהליך עד שייגמר הכסף או עד שיקבלו כל התובעים את דרישותיהם.

וביתר פירוט:

השלב הראשון

- a_1 השקלים הראשונים מתוך R השקלים המיועדים לחלוקה נדרשים ע״י כל n הנושים ולכן יקבל כל אחד $\frac{a_1}{n}$ שקלים.
- $a_2 - a_1$ השקלים הבאים נדרשים ע״י $n-1$ הנושים $A_2, A_3, \dots, A_n$ ולכן יקבל כל אחד מהם עוד $\frac{a_2-a_1}{n-1}$ שקלים.
- $a_3 - a_1$ השקלים הבאים נדרשים ע״י $n-2$ הנושים $A_3, A_4, \dots, A_n$ ולכן יקבל כל אחד מהם עוד $\frac{a_3-a_2}{n-2}$ שקלים.
- וכך הלאה עד שנקבל ש- $a_n - a_{n-1}$ השקלים האחרונים (בשלב זה) אשר נדרשים רק ע״י הנושה האחרון, A_n, ילכו אליו, כלומר A_n יקבל עוד $\frac{a_n-a_{n-1}}{n-(n-1)} = a_n - a_{n-1}$ שקלים.

באופן זה חולקו עד כה a_n שקלים (שהרי $(a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_n$).

כמובן כל זה בתנאי שיש די כסף, דהיינו $R \geq a_n$.

נסמן את הסכום שקיבל הנושה ה-k בשלב הראשון — $b_k^{(1)}$.

מתקיים:

$$b_1^{(1)} = \frac{a_1}{n}, \quad b_2^{(1)} = \frac{a_1}{n} + \frac{a_2-a_1}{n-1}, \quad b_3^{(1)} = \frac{a_1}{n} + \frac{a_2-a_1}{n-1} + \frac{a_3-a_2}{n-2}, \cdots,$$

$$b_n^{(1)} = \frac{a_1}{n} + \frac{a_2-a_1}{n-1} + \frac{a_3-a_2}{n-2} + \cdots + \frac{a_{n-1}-a_{n-2}}{2} + a_n - a_{n-1}$$

אם נתאר זאת בצורה מטריציונית נקבל:

$$\begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{n}-\frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{n}-\frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-2} & \frac{1}{n-2} & 0 & 0 \\ \\ \frac{1}{n}-\frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-2} & \frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-3} & \frac{1}{2}-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \\ a_n \end{pmatrix}$$

ובצורה קצרה: $b^{(1)} = Ma \quad (1)$

כאשר M המטריצה מסדר n הנתונה, a הוא וקטור הדרישות של n הנושים ו- $b^{(1)}$ הוא וקטור הסכומים שקיבלו n הנושים במסגרת השלב הראשון.

השלב השני

בשלב זה נצטרך לחזור על אופן החלוקה שנעשה בשלב הראשון כאשר התביעות שדורשים הנושים הן הדרישות המקוריות פחות מה שכבר קיבלו, דהיינו הדרישה של הנושה A_k היא: $a_k - b_k^{(1)}$ והכסף שנותר לחייב ואשר עומד לחלוקה הוא $R - a_n$.

אם נסמן את אשר מקבל הנושה ה-k בשלב השני — $b_k^{(2)}$ ואת וקטור הסכומים שמקבלים n הנושים במסגרת השלב השני $b^{(2)}$ נסיק ש: $b^{(2)} = M(a - b^{(1)})$ והצבה מ-(1) תיתן $b^{(2)} = M(a - Ma) = M(I - M)a \quad (2)$.

גם תיאור זה הוא כמובן בתנאי שיש די כסף...

השלב השלישי

בשלב זה נצטרך לחזור על אופן החלוקה שנעשה בשלבים הראשון והשני כאשר התביעות שדורשים הנושים הן הדרישות המקוריות פחות מה שכבר קיבלו, דהיינו הדרישה של הנושה A_k היא: $a_k - b_k^{(1)} - b_k^{(2)}$ והכסף שנותר לחייב ואשר עומד לחלוקה הוא $R - a_n - (a_n - b_n^{(1)})$.

אם נסמן את אשר מקבל הנושה ה-k בשלב השלישי — $b_k^{(3)}$ ואת וקטור הסכומים שמקבלים n הנושים במסגרת השלב השלישי -$b^{(3)}$ נסיק ש: $b^{(3)} = M(a - b^{(1)} - b^{(2)})$

והצבה מ-(1) ו-(2) תיתן $b^{(3)} = M(a - Ma - M(I-M)a) = M(I-M)^2 a$.

השלב ה-m

נסמן את אשר מקבל הנושה ה-k בשלב ה-m: $b_k^{(m)}$ ואת וקטור הסכומים שמקבלים n הנושים במסגרת שלב זה: $b^{(m)}$, ובאינדוקציה נסיק שבמסגרת השלב ה-m: $b^{(m)} = M(I-M)^{m-1}a$.

ב-r השלבים הראשונים (בסה״כ)

אם נבדוק כמה קיבל כל אחד מהנושים בסה״כ ב-r השלבים הראשונים נקבל:

$$\sum_{m=1}^{r} b^{(m)} = M\sum_{m=1}^{r}(I-M)^{m-1}a = MI[I-(I-M)]^{-1}[I-(I-M)^r]a = [I-(I-M)^r]a \quad (3)$$

כסכום סדרה הנדסית.

מכיוון שענייננו הוא המקרה בו $S = R$ ובכל שלב עדיין יש לנושים תביעות, הרי עלינו לבדוק את הקורה כאשר $r \to \infty$, וביתר דיוק, נרצה לוודא שאכן כאשר $r \to \infty$ הסכום המחולק לנושים הוא כל הסכום העומד לחלוקה — R, כאשר כל אחד מקבל את מלוא תביעתו.

לשם כך נחשב את $\lim_{r\to\infty}\sum_{m-1}^{r} b^{(m)}$. מ-(3) נקבל שדי בחישוב $\lim_{r\to\infty}[(I-M)^r]$.

הערכים העצמיים של $I - M$ הם ממשיים ושונים זה מזה ולכן $I - M$ ניתנת לליכסון מעל הממשיים, כלומר קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $I-M = P^{-1}DP$ כאשר D אלכסונית עם

הערכים העצמיים של $1 - M$ באלכסונה: $$D = \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \frac{n-2}{n-1} & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n-3}{n-2} & .. & 0 \\ .. & .. & .. & & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix}.$$

כל הערכים העצמיים קטנים מ-1, לכן $\lim_{r\to\infty} D^r = 0$ ולכן גם $\lim_{r\to\infty}[(I-M)^r] = 0$ ולפיכך נקבל מ-(3) ש- $\lim_{r\to\infty}\sum_{m=1}^{r} b^{(m)} = a$, כלומר כל אחד מהנושים מקבל בסה"כ בדיוק את הסכום אותו דרש.