

## ערן רביב

### ”לוחות ושברי לוחות”<sup>1</sup> – על מולדות ותכונותיהם

המאמר עוסק בהיתכנות חלות המולד וחישובי שכיחות בלוח העברי. בלוח העברי השבוע מחולק ל-7 ימים בני 24 שעות בנות 1,080 חלקים כל אחת. בסה"כ 181,440 חלקים בשבוע. עד כה, מקובל היה להניח שמולד תשרי (או כל מולד אחר) יכול לחול בכל אחד מחלקי השבוע, ובהתאם לכך חושבו שכיחויות בלוח. במאמר נראה שהיתכנות חלות המולד, בניגוד למקובל עד היום, לא יכולה לחול בכל חלק וחלק מחלקי השבוע אלא רק לפי חוקיות מתמטית שאותה נסביר ונדגים. תופעה זו משפיעה על נושא חישובי שכיחויות בלוח העברי, אך לרוב השפעה זניחה. כמו כן נסביר כיצד ניתן לחשב לוח ס"א ראשים בעזרת גיליון אלקטרוני EXCEL באופן אוטומטי. וכן נציג לוח **מחודש** שבו צירפנו את הדחיות וכך נוצר לו לוח חדש בן 213 שורות.

#### חישובי שכיחות בלוח העברי

מקובל לחשב שכיחויות בלוח העברי מתוך הנחה שמולד תשרי (או כל מולד אחר) יכול לחול בכל אחד מחלקי השבוע (השבוע מחולק ל-7 ימים בני 24 שעות בנות 1,080 חלקים כל אחת, סה"כ – 181,440 חלקים בשבוע).

במאמר זה נראה שהנחה זו היא הנחה שגויה, נסביר את החוקיות העומדת בבסיס היתכנות חלות המולד בחלק מחלקי השבוע, ונדגים את האופן המדויק לחישוב שכיחויות בלוח. אף על פי שההנחה הנ"ל שגויה מסתבר שחישוב כפי שנעשה עד כה סטייתו מהחישוב המדויק היא זניחה ונסביר מדוע.

#### מחשוב לוח ס"א ראשיים<sup>2</sup>

לוח ס"א ראשים הוא לוח המכיל 61 שורות, כל שורה מאפיינת סדרה שונה של צירוף סימני 19 שנות המחזור, ולפיכך הלוח מכיל את כל המידע הדרוש, כך שבהינתן מולד תשרי של השנה

1 שברי לוחות – לשון נופל על לשון (fraction).  
2 עבודה זו נכתבה כתוצאה מפנייתו של אינג' לוינגר לפורום החברים, בבקשה לייצר לוח ס"א ראשים באופן ממוחשב. מאמר זה מכיל את תמצית הסוגיה שהתלבנה כתוצאה מעבודת מחשוב זו.

## ערן רביב

הראשונה במחזור נוכל למצוא את "סימן השנה" של כל שנות המחזור (סימן השנה – עיין הערה 6 להלן).  
גבול הסדרה מציין את טווח חלות המולדות של תשרי ראש מחזור המתאים לצירוף 19 השנים של הסדרה.

### שיטות למחשוב

אפשר להציג שתי מתודות שונות לחישוב כדי לייצר את הלוח הנ"ל באמצעות מחשב.

1. "מולדות ראשי מחזורים"<sup>3</sup>
    - a. נמצא את כל מולדות תשרי של ראשי המחזורים החל ממולד בהר"ד ועד למחזוריות הלוח<sup>4</sup> (36288 מולדות שונים).
    - b. נמצא את הצירופים המתאימים ל-19 שנות המחזור, על פי כללי הלוח, לכל מולד תשרי שמצאנו.
    - c. נבטל שורות כפולות ונמצא את גבולות כל שורה ושורה ("גבולות ראשי המחזורים").
  2. "חלקי השבוע"
    - a. חישוב צירוף 19 השנים המתקבל מקלט של מולד כלשהו.
    - b. הרצת מולד הקלט באופן רציף כך שיכסה את כל חלקי השבוע.
    - c. בדיקת הסדרה שהתקבלה מהקלט, במידה והתקבל צירוף חדש רושמים "גבול חדש" וכן הלאה. (חישוב זה חישובי בעזרת גיליון EXCEL כפי שיוצג בנספח למאמר זה, ניתן לקבל את הקובץ בדואר אלקטרוני). תיאור מפורט של אופן בניית הקובץ מצורף כנספח 2 למאמר זה.
- כאשר בוחנים את התוצאות המתקבלות משתי השיטות מגלים באופן מפתיע שהתוצאות אינן זהות וגבולות המחזורים שונים במעט אלו מאלו.  
מסתבר אפוא, שגבולות ראשי המחזורים המופיעים בלוח המסורתי הם למעשה גבולות תאורטיים בלבד, גבולות אלו הם תוצאה ישירה מחישוב המניח שמולד תשרי בראש מחזור יכול לחול בכל אחד מחלקי השבוע (הנחה שגויה כפי שיוסבר)

## רקע

### הנחות והגדרות

- נקודת ההתחלה למולדות הלוח – מולד בהר"ד (2,5,204)
  - הלוח העברי חוזר על עצמו לאחר 36,288 מחזורים בני 19 שנה כל אחד.
- 3 בשיטה זו נקט מר רמי לנדאו מקנדה, ראה <http://geocities.com/athens/1584>. לגבולות ראשי המחזורים קרא מינימום מולד תשרי ומקסימום מולד תשרי.
- 4 החישוב יבוצע ע"י הוספת "יתרון" מחזור (ב, יו, תקצ"ה), למולד בהר"ד שמשמש כראש מחזור ראשון.

"לוחות ושברי לוחות" – על מולדות ותכונותיהם

- משכו של חודש "לוחי" הינו כט י"ב תשצ"ג (29d,12h,793p)
- יתרון מחזור ב"ו, תקצה (2,16,595) = 69,715 חלקים (נובע ממצאת השארית של 235 חודשים במחזור:  $12*12+7*13=235$ )

מובן שאם נתחיל ממולד כלשהו ונוסיף לו את שארית (יתרון) המחזור נקבל את המולד של אותה שנה (במחזור י"ט) במחזור הבא.

#### שארית כפולות יתרון המחזור

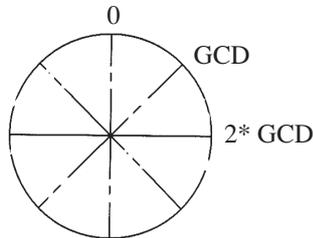
השאלה העומדת לפנינו היא באילו חלקים מתוך השבוע יכול לחול מולד ראש מחזור? נתעלם לרגע, לצורך הדיון, מנקודת ההתחלה – מולד בהר"ד, ובהנחה שמתחילים מאפס, ויתרון המחזור הוא 69715 חלקים יכול לחול מולד ראש מחזור? הפונקציה המתארת את התכנות תחולת מולד ראש מחזור היא:

$$f(x) = [69715 * X] \text{ Mod}(181440)$$

X מציין בכמה מחזורים אנו זזים קדימה. אנו מעוניינים בשארית תוצאת ההכפלה לאחר חלוקה בשבוע, התוצאה המתקבלת היא מספר החלקים בשבוע שבו יחול מולד תשרי של ראש המחזור המבוקש.

$$f(x) = (A * X) \text{ Mod}(C) \text{ : בניסוח כוללני הפונקציה היא}$$

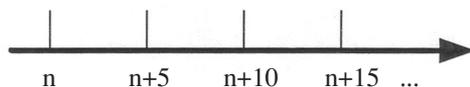
בנספח 1 אנו מנתחים את הפונקציה ומוצאים שתוצאת הפונקציה הנ"ל על גרף תוצאות המודולו נראה כך:



GCD – greatest common divisor, הוא המחלק המשותף הגדול של A ו-C. עבור המקרה הפרטי שבו A=69715 ו-C=181440 מתקבלת התוצאה:  
 $GCD(69715, 181440) = 5$

כאשר X משתנה מ-1 עד 36288 (= מספר המחזורים בלוח) תשתנה הפונקציה f(x) כך שתקבל את כל ערכי המספרים המתחלקים ב-5, בין 1 ל-181440 (= מספר החלקים בשבוע) נזכור כי  $36288 * 5 = 181440$ .

מכאן מתקבל שהפונקציה נראית כמו "מסרק" בקפיצות של 5 חלקים.



## ערן רביב

כפולות אלו מסתיימות תמיד בספרה אפס או חמש לסירוגין, לכן אם מולד כלשהו מסתיים בספרה  $n$ , לאחר 19 שנה אותו מולד יסתיים ב- $n+5$  חלקים. ולכן תמיד יהיה "דילוג" של 5 חלקים (בין המולד הנתון (שנה  $Y$ ) לבין המקביל לו במחזור הבא (שנה  $19+Y$ )).  
עתה אם ניקח את שארית החלקים, לאחר חלוקה ב-5, של מולד תשרי של כל שנה מ-19 שנות המחזור **הראשון** (המתחיל מבהר"ד) נוכל לדעת מכאן ולהבא את ספרת היחידות (של החלקים) של כל שנה ושנה במחזורים הבאים, כפי שיובהר להלן.

### נקודת ההתחלה

עתה נחזור לנקודת ההתחלה בהר"ד (57,444), נחלק ב-5 חלקים ונקבל שארית 4. במחזור 19 שנים המתחיל בבהר"ד, מולד תשרי של כל שנה ושנה הוא בהתאם למולד תשרי שקדם לו בתוספת יתרון השנה (לפשוטה ד,ח,תתעו, ולמעוברת ה,כא,תקפט).  
עתה ניתן לכתוב בניסוח כללי ש-

מולד תשרי של **ראש** מחזור יהיה תמיד מהצורה:  $4+5X$  כאשר  $X$  יקבל את הערכים 0 ועד 36,287 (מחזוריות הלוח).

עתה עלינו להסתכל על מספר החלקים של מולד תשרי של השנה (במחזור הראשון), לחלק את מספר החלקים ב-5 ולקחת את השארית – וזו תשמש כנקודת התחלה.  
בהינתן שארית  $n$  (כאשר  $n$  יכול לקבל את הערכים 0,1,2,3,4), מולד תשרי במחזור הבא יהיה  $n+5$ , או בניסוח כללי:  $n+5X$  כאשר  $X$  יקבל את הערך 0 ועד ל-36,287 (מחזוריות הלוח).  
ספרת היחידות תהיה  $n$  או  $(n+5) \bmod 10$  לסירוגין.

”לוחות ושברי לוחות” – על מולדות ותכונותיהם

להלן המחזור המתחיל מבהר”ד –

	יום בשבוע	מספר ימים	שעה	חלק	חלקים	partMOD(5)	partMOD(5)+5
מולד בהר”ד	2	2	5	204	57444	4	9
מולד ו, י”ד	6	356	13	1080	9242640	0	5
תשרי שנה 3	3	710	22	876	18427836	1	6
תשרי שנה 4	2	1094	20	385	28378465	0	5
תשרי שנה 5	0	1449	5	181	37563661	1	6
תשרי שנה 6	4	1803	13	1057	46748857	2	7
תשרי שנה 7	3	2187	11	566	56699486	1	6
תשרי שנה 8	0	2541	20	362	65884682	2	7
תשרי שנה 9	6	2925	17	951	75835311	1	6
תשרי שנה 10	4	3280	2	747	85020507	2	7
תשרי שנה 11	1	3634	11	543	94205703	3	8
תשרי שנה 12	0	4018	9	52	104156332	2	7
תשרי שנה 13	4	4372	17	928	113341528	3	8
תשרי שנה 14	2	4727	2	724	122526724	4	9
תשרי שנה 15	1	5111	0	233	132477353	3	8
תשרי שנה 16	5	5465	9	29	141662549	4	9
תשרי שנה 17	2	5819	17	905	150847745	0	5
תשרי שנה 18	1	6203	15	414	160798374	4	9
תשרי שנה 19	6	6558	0	210	169983570	0	5

הסבר: החישוב שבטבלה נעשה ע”י הוספת החלקים משנה לשנה בהתאם למספרה הסידורי במחזור 19 השנים. החלקים מומרים לימים שעות וחלקים. בכל שורה מוצג מולד תשרי של השנה משנות המחזור הראשון בלוח.

כידוע מחזור 19 השנים בנוי מ-7 שנים מעוברות בנות 13 חודשים, ו-12 שנים פשוטות בנות 12 חודשים, סה”כ 235 חודשי לבנה המשתווים ל-19 שנות חמה (רב אדא). מיקום השנים המעוברות סימנו גוחאדז”ט (שלישית שישית שמינית וכו’),<sup>5</sup> ולפיכך בטבלה דלעיל תוספת החלקים בין שנה ושנה היא לפשוטה 9185196 ולמעוברת 9950629. הוספנו 2 עמודות partMOD(5) ו-partMOD(5)+5, הנתון בעמודות אלו מציינ את **ספרת היחידות האפשרית** לכל אחת מ-19 שנות המחזור (לכל שנה 2 אפשרויות בלבד). מתקבל, שלעולם מולד תשרי של ראש מחזור (השנה הראשונה) יסתיים בספרות 4 או 9 חלקים, מולד תשרי של שנה שנייה במחזור יסתיים בספרות 0 או 5 וכן הלאה.

5 לגבי השאלה מדוע נבחרו שנים אלו דווקא ראה ”על השמינית” לאינג’ לוינגר, מהר’ אינטרנט תשס”ז – <http://www.daat.ac.il/daat/vl/tohen.asp?id=162>

## ערן רביב

אמור מעתה – מולד תשרי של ראש מחזור לא יכול לחול בכל רגע ורגע מרגעי השבוע אלא רק במולדות שסך החלקים מסתיים בספרה 4 או בספרה 9.

### דוגמה

שנת תשס"ח 5768 למולד בהר"ד מספרה במחזור 19 הוא:  $5768 \bmod 19 = 11$   
זאת אומרת שהשנה היא השנה ה-11 במחזור, מעיון בטבלה דלעיל, מתקבל שמולד תשרי של השנה ה-11 תמיד יסתיים בספרה 3 או בספרה 8. מכיוון ש- $\text{INT}(5768/19) = 303$ , תשס"ח היא שנה 11 במחזור ה-304, ומכיוון שבמחזור הראשון מולד תשרי שנה 11 מסתיים בספרה 3, במחזור השני בספרה 8 וכן הלאה, לכן בכל מחזור זוגי מולד תשרי יסתיים בספרה 8, מכיוון ש-304 הוא מספר זוגי מולד תשרי התשס"ח מסתיים בספרה 8.

### בדיקה

מולד ראש מחזור 303 (בחלקים) = (יתרון מחזור) \* 303 + בהר"ד  
 $57444 + 303 * 69715 = 21181089$

נזין קקלט לקובץ המחשב את לוח ס"א ראשים ונקבל מולד שנת התשס"ח 4d, 10h, 468p (הקובץ מופיע כנספח למאמר זה).

## לוח ס"א ראשים, וראשי המחזורים

לוח ס"א ראשים מיוחס לאחד מבעלי התוספות. בהינתן מולד תשרי של ראש המחזור, ישנן רק 61 אפשרויות לצירוף 19 שנות המחזור. ע"י הזזת הרחיות<sup>7</sup> מכל 19 השנים לשנה הראשונה מצאו את הגבולות של כל צירוף וצירוף. סך הצירופים שהתקבל הינו 61.

לדוגמה נעיין בשורה הראשונה של לוח ס"א ראשים, כאשר מולד תשרי של ראש המחזור יהול:

יום	שעה	חלק	
1	0	408	מ-
1	5	333	ועד (לא כולל)

אזי מחזור 19 השנים יהיה מורכב מהצירוף הבא, שהוא השורה הראשונה בלוח ס"א:

שנה במחזור																		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
בחג	השא	גכז	בשה	זחא	גכז	בשה	זחג	השא	גכה	זשה	זשג	הכז	בחח	זשג	הכז	בחח	זשג	השג

6 כל שנה מוגדרת בעזרת 3 אותיות, הראשונה מסמנת את יום ראש השנה, השנייה מסמנת האם השנה שלמה (מרחשוון וכסלו שניהם בני 30 יום), חסרה (מרחשוון וכסלו שניהם בני 29 יום), כסדרה (מרחשוון בן 29 יום וכסלו בן 30 יום), והאות השלישית מסמנת את היום בשבוע שבו יהול פסח.

7 הכוונה כמובן לארבע הרחיות של יום ראש השנה ואכמ"ל.

”לוחות ושברי לוחות” – על מולדות ותכונותיהם

זאת אומרת שכל המעוניין לבדוק את סימן השנה, ימצא את מולד ראש המחזור, בהתאם לגבולות ימצא את השורה המתאימה בלוח 61 הראשים, יבדוק באיזו שנה משנות המחזור הוא נמצא, וכך ימצא את סימן השנה המבוקשת.

**המרת הגבולות התיאורטיים לגבולות המעשיים**

בסעיפים הקודמים הראנו שמולד תשרי של ראש מחזור לא יכול לחול בכל רגע ורגע מרגעי השבוע אלא רק ברגעים המסתיימים ב-4 או 9. ולכן בדוגמה דלעיל (שורה ראשונה בלוח ס”א ראשים).

- א. הגבול התחתון לא יהיה 1,0,408 אלא יהיה החל מ- (וכולל) – 1,0,409
- ב. הגבול העליון לא יהיה 1,5,333 אלא יהיה עד (ולא כולל) 1,5,334
- ג. מספר ההיקריות האפשרי מתוך חלקי השבוע לראש מחזור זה הוא לא –  
 $5325 = 31653 - 26328$ , אלא חייבים להתחשב בדילוגים של 5 חלקים (תופעת ה”מסרק”). את החישוב יש לבצע בשני שלבים. ראשית עלינו להמיר את הגבולות ”הקלסיים” לגבולות המעשיים, שנית עלינו להתחשב בתופעת המסרק כדלהלן:

ההמרה ניתנת לביצוע בעזרת שתי נוסחאות פשוטות כדלהלן:

**מינימום מולד** (של לנדאו) יתקבל בעזרת הנוסחה הבאה:

$$4 + 5 * \left\{ \text{INT} \frac{\text{part}}{5} \right\}$$

לדוגמה הצבת 408 תיתן 409, וכן הלאה.

כדי להמיר את ראש המחזור (הבא) ולקבל את הערך המתאים ל**מקסימום** מולד (של לנדאו)<sup>9</sup> ניתן להשתמש בנוסחה הפשוטה הבאה:  $4 + 5 * \left( \text{INT} \frac{\text{part}}{5} - 1 \right)$ . כאשר part הם מספר החלקים של ראש המחזור הנוכחי.

כאשר part הם מספר החלקים של ראש המחזור הבא. לדוגמה הצבת 333 תניב 329 וכן הלאה.

אם נחזור לדוגמה שלנו (שורה ראשונה בלוח) אזי מספר ההיקריות יהיה כדלהלן:

$$26329p = 1d,0h,409p$$

$$31649p = 1d,5h,329p \text{ (עד ועד בכלל!)}$$

ובקפיצות של 5 חלקים (תופעת ה”מסרק”).

דהיינו לשורה זו סך של 1065 היקריות (ההפרש לחלק לחמש ועוד אחד), מתוך 36,288 היקריות אפשריות בשבוע (ולא 181,440 היקריות).

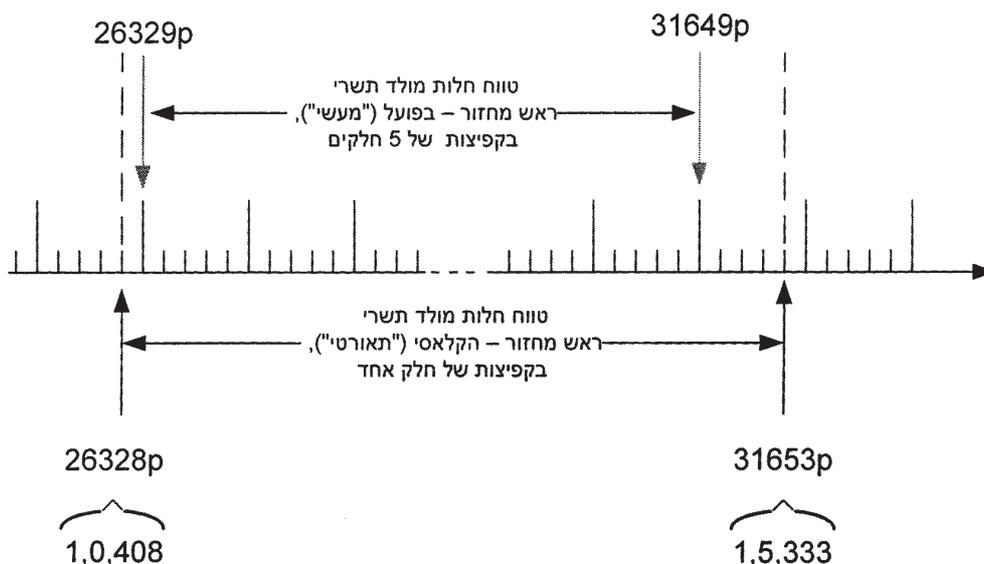
בתרשים פרסנו על סרגל הזמן את הגבולות של שורה ראשונה של לוח ס”א ראשים. ציינו את הגבולות הקלאסיים המופיעים בלוח, ואת הגבולות המעשיים. כאן מומחשות שתי התופעות גם יחד. האחת שינוי הגבולות, והשנייה סך ההיקריות.

8 גבול עליון ותחתון לאחר המרתם לחלקים, וחיסור ביניהם.

9 מקסימום מולד – הכוונה עד ועד בכלל.

## ערן רביב

השנתות הקטנות מצינות כל חלק וחלק והשנתות הגבוהות יותר מצינות את החלקים המסתיימים בספרה 4 או 9 (קפיצות של 5 חלקים).



### חישובי שכיחויות בלוח העברי

עד כה, בכל הספרות המצויה על הלוח העברי, הנחת היסוד בכל חישובי השכיחויות הייתה שמולד תשרי יכול לחול בכל רגע ורגע מרגעי השבוע ולפיכך תמיד "משך התופעה המבוקשת" לחלק לכל חלקי השבוע כפול מאה, הניבה את שכיחות התופעה המבוקשת באחוזים. מהאמור לעיל נובע שהנחה זו הינה הנחה שגויה ביסודה, וכדי לחשב את השכיחויות הנכונות צריך לנקוט בשיטה אחרת מהחשבון שהיה נהוג עד כה. כתוצר לוואי של עבודתי על מחשוב לוח ס"א ראשים חישבתי גם את השכיחויות המדויקות, ללא ההנחה הנ"ל.

### דוגמה

ר' רחמים שר שלום בספרו "שערים ללוח העברי"<sup>10</sup> כותב בעמוד 37 "הדחיות ומידת שכיחותן":

המולד האמצעי, על פיו קובעים את מולדות החודשים בלוח העברי, יכול לחול בכל חלק, בכל שעה ובכל יום מימות השבוע. ומכיוון שגורם הדחיה נקבע עפ"י הרגע המדויק בו חל המולד האמצעי של תשרי – לכן, יהיו סיכויים לדחיות לפי היחס של גבולות

10 ניתן להשיג ישירות מהמחבר.

”לוחות ושברי לוחות” – על מולדות ותכונותיהם

הזמן של כל דחיה ודחיה ביחס ל- 168 שעות השבוע. לדוגמא ... דחית בט"ו תקפ"ט היא בגבולות שבין ב-טו-תקפט לבין ב-יח, ורק ב-7 מתוך 19 שנה לכן תופסת דחיה זו  $2 \frac{491}{1080}$  שעות מתוך 168 שעות השבוע שהם 0.54%.

בדומה לכך בנוגע לשכיחות סימני הקביעות (שם בעמוד 46 כותב):

לדוגמא הסימן בחה תופס את תחומי הזמן השבועי ז-יח עד א-כ-תצ בשנים מעוברות. במילים פשוטות הסימן בחה תופס את הזמן שבין שעה יח של יום שבת עד שעה כו-תצ חלקים של יום ראשון ב-7 מתוך 19 השנים. החישוב יהיה  $\frac{7}{19} * \frac{490}{1080}$  מחולק ב-168.

### דוגמה

דחיית גטר"ד ע"פ החישוב הרגיל היא  $\frac{114192}{3447360}$ ,<sup>11</sup> ואילו לפי החישוב המדויק (הנובע מהגבולות האמיתיים) התוצאה היא (לאחר הכפלה ב-5 כדי לקבל אותו מכנה) –  $\frac{114195}{3447360}$

דחיית בטו תקפט ע"פ החישוב הרגיל היא  $\frac{18557}{3447360}$ , ואילו לפי החישוב המדויק (הנובע מהגבולות האמיתיים) התוצאה היא (לאחר הכפלה ב-5 בכדי לקבל אותו מכנה) –  $\frac{18560}{3447360}$

### הרחבת לוח ס"א ראשים

במהלך העבודה החלטתי להרחיב את גיליון החישוב כך שיצמיד לאינדקס של כל שנה את הדחייה. ע"י כך מתקבל לוח המכיל גם את "גבולות הדחיות". התוצאה הייתה מפתיעה, במקום לקבל לוח בן 61 שורות, התקבל לוח בן **213 שורות** שונות! מסתבר שכל שורה בלוח ס"א ראשים מכילה כמה אפשרויות של דחיות ולכן הלוח המתקבל מכיל שורות נוספות.

לדוגמה: השורה הראשונה בלוח ס"א ראשים שגבולותיה מ-1d, 0h, 408p ועד (ולא בכלל) 1d, 5h, 334p מתחלקת ל-5 שורות שונות כדלהלן:<sup>12</sup>

גבולות	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
409	1	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג
539	2	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג
564	1	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג
1054	4	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג
1074	4	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג	זשג

בכל משבצת מופיע סימן השנה ולידו מספר. המספר מבטא את דחיית השנה כך:

- 11 המספר 3447360 הוא מספר החלקים בשבוע כפול 19 שנות המחזור.
- 12 הגבולות בטבלה הם גבולות מעשיים ולכן הגבול העליון מתחיל ב-409 חלקים ולא ב-408.

ערן רביב

אינדקס	משמעותו
1	לא אדו
2	מולד זקן (ביום ב') <sup>13</sup>
3	מולד זקן (בימים ג', ה', ז') <sup>14</sup>
4	גטרד
5	בטו תקפט
0	ללא דחייה

המשכצות המודגשות (כצבע רקע) מכילות את ההבדלים בין השורה הנתונה לשורה שמעליה, לדוגמה שורה 2 שונה באינדקס השנה ה-10 במחזור. בשורה הראשונה שנה עשירית היא גכה 2 (מולד זקן), ואילו בשורה 3 אינדקס השנה הוא גכה 0 (ללא דחייה) וכן הלאה.

בבדיקה אכן רואים שמולד תשרי של שנה זו, עבור גבול ראש מחזור 1d, 2h, 534p הוא 2d, 23h, 1077p (מולד זקן ביום ב' הנדחה ליום ג'), ואילו עבור גבול ראש מחזור 1d, 2h, 539p מולד שנה זו הוא 3d, 0h, 2p (מולד ביום ג' ללא דחייה).

מלוח זה ניתן לחשב בקלות את שכיחות הדחיות. עלינו להכפיל כל צירוף בסך ההיקריות של כל שורה, ולסכם את התוצאות. הסבר: לדוגמה "לא אדו" – בשורה הראשונה מוצאים אנו 9 שנים שלהן מוצמד האינדקס 1. נכפיל במספר ההיקריות של שורה זו (458) ונקבל 4122. נחזור על חישוב זה עבור כל השורות בלוח, נסכם את התוצאות ונקבל 295488. מספר זה מבטא את סך ההיקריות שבהן חלה דחיית אדו מתוך 689472.

כנגזרת מלוח זה חישבתי את השכיחות המדויקת של הדחיות:

הדחייה	ללא דחייה	בטו תקפט	גטרד	זקן	לא אדו
חישוב מדויק	סך היקריות בלוח מתוך 689472 באחוזים	3712 0.53838%	22839 3.3125%	98496 14.286%	295488 42.8571%
חישוב מקורב	סך היקריות בלוח מתוך 3447360 באחוזים	18557 0.5383%	114192 3.3124%	492480 14.2857%	1477440 42.8571%
הפרש	-6	3	3	0	0

ההפרש הוא מתוך 3,447,360 ז"א לדוגמה שנים ללא דחייה ההפרש הוא:  $-\frac{6}{3447360}$  וכן השאר בהתאמה.

תוצאת המעבר לחישוב "המדויק" מניבה שורות עם הפרש חיובי ושורות עם הפרש שלילי, כך שחלק מהסטיות הנובעות מההנחה השגויה מתקזזות מאליהן, ובשורה התחתונה רואים שההפרשים אכן זניחים.

13 ראה עמוד 44 להלן בהסבר חוק 2.

14 ראה כנ"ל בהסבר חוק 3.

"לוחות ושברי לוחות" – על מולדות ותכונותיהם

### שכיחות סימני השנים

להלן טבלת השוואה של חישובי שכיחות סימני השנים, בין השיטה המקובלת לבין השיטה המדויקת שהצגנו אנו:<sup>15</sup>

חישוב מלוח ס"א ראשים בהנחת "רציפות" מולדות תשרי														
סימן שנה	החא	בשו	בחג	זחא	גכו	בשה	זחג	השא	גכה	זשה	הכז	בחח	זשג	השג
סך היקרויות	133385	162883	196848	149268	181440	406675	199997	114192	215405	162883	622080	199997	472812	229495
שכיחות ב-%	3.8692	4.7249	5.7101	4.3299	5.2632	11.7967	5.8015	3.3124	6.2484	4.7249	18.0451	5.8015	13.7152	6.6571

חישוב מלוח ס"א ראשים ללא הנחה - חישוב מדויק														
סימן השנה	החא	בשו	בחג	זחא	גכו	בשה	זחג	השא	גכה	זשה	הכז	בחח	זשג	השג
סך היקרויות	26677	32576	39369	29853	36288	81335	40000	22839	43081	32576	124416	40000	94563	45899
שכיחות ב-%	3.8692	4.7248	5.7100	4.3298	5.2632	11.7967	5.8015	3.3125	6.2484	4.7248	18.0451	5.8015	13.7153	6.6571

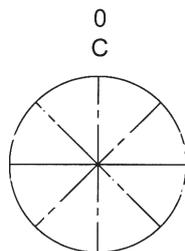
גם כאן, תוצאת המעבר לחישוב "המדויק" מניבה שורות עם הפרש חיובי ושורות עם הפרש שלילי כך שחלק מהסטיות הנובעות מההנחה השגויה מתקזזות מאליהן, ובשורה התחתונה רואים שההפרשים אכן זניחים.  
 בבדיקה רואים שההפרשים הם לא יותר מאשר  $\pm \frac{3}{3447360}$ , עובדה שאכן "מתירה" לבצע את החישוב בשיטה הישנה.

### נספחים

#### נספח 1: "מסרק" מולדות ראשי המחזורים

(A ו-C מספרים שלמים וחיוביים),  $A * X \text{ Mod}(C)$

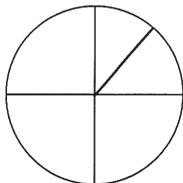
את תוצאת המודולו (שארית) ניתן להציג בתצוגה גרפית על פני שעון שבו השעה 12 מורה על אפס (וכפולות שלמות של C המניבות שארית אפס לאחר חלוקה ב-C), השעה 6 מורה על שארית בגודל  $0.5 * C$  וכן הלאה, כדלהלן:



15 חישוב לציין שהמכנה (סך ההיקרויות) שונה בין 2 הטבלאות (יחס של 5).

## ערן רביב

1. הפונקציה תמיד תחזור על עצמה, זה יקרה לכל "המאוחר" (בהנחה של-A ו-C אין גורם משותף) כאשר X יהיה שווה ל-C.
2. לאחר סימון כל האפשרויות, פילוח השעון יהיה תמיד בזווית אחידה. אי לכך לא ייתכן, לדוגמה, מצב כזה:



3. לאחר סימון כל האפשרויות יתקבל גרף שעון שגודל השארית המתאימה לכל גזרה שווה ל-GCD - greatest common divisor (המחלק המשותף הגדול ביותר של שני המספרים). הוכחה:

a. ראשית נוכיח שה-GCD מופיע על מפת התוצאות.

לפי אלגוריתם אוקלידס ניתן להביע את ה-GCD כך:

$a \cdot n + m \cdot c = \text{GCD}(a, c)$ ,  $m-1$  הם מספרים שלמים, הצגה זו שקולה לתוצאת המודולו, שהיא  $a \cdot n + m \cdot c$  עבור m שלילי נותן את השארית לאחר הפחתת כפולות שלמות של C.

b. עתה נותר להוכיח שה-GCD נותן את התוצאה הקטנה ביותר. כל פתרון על מפת התוצאות

ניתן להציג כ- $a \cdot x - y \cdot c$ , נניח שיש לנו שני פתרונות  $x_1, y_1$  ו- $x_2, y_2$ . ההפרש בין

$$a \cdot x_1 - y_1 \cdot c - (a \cdot x_2 - y_2 \cdot c) = a(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)c$$

הפתרונות הוא: GCD מחלק הן את a והן את c, ברור שהוא מחלק גם את הצירוף הליניארי שלהם. מש"ל.

## נספח 2: אופן בניית לוח ס"א ראשים בתוכנת EXCEL

הקובץ מכיל שני חלקים עיקריים, הראשון טבלת חישוב המכילה חישוב "אפיון המחזור" הנגזר מהזנת ראש מחזור כלשהו (קלט למשבצת I17) (לשונית המכונה table), והשני טבלת תוצאות אוטומטית (לשונית המכונה RES).

הקובץ משמש לשני יישומים עיקריים:

### יישום "ידני"

- מזינים קלט למשבצת I17. הקלט מציין את מולד ראש המחזור שאותו אנו מעוניינים לבחון, ההזנה היא בחלקים. אם המשתמש מעוניין להזין מולד כיום, שעה וחלקים כמקובל, עליו להשתמש במחשבון עזר שורה 4 משבצות EFG ולקבל המרת המולד לחלקים במשבצת I4.

”לוחות ושברי לוחות” – על מולדות ותכונותיהם

- תוצאה זו עליו להזין במשבצת I17.
- בעמודות FGHI שורות 17 עד 35 מתקבל חישוב פשוט של מולדות ראשי השנים ללא הדחיות בהתאם לגו”ח אדו”ט.
  - בעמודה E (17 עד 35) מוצג היום בשבוע של ראש השנה (לפני יישום הדחיות) בעזרת הפונקציה MOD עם מחלק 7.
  - כללי הדחיות – את כללי הדחיות חילקתי ל-5 כללים נפרדים כדי לקבל שבכל שנה יכול לחול רק חוק אחד, ובכך נמנעתי מהצורך בחישוב איטרציות, דבר שהיה מקשה על אופן העבודה.
  - עמודה S (17 עד 35) נקראת ”סך התזוזה” והיא סיכום של כללי הדחיות. לאחר מכן מחושב ”יום בשבוע לאחר הדחייה” {עמודה M (17 עד 35)} ע”י  $MOD(E17+S17,7)$  (הוספת מספרי ימי הדחייה ליום בשבוע שחל ראש השנה לפני יישום כללי הדחיות, כל זה מודולו 7).
  - ”ימי השנה לאחר החוקים” {עמודה L (17 עד 35)} – סך ימי השנה לפני החוקים פחות ימי תזוזת ראש השנה הזה, ועוד ימי תזוזת ראש השנה הבא.
  - ”אינדקס” עמודה T (17 עד 35) – קוד השנה הבנוי כדלהלן – הספרה השמאלית מציינת את יום ראש השנה לאחר הדחייה, הספרה האמצעית מציינת את ספרת היחידות של סך ימי השנה לאחר הדחיות (סיומת בספרה 3 מציינת שנה חסרה, 353 ימים לפשוטה ו-383 למעוברת, סיומת בספרה 4 מציינת שנה כסדרה, 354 ימים לפשוטה ו-384 למעוברת, סיומת בספרה 5 מציינת שנה שלמה, 355 ימים לפשוטה ו-385 למעוברת, ואילו הספרה הימנית מציינת את היום שבו יחול פסח – לעולם יומיים לפני ראש השנה הבא (דבר הנובע מהעובדה שכל השינוי באורך השנה מיושם במחצית הראשונה של השנה).
  - ”המרת אינדקס לסימני הלוח” עמודה T (17 עד 35) – המרת התצוגה לסימון המסורתי כדלהלן:

יום בשבוע	המרה לאותיות
1	א
2	ב
3	ג
4	ד
5	ה
6	ו
0	ז

## ערן רביב

המרת סימן השנה :

אות	מספר
ח	3
כ	4
ש	5

### יישום "אוטומטי"

- ביישום זה המחשב מריץ בעמודה I17 את הערכים מ-26,328 ועד 207,768 (סה"כ 181,440 אפשרויות). יישום זה סורק באופן ממוחשב את כל האפשרויות הקיימות ע"י מעבר על כל "החלקים" של השבוע (7\*24\*1080). נקודת ההתחלה נבחרה כראש מחזור 1:00:40.
- בכל פעם נוצר אפיון המתאים ל-I17 המוזן, המחשב כותב את האפיון בדף עבודה המכונה res, הפעם בשורות. בכל תזוזה של חלק המחשב בודק האם נוצר אפיון חדש. אם לא, הוא ממשיך הלאה, אם כן – נכתבת שורה חדשה המציינת אפיון מחזור חדש.
- אם נמחק בדף העבודה המכונה res את התאים A ועד T שורות 2 עד 63, נחזור לדף העבודה הנקרא table ונלחץ על הלחצן האפור הנקרא "לחץ לחישוב לוח" המחשב יריץ את כל האפשרויות ויכתוב את הלוח מחדש!
- בדף עבודה הנקרא לוח ס"א ראשים מתקבלת הטבלה באופן אוטומטי לחלוטין ובפורמט הדומה לפורמט הנרפס בכל הטבלאות.

### הסבר על המרת כללי הרחיות לחמישה כללים

- חוק 1 – מתאים לרחיית "לא אד"ו ראש" – הכלל נשאר כשהיה ועבור ימים 1,4,6, התנאי מתקיים ובעמודה N (35-17) יופיע 1 (פרמטר לוגי המציין הזזת יום אחד).
- חוק 2 – אם היום שווה 2 וסך החלקים והשעות גדול או שווה ל-19,440 (מולד זקן ביום ב'), התנאי מתקיים ובעמודה O (35-17) יופיע 1 (פרמטר לוגי המציין הזזת יום אחד).<sup>16</sup>
- חוק 3 – עבור ימים 0,3,5 וסך החלקים והשעות גדול או שווה ל-19,440 (מולד זקן בימים ג',ה',ז'), התנאי מתקיים ובעמודה P (35-17) יופיע 1 (פרמטר לוגי המציין הזזת שני ימים).
- חוק 4 – אם השנה פשוטה, והיום שווה 3, וסך החלקים והשעות גדול או שווה ל-179924<sup>17</sup> וקטן מ-19,440 התנאי מתקיים ובעמודה Q (35-17) יופיע 1 (פרמטר לוגי המציין הזזת שני ימים).
- חוק 5 – אם השנה אחרי מעוברת והיום שווה 2 וסך החלקים והשעות גדול או שווה ל-16789<sup>18</sup> וקטן מ-19,440 התנאי מתקיים ובעמודה Q (35-17) יופיע 1 (פרמטר לוגי המציין הזזת יום אחד).

16 19,440 – מספר חלקים המתאים ל-18 שעות.

17 9924 – מספר חלקים בהתאמה ל-ט' ר"ד.

18 16,789 – מספר חלקים בהתאמה ל-ט"ו תקפ"ט.

”לוחות ושברי לוחות” – על מולדות ותכונותיהם

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	פריסת גבולות		
1	השאל	גכז	בשה	זחא	גכז	בשה	זחא	השאל	גכז	זשה	זשג	הכז	בהז	זשג	הכז	בהז	זשג	השג	1	0	409
2	השאל	2כז	בשה	זחא	גכז	בשה	זחא	השאל	גכז	זשה	זשג	הכז	בהז	זשג	הכז	בהז	זשג	השג	1	2	539
3	השאל	2כז	בשה	זחא	גכז	בשה	זחא	השאל	גכז	זשה	זשג	הכז	בהז	זשג	הכז	בהז	זשג	השג	1	2	564
4	השאל	2כז	בשה	זחא	גכז	בשה	זחא	השאל	גכז	זשה	זשג	הכז	בהז	זשג	הכז	בהז	זשג	השג	1	4	1054
5	השאל	2כז	בשה	זחא	גכז	בשה	זחא	השאל	גכז	זשה	זשג	הכז	בהז	זשג	הכז	בהז	זשג	השג	1	4	1074
6	השאל	2כז	בשה	זחא	גכז	בשה	זחא	השאל	גכז	זשה	זשג	הכז	בהז	זשג	הכז	בהז	זשג	השג	1	5	334
7	השאל	2כז	בשה	זחא	גכז	בשה	זחא	השאל	גכז	זשה	זשג	הכז	בהז	זשג	הכז	בהז	זשג	השג	1	5	359
8	השאל	גכז	בשה	זחא	גכז	בשה	זחא	השאל	גכז	זשה	זשג	הכז	בהז	זשג	הכז	בהז	זשג	השג	1	6	409
9	השאל	גכז	בשה	זחא	גכז	בשה	זחא	השאל	גכז	זשה	זשג	הכז	בהז	זשג	הכז	בהז	זשג	השג	1	7	874
10	השאל	גכז	בשה	זחא	גכז	בשה	זחא	השאל	גכז	זשה	זשג	הכז	בהז	זשג	הכז	בהז	זשג	השג	1	8	899
11	השאל	גכז	בשה	זחא	גכז	בשה	זחא	השאל	גכז	זשה	זשג	הכז	בהז	זשג	הכז	בהז	זשג	השג	1	8	924
12	השאל	גכז	בשה	זחא	גכז	בשה	זחא	השאל	גכז	זשה	זשג	הכז	בהז	זשג	הכז	בהז	זשג	השג	1	9	204
13	השאל	גכז	בשה	זחא	גכז	בשה	זחא	השאל	גכז	זשה	זשג	הכז	בהז	זשג	הכז	בהז	זשג	השג	1	9	229
14	השאל	גכז	בשה	זחא	גכז	בשה	זחא	השאל	גכז	זשה	זשג	הכז	בהז	זשג	הכז	בהז	זשג	השג	1	11	334
15	השאל	גכז	בשה	זחא	גכז	בשה	זחא	השאל	גכז	זשה	זשג	הכז	בהז	זשג	הכז	בהז	זשג	השג	1	11	359
16	השאל	גכז	בשה	זחא	גכז	בשה	זחא	השאל	גכז	זשה	זשג	הכז	בהז	זשג	הכז	בהז	זשג	השג	1	11	379
17	השאל	גכז	בשה	זחא	גכז	בשה	זחא	השאל	גכז	זשה	זשג	הכז	בהז	זשג	הכז	בהז	זשג	השג	1	11	719
18	השאל	גכז	בשה	זחא	גכז	בשה	זחא	השאל	גכז	זשה	זשג	הכז	בהז	זשג	הכז	בהז	זשג	השג	1	11	744
19	השאל	גכז	בשה	זחא	גכז	בשה	זחא	השאל	גכז	זשה	זשג	הכז	בהז	זשג	הכז	בהז	זשג	השג	1	13	874
20	השאל	גכז	בשה	זחא	גכז	בשה	זחא	השאל	גכז	זשה	זשג	הכז	בהז	זשג	הכז	בהז	זשג	השג	1	15	204
21	השאל	גכז	בשה	זחא	גכז	בשה	זחא	השאל	גכז	זשה	זשג	הכז	בהז	זשג	הכז	בהז	זשג	השג	1	15	229

נספח 3: לוחות

1. לוח ס"א ראשיים מורחב עם סימני הדחייית – לוח 213 ראשיים
  2. לוח השוואת גבולות בין הלוח המסורתי והלוח המודרני
- לוח 213 ראשיים (גבולות מעשיים)















**"לוחות ושברי לוחות" – על מולדות ותכונותיהם**

13	2	14	179	2	15	584	298
14	2	15	589	2	18	19	535
15	2	18	24	2	20	559	540
16	2	20	564	3	1	484	1,065
17	3	1	489	3	5	329	833
18	3	5	334	3	5	354	5
19	3	5	359	3	5	374	4
20	3	5	379	3	9	199	829
21	3	9	204	3	9	224	5
22	3	9	229	3	11	739	535
23	3	11	744	3	20	534	1,903
24	3	20	539	3	20	559	5
25	3	20	564	3	22	1,069	534
26	3	22	1,074	4	0	404	299
27	4	0	409	4	2	919	535
28	4	2	924	4	11	714	1,903
29	4	11	719	4	11	739	5
30	4	11	744	4	14	174	535
31	4	14	179	4	18	19	833
32	4	18	24	5	1	484	1,605
33	5	1	489	5	2	894	298
34	5	2	899	5	2	919	5
35	5	2	924	5	5	354	535
36	5	5	359	5	5	374	4
37	5	5	379	5	9	199	829

2	14	175	2	15	588	22
2	15	589	2	18	22	559
2	18	23	2	20	484	1,065
2	20	560	3	1	484	833
3	1	485	3	5	332	5
3	5	333	3	5	355	4
3	5	356	3	5	378	7
3	5	379	3	9	203	4
3	9	204	3	9	226	2
3	9	227	3	11	740	3
3	11	741	3	20	536	5
3	20	537	3	20	559	2
3	20	560	3	22	1,073	8
3	22	1,074	4	0	407	3
4	0	408	4	2	921	3
4	2	922	4	11	717	5
4	11	718	4	11	740	2
4	11	741	4	14	174	3
4	14	175	4	18	22	7
4	18	23	5	1	484	1
5	1	485	5	2	898	8
5	2	899	5	2	921	2
5	2	922	5	5	355	3
5	5	356	5	5	378	7
5	5	379	5	9	203	4

-4	4	8
0	3	3
-1	0	1
-4	0	4
-4	3	7
-1	1	2
-3	4	7
0	4	4
0	2	2
-2	1	3
-3	2	5
-2	0	2
-4	4	8
0	3	3
-1	2	3
-2	3	5
-1	1	2
-3	0	3
-4	3	7
-1	0	1
-4	4	8
0	2	2
-2	1	3
-3	4	7
0	4	4

