

הערה על שימוש בכלל סימטריה אצל הראב"ע¹

רבי אברהם אבן עזרא (הראב"ע) מחשב מספרי צירופים ("מתברות" בלשוננו) בהקשרים שונים. חוקרי הראב"ע הצביעו על השימוש בכללי נסיגה בחישובים אלה. אנו מראים שבפירושו המאוחר לספר שמות מרמז הראב"ע על אפשרות שימוש בסימטריה לקיצור החישוב.

1. הקדמה

הראב"ע נזקק כמה פעמים למספר הצירופים הקומבינטוריים.² ההקשר הנפוץ הוא אסטרולוגי: מספר הצירופים הקומבינטוריים של כוכבי הלכת. זהו ההקשר בו הם מופיעים לראשונה בחיבור האסטרולוגי "ספר העולם", ובהקשר זה מופיעים המקדמים כמה פעמים בפירושי הראב"ע לתורה. בחיבורו הקצר "ספר האחד"³ ההקשר שונה. בחיבור זה דן הראב"ע בתכונות מיוחדות של המספרים השלמים מאחד עד תשע. במסגרת זו, חוקר הראב"ע פירוק של מקדמים בינומיים לגורמים ראשוניים.

הראב"ע משתמש בכללי נסיגה לצורך חישוביו. כן וזיילברגר דנו לאחרונה בכללים אלה והציגום בסימול מודרני. העדר השימוש בסימטריה של המקדמים, אף במקום בו כלל זה מקצר באופן משמעותי את החישוב, מעורר פליאה. השוואת כתב יד של "ספר העולם" (המובא ע"י סלע) לפירושו המאוחר לספר שמות, מביאה אותנו למסקנה שחלה התפתחות: בעוד שבעבודותיו האסטרולוגיות המוקדמות הראב"ע מחשב מספרי צירופים בעזרת כללי נסיגה, בכתבים מאוחרים הוא מצביע על הסימטריה שלהם ומרמז על אפשרות השימוש בה לצורך קיצור החישוב.

להלן סקירת המאמר בקצרה:

בפרק השני אנו מציינים את המקורות העבריים הקדומים העוסקים במניית תמורות וצירופים. בנוסף לספר יצירה ופירוש רס"ג עליו (שהם המקור העיקרי, כפי שציינו גנדז, כן

* מוקדש לזכר ד"ר שמואל גיליס הי"ד — רופא וחוקר מסור, אוהב תורה ומדקדק באותיותיה.

1 נתמך חלקית ע"י הקרן הישראלית למדע, מיסוד האקדמיה הישראלית למדעים.

2 מספרים אלה מכונים כיום "מקדמים בינומיים".

3 על חיבור זה ועל הספרות האריתמולוגית, ראה Langermann-Simonson.

ואחרים) יש למנות גם את ספרות המסורה והלשון.⁴ הפרק מסיים בהערה על-אודות חישוב מקדמים מולטינומיים בספרות הקבילית.

הפרק השלישי עוסק בפרשנות הראב"ע לנ"ל: את המניין בספר יצירה מסב הראב"ע ממניין צירופי אותיות האלף-בית למניין מצבי מערכת כוכבי הלכת. אלה ואלה — מספרם אינו ניתן לחישוב אפקטיבי. כדי להתגבר על בעיית החישוב, מבודד הראב"ע משתנים, ובודק את מספר המצבים במשתנה אחד.

בפרק הרביעי אנו מתמקדים במשתנה ההתחברות: מספר תתי-קבוצות של כוכבי לכת הסמוכים זה לזה במופעם, כלומר, צירופים.

בפרק החמישי אנו דנים במספר הכולל של הצירופים אליבא דהראב"ע. אף על פי שהראב"ע היה מעוניין במספר זה (וזו הסיבה שחישוב מקדמים בינומיים) לא ידע על-אודות שיטות ישירות לחישוב מספר זה, וודאי שלא הציגו כחזקה של 2. אנו מראים שהסיבה לכך היא אי התחשבותו בשני המקדמים הראשונים.

בפרק השישי, אנו מבארים את כללי הנסיגה, והולכים בעקבי כץ וזיילברגר.

העדר כלל סימטריה בחישובים המוקדמים נידון בפרק השביעי. יתכן שהסיבה לקושי בגילוי כלל סימטריה היא אי ההתחשבות בשני המקדמים הראשונים (על כן הסימטריה אינה מלאה). בהמשך הפרק אנו מורים על איזכור הסימטריה בפירוש הארוך לשמות ומראים שראב"ע מרמז על אפשרות שימוש בסימטריה לקיצור החישוב.

הפרק השמיני מסכם את המאמר ומזכיר את ההשפעה על רלב"ג (בהקשר הקונקרטי של כלל הסימטריה).

2. רקע

אחת הבעיות העתיקות של הקומבינטוריקה הספירית היא מניית תמורות וצירופים.⁵ ספר יצירה מונה את מספר המלים הניתנות לכתיבה בעזרת שתיים עד שבע אותיות שונות (תמורות, בלשוננו):

כאיזה צד צרפן, שתי אבנים בונות שני בתים, שלש בונות ששה בתים, ארבע בונות עשרים וארבע בתים, חמש בונות מאה ועשרים בתים, שש בונות שבע מאות ועשרים בתים, שבע בונות חמשת אלפים וארבעים בתים. למעלה מכאן צא וחשב מה שאין הפה יכול לדבר ואין האוזן יכולה לשמוע.⁶

רב סעדיה גאון מבאר ומכליל:

ואם רצה אדם לידע כמה תיבות נבנות ממה שלמעלה מזה ... הרי הדרך בכך לכפול מה שהושג לך מן הכפל הראשון בכמו המספר השני... פירוש הדבר כי היוצא משתי אותיות שתי תבות, וכאשר תכפיל השתיים בשלש יהיו שש... ואם תכפיל השש

4 תודות ליוסף עופר על הארה זו.

5 ראה למשל Stanley, Katz.

6 ספר יצירה פרק ג הלכה ד (במהדורת קפאח). דנו בפיסקה זו: Gandz, עמ' 494-496, Knuth; עמ' 23.

בארבע יהיו עשרים וארבע... ואם תכפיל ארבע ועשרים בחמש יהיו מאה ועשרים...
ואם תכפיל... בשש יהיו תש"כ, ואם תכפיל בשבע יהיו חמשת האלפים וארבעים.⁷

רב סעדיה ממשיך ומונה את מספר המלים הניתנות לכתיבה בעזרת שמונה ויותר אותיות
שונות, ומסיים:

ואם תבקש כפל אחת עשרה [תקבל] שלשת אלפים רבוא ותתקצ"א רבוא וששת
אלפים ות"ת תיבות. ואם תרצה לדעת מה שלמעלה מזה עשה כפי הסדר הזה.
ואמנם הגענו עד אחת עשרה והפסקנו, מפני שהמילה הגדולה ביותר המצויה
במקרא היא בעלת אחת-עשרה אותיות "והאחשדרפנים"^{9,8}.

רב סעדיה הסתייע כאן, כנראה, בהערת המסורה:¹⁰

ג' מלין מן י"א אתין וסימנהון וכתועבותיהן וכעלילותיהם והאחשדרפנים.¹¹

מבין שלוש המלים הארוכות בתנ"ך, רב סעדיה בוחר את בעלת האותיות השונות,
המתאימה להדגמת מניין תמורות בנות אחת-עשרה אותיות.¹² מספר המלים הניתנות
לכתיבה בעזרת אוסף נתון של אותיות (לאו דווקא שונות!)¹³ נידון בפרשנות הקבלית לספר
יצירה.¹⁴

3. מצבי מערכת כוכבי הלכת

הראב"ע מפרש את הביטוי המקראי "יום ליום יביע אומר"¹⁵:

יש ראיות גמורות מחכמת החשבון, כי מערכת השבעה משתנה בכל חלקיה. ולעולם
לא תמצא מתכונת מערכת דומה לאחרת אילו היה העולם עומד אלפי אלפים רבבות
שנים. גם זה מפורש בספר יצירה.¹⁶

- 7 פירוש רס"ג לספר יצירה, שם. התרגום על-פי מהדורת הרב יוסף קאפח. על קטע זה ראה
Foata-Zeilberger.
- 8 אסתר ט, ג.
- 9 פירוש רס"ג לספר יצירה, מהדורת קאפח, שם.
- 10 רב סעדיה הכיר את ספרות המסורה. ראה דותן, אור ראשון בחכמת הלשון, ירושלים תשנ"ז, עמ'
19-18.
- 11 אכלה ואכלה, מהדורת פרנסדורף, הנוכח תרכ"ד, עמ' 121, סעיף 192. מסורה גדולה ליחזקאל כ, מד.
במסורה גדולה לנביאים, כ"י קהיר, יחזקאל טז, מז נמנות המלים הארוכות על-פי מספר אותיות
השימוש ומספר אותיות הגוף. ר' יונה אבן ג'נאח ובני דורו הכלילו וחיפשו את המלים הארוכות בלשון
העברית. ראה אלדר, תורת הקריאה במקרא, ירושלים תשנ"ד, עמ' 24-25. תודה ליוסף עופר על
ההפניות.
- 12 אף את מנייני התמורות בנות 7, ..., 3, 2 אותיות שונות, הדגים רב סעדיה על-ידי מלים מקראיות בעלות
אותיות שונות: בג, חפץ, שלום, אברהם, בראשית, וארפשכד.
- 13 מספרים אלה מכונים כיום "מקדמים מולטינומיים".
- 14 ראה למשל, ר' משה קורדוברו, פרס רמונים, שער הצרוף, פרק א. ייתכן שמקורו בכתבי ר' אברהם
אבולעפיא. נושא זה, כנושאים מתמטיים אחרים בספרות הקבלית, טרם נחקר כראוי.
- 15 תהלים יט, ג.
- 16 פירוש הראב"ע לתהלים, שם.

"מערכת השבעה" היא מערכת שבעת כוכבי הלכת ("המשרתים העליונים").¹⁷ למערכת זו מספר עצום של מצבים שונים ("מתכונות") כ"מפורש בספר יצירה", המשפיעים על מאורעות "העולם השפל".¹⁸ סתם הראב"ע ולא פירש: כיצד נמנים המצבים (מה הם המשתנים)? היכן הוזכרו הדברים בספר יצירה? דברי הראב"ע עשירים במקום אחר:

ותנועת השבעה משרתים ... כנגד מוצק הארץ משתנה, פעם במרוצה פעם בהתמהמה, ופעם עומדים ופעם שבים אחורנית. ומערכת זה אל זה משתנה עד אין קץ, פעם מתחברים ופעם מתפרדים, ופעם בלי מבט ופעם בשבעה מבטים, ופעם עולים ויורדים, בגדול ובקטן, ופעם בקו (המזלות) ופעם שמאלים או ימיניים, והם בעצמם לא יחלו ולא יכלו ולא יוסיף אורם ולא יחסר רק כנגד מראה העין.¹⁹

המשתנים הנזכרים כאן הם: המהירות, הכיוון, המיקום היחסי, הגובה, המיקום ביחס לגלגל המזלות (מישור המילקה), ההיראות, הגודל והבוהק. ממשיך הראב"ע:

ובעבור כל אלה הדברים הנזכרים גם אחרים ישתנו כל הנולדים בארץ מהמקורות והצמחים והחיים, כי לא יתכן שתמצא מערכת שוה לאחת ברבבות אלף אלפי שנים. על-כן כתוב בספר יצירה עד אחד עשר שאין הפה יכול לדבר ולא האוזן יכולה לשמוע, אם כן, במספר זה, אף כי במספר רב מחול ימים.²⁰

כלומר, משתנים אלה ומשתנים נוספים גורמים למספר עצום של מצבים אפשריים: לא תתכנה שתי מערכות שוות כ"רבבות אלף אלפי שנים".²¹

הראב"ע מסתמך על מניין התמורות בספר יצירה. לדברי הראב"ע, בספר יצירה חושב מניין התמורות "עד אחד עשר" (כך!).²² את המניין בספר יצירה מסב הראב"ע ממניין צירופי אותיות האלף-בית למניין מצבי מערכת כוכבי הלכת. כזה כן זה, מספרם לא ימנה מרוב, "מה שאין הפה יכול לדבר ולא האוזן יכולה לשמוע... במספר רב מחול ימים". כלומר, לא ניתן לחישוב אפקטיבי.

כדי להתגבר על בעיית החישוב, מבודד הראב"ע משתנים, ובודק את מספר המצבים

17 השווה לפירושו לקמן יט, י; כד, כה. וכן פירוש הראב"ע לבראשית ו, ב, הפירוש הארוך לשמות ג, טו; ו, ג; ח, ו; יב, ב; כג, כה; לג, כא. הפירוש לדניאל ב, ב, ועוד.

18 כמבואר בהמשך: "ובעבור זה... בכל יום יש דבר חדש". "בעבור אלו השינויים ישתנו כל הנבראים בעולם השפל בעצמם ואף כי במקריהם" (הפירוש הארוך לשמות ג, טו).

19 ספר יסוד מורא, השער השנים עשר.

20 יסוד מורא, שם. ראה גם פירוש הראב"ע לקהלת א, ג — "על כן לא תמצא מתכונת מלאכת השמים נמשלת למתכונת אחרת רגע אחד, ועל זה נזכר בספר יצירה שתי אבנים בונות שנים עד תשע (כך!) שאין הפה יכול לדבר ולא האוזן יכולה לשמוע".

21 מספר זה זהה למספר המובא בפירוש לתהלים. ייתכן שאינו מבטא דרך הפלגה גרידא. כ"ארבעת אלפי רבבות". הוא מספר התמורות של אחת עשרה אותיות שונות, המחושב בספר יצירה (על-פי נוסח הראב"ע, ראה הערה 22 לקמן). למעלה מכאן ("אלפי אלפים רבבות") "אין הפה יכול לדבר". השווה לספר שעור קומה: "שלוש מאות אלפים רבבות ול"ג ושליש פרסאות מה שאין הפה יכולה לדבר ואין האוזן יכולה לשמוע" (ספר רזיאל, דפוס אמשטרדם, דף לז).

22 הראב"ע מטמיע כאן את פירוש רב סעדיה לתוך גוף הטקסט, שהרי בספר יצירה חושב המניין עד שבע.

במשתנה אחד. להלן נתמקד במשתנה ההתחברות.²³ כלומר, תתי-קבוצות של כוכבי לכת הסמוכים זה לזה במופעם.

4. המחברות

בספר יצירה נמנה מספר האפשרויות לבחור שתי אותיות שונות מתוך 22 אותיות האלף-בית העברי:

עשרים ושתיים אותיות ... כאיזה צד צרפן, אלף עם כולן וכולן עם אלף, בית עם כולן וכולן עם בית, גימל עם כולן וכולן עם גימל, וכולן חוזרות חלילה, נמצאו יוצאות במאתים שלשים ואחד שערים.²⁴

הראב"ע עוסק בהכללה הטבעית: מספר האפשרויות לבחור תת-קבוצה של k אברים מתוך קבוצה של n איברים (שונים).

לכל בחירה כזו אנו קוראים צירוף (או קומבינציה). הראב"ע קורא לבחירה "מחברת".²⁵ במאמר זה נסמן את מספר הצירופים (של תתי-קבוצות של k איברים מתוך קבוצה של n איברים), כמקובל בספרות המתמטית המודרנית ע"י

$$\binom{n}{k}$$

דוגמה: יש שש אפשרויות לבחור שתי אותיות מתוך הקבוצה אבגד והן:
אב אג אד בג בד גד

לכן:

$$\binom{4}{2} = 6$$

5. המספר הכולל של המחברות

הראב"ע מתעניין במספר תתי-הקבוצות של כוכבי הלכת ("המשרתים העליונים"), המסוגלים להופיע בתוך מעלה אחת:

והנה המחברות לבדם במעלה אחת משלש מאות וששים, הם מאה ועשרים.²⁶

והם

23 פעם מתחברים ופעם מתפרדים" (יסוד מורא, שם).

24 ספר יצירה, פרק ד הלכה ד (במהדורת קפאח).

25 הראב"ע מעדיף את הביטוי המקראי "מחברת" על פני מונחי ספר יצירה "שער" ו"צרוף". דוגמאות

נוספות לתופעה זו ראה אצל סלע, עמ' 273.

26 הפירוש הארוך לשמות ג, טו.

המשרתים העליונים שיש להם מאה ועשרים מחברות.²⁷

בפירושו הארוך לשמות מבהיר הראב"ע:

המאה ועשרים — מחברות השבעה.²⁸

הראב"ע מתבסס על המניין הקלאסי של שבעה כוכבי לכת. טענתו היא שלקבוצה בת 7 איברים יש 120 "מחברות" = צירופים. כלומר: תתי-קבוצות. התמיכה המתבקשת: מדוע אין מספר תתי-הקבוצות 128, כמקובל במתמטיקה המאוחרת? הראב"ע מוכיח את נכונות מניינו ע"י סכימה:

מאה ועשרים מחברות השבעה: ...המחברת השניה היא אחת ועשרים. וכנגדם מחברת החמשה ככה... ומחברת השלשה חמשה ושלושים... וככה מחברת הארבעה. והנה מחברת הששה שבעה. והמחברת הגדולה במספר כולם היא אחת.²⁹

כלומר,

$$\binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 120$$

כדומה, מונה הראב"ע את "מחברות החמשה":

וכאשר תחבר מרבע הראשון אל מרבע האמצעי באמת יהיה כמספר השם. ג"כ מחברות החמשה כוכבי לכת.³⁰

כלומר, מחברות החמישה מספרן עשרים ושש "כמספר השם",³¹ כלומר כמו הגימטריה של שם הוי"ה.

$$\binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 26$$

נשים לב, הראב"ע אינו מתחשב במקדמים

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}$$

על-כן אינו מכלילם בסכום.³²

מדוע התעלם הראב"ע משני המקדמים הראשונים?

הראב"ע לא מתייחס לתתי-קבוצות, אלא ל"מחברות", שהן תתי-קבוצות המכילות שני

27 אבן עזרא בראשית שיטה אחרת — פירוש פרק א, יד.

28 הפירוש הארוך לשמות לג, כא. ראה גם פירושו לקהלת א, ג.

29 הפירוש הארוך לשמות, שם.

30 הפירוש הארוך לשמות, שם.

31 ראה מפרשי הראב"ע, שם. צרפתי, עמ' 202.

32 ולכן אינו מקבל חזקה של 2.

איברים לפחות.³³ הופעת כוכב-לכת יחיד במיקום מסוים אינה מאורע ראוי לציון, מה שאין כן – שניים.³⁴

6. כללי נסיגה³⁵

ראינו שהראב"ע מחשב את מספר המחברות כסכום מקדמים בינומיים. כיצד הוא מחשב את המקדמים עצמם? בספרו האסטרונומי המוקדם "ספר העולם"³⁶ מצאנו חישוב מפורט:³⁷

והמחברות הם ק"כ וככה תוכל לדעת מספרם: ידוע כי כל חשבון שיחובר מא' עד איזה מספר שיהיה תוכל להוציאו מערכו אל חצי ואל חצי אחד

כלומר³⁸

$$1 + 2 + \dots + (n-1) = (n-1) \left(\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

הראב"ע ממשיך:

והנה נחל לדעת כמה יהיה מספר המחברות השניות, והטעם שיתחברו ב' כוכבים לברם: וידוע כי המשרתים הם ז', והנה יש לשבתי עם המחברות ו', והנה נערוך ו' אל חציו וחצי אחד יעלה כ"א, וככה מספר המחברות השניות

פירושו: אם נסמן את שבעת כוכבי הלכת ע"י: א ב ג ד ה ו ז, כאשר שבתי מסומן ע"י האות ז, אז מניין תתי-הקבוצות של שני איברים בהן חבר ז הוא 6:

אז בז גז דז הז

בדומה, מניין תתי-הקבוצות של שני איברים בהן ו חבר, אך ז אינו חבר, הוא 5:

או בו גו דו הו

ומניין תתי-הקבוצות של שני איברים בהן ה חבר, אך ו רז אינם חברים הוא 4, וכו'. אשר על-כן:

33 "מיעוט רבים שניים". לאחד לא התייחס הראב"ע כאל מספר רגיל. ראה, למשל, Langermann-Simonson.

34 על-כך ניתן להוסיף: הראב"ע לא הכיר, כפי הנראה, את הבינום ולא את "משולש פסקל", בו הם מופיעים כמקדמים ראשוניים. מוכן שהראב"ע לא הכיר את המושג המודרני (תת)-קבוצה ריקה".

35 פרק זה מיוסד על הניתוח של Katz ו-Zeilberger. השווה סלע, עמ' 74-76.

36 מתוארך מרחשון ד'תתק"ט (נובמבר 1148). ראה סלע, עמ' 376.

37 הקטע במהדורות המודפסות משובש. אנו מצטטים את הגרסה הראשונה על-פי כ"י קמברידג' 1517 וכ"י וטיקן 477. גרסה זו מובאת אצל סלע, עמ' 72-73.

38 כלל זה מופיע פעמים רבות בכתבי הראב"ע, והוא מייחסו ל"ספרי חכמי החשבון". ראה ספר המספר, שער שלישי, עמ' 24-25. יסוד מורא, שער יא; ספר השם, שער ה'; שפה ברורה, מב, א-ב ועוד. דיון על-כך אצל צרפתי, עמ' 143; סלע, עמ' 75.

$$\binom{7}{2} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = (7-1)\left(\frac{7-1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 21$$

לסיכום, כדי לחשב את מספר תתי-הקבוצות של שני איברים, הראב"ע מיישם את הכלל הבא:

$$\binom{n}{2} = 1 + 2 + \dots + (n-1) = (n-1)\left(\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

הראב"ע ממשיך ומחשב:

רצינו לדעת כמה השלישיות, והנה החילונו ושמנו צדק עם שבתי ועמהם אחד מהאחרים הה' ויעלה המספר ה', ערכנו אותו על ג' שהוא חצי המספר וחצי אחד עלה ט"ו וזאת מחברת שבתי. והנה ראוי להיות מחברות צדק ד' ערכנו אותם על ב' וחצי עלו י', ומחברות מאדים ג' ערכנום על ב' עלו ו', ומחברות חמה ב' ערכנום על א' וחצי עלו ג', ומחברת נגה עם השפלים אחת, והנה הכל ל"ה, ואלה מספרי המחברות השלישיות

כלומר:

$$\binom{7}{3} = \binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} = 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35$$

רצינו להוציא המחברות הרביעיות, והנה נחל משבתי וצדק ומאדים עמו, ובעבור שצריך לשלשה שיתחברו עמו תחילת המחברת ארבעה ערכנום על ב' וחצי עלו י', ואח"כ יהיו מחברת שבתי וצדק עם האחרים ויהיו בתחילת שלשה ערכנום על ב' עלו ו' והנה י"ו, ואח"כ יחל שבתי עם מאדים ויהיו ב' ערכנום על א' וחצי עלו ג', ואח"כ מחברת אחת והנה עלה מספר שבתי כ' מחברות. והנה יחל צדק, מג' ערכנום על ב' עלו ו', ואח"כ ב' ערכנום על א' וחצי עלו ג', ואח"כ מחברת אחת, והנה מחברות צדק י'. יחל מאדים משנים ערכנום על א' וחצי עלו ג', ואח"כ מחברת אחת, והנה ד' מחברות. ומחברת חמה עם השפלים ממנה אחת. והנה הכל ל"ה מחברות.

כלומר:

$$\begin{aligned} \binom{7}{4} &= \binom{6}{3} + \binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = \left(\binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}\right) + \left(\binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}\right) + \left(\binom{3}{2} + \binom{2}{2}\right) + \binom{2}{2} \\ &= (10 + 6 + 3 + 1) + (6 + 3 + 1) + (3 + 1) + 1 = 20 + 10 + 4 + 1 = 35 \end{aligned}$$

הראב"ע השתמש כאן בכלל הנסיגה:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{k-1}{k-1}$$

בצורה דומה (אך בהשמטת חלק מהפרטים) מחשב הראב"ע ב"ספר העולם" את מחברות החמש והשש.

7. סימטריה

כפי שנוכחנו, הראב"ע מחשב בנפרד את מחברות השלוש ומחברות הארבע. החישוב של מחברות הארבע הוא ריקורסיבי ומסורבל. חישוב זה מעורר תמיהה: בשני המקרים מספר המחברות הוא 35. התוצאה זהה, ולא בכדי. כל בחירה של תת-קבוצה של ארבעה איברים מתוך קבוצה של שבעה איברים שקולה לבחירת תת-קבוצה משלימה של שלושה איברים. הכללת נימוק זה מוכיחה את כלל הסימטריה:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

האמנם לא הכיר הראב"ע את כלל הסימטריה? בפירושו הארוך לשמות, שהוא מספריו היותר מאוחרים,³⁹ כותב הראב"ע:

מחברות השבעה... המחברת השניה היא אחת ועשרים, וכנגדם מחברת החמשה ככה, וזה המספר יצא משבעה. ומחברת השלשה חמשה ושלישים. שגם זה המספר יוצא משבעה מחברות, וככה מחברת הארבעה.⁴⁰

הראב"ע מציין פה את הסימטריה של מספרי המחברות.⁴¹ יתר על-כן, נראה שבמלים "וזה המספר יוצא משבעה" מורה הראב"ע על-כך ש-

$$7-2=5 \quad 7-3=4$$

ובכך מבסס את מספרי המחברות הארבע והחמש (מתוך 7) על כלל הסימטריה ולא על כלל הנסיגה.

8. סיכום

הראב"ע מתעניין במספר המצבים האפשריים של מערכת כוכבי הלכת. הוא עומד על כך שבעיה זו לא ניתנת לפתרון, על-כן מבודד הוא משתנה אחד: הופעה של תת-קבוצה בתוך מעלה אחת. בעיה זו נפתרה ע"י חישוב מקדמים בינומיים וסכומים (חלקיים) שלהם. הראב"ע מסתמך על ספר יצירה (בו הוא מטמיע את פירוש רב סעדיה גאון). את המניינים בספר יצירה מסב הראב"ע, ממנייני צרופי אותיות האלף-בית למנייני מצבי מערכת כוכבי הלכת. כזה כן זה, מספרם לא ימנה מרוב, "מה שאין הפה יכול לדבר ולא האוזן יכולה

39 למקום כתיבתו ותיארוכו ראה פירוש הארוך לשמות יב, ב, והערות ויזר שם, פליישר וסימון, עמ' 121-132.

40 הפירוש הארוך לשמות לג, כא.

41 סימטריה זו מצוינת גם ב"ספר האחד", שתיארוכו אינו ברור.

לשמוע". כלומר, לא ניתן לחישוב מעשי. רב סעדיה הכליל את חישוב מספר התמורות בספר יצירה ונותן כלל נסיגה כללי. בדוגמאותיו משתמש רס"ג בספרות המסורה על המקרא. הראב"ע מכליל את חישוב ה"שערים" בספר יצירה ונותן כלל נסיגה לחישוב מקדמים בינומיים, הראב"ע מטמיע חישובים אלה בפירושו למקרא.

בספרו האסטרונומי המוקדם מחשב הראב"ע מספרי צירופים בעזרת כלל הנסיגה, בפירושו המאוחר לספר שמות מרמו הראב"ע על חישוב שונה וחסכוני יותר למספרי צירופים, עבור $n/2 > k$ ⁴².

החישוב המאוחר נסמך על הסימטריה של מספרי הצירופים.

התפתחות זו מעוררת את פליאתנו: כלל הסימטריה, לכאורה, פשוט ושקוף יותר מכלל הנסיגה. סביר להניח, שהאבחנה המאוחרת בכלל הסימטריה נבעה מההתעלמות משני המקדמים הראשוניים. בהעדרם קשה להבחין בסימטריה, בפרט עבור קבוצות קטנות ("מחברות החמשה והשבעה"). רק אחר שסיים את החישוב המפורט בעזרת נסיגה מבחין הראב"ע בסימטריה.⁴³

תודות — לדורון זיילברגר, לעלי מרצבך, לשי סימונטון, לרון עדין וליוסף עופר על הערותיהם המחכימות.

מקורות

- כתבי ר' אברהם אבן עזרא, כרכים א-ה, הוצאת מקור, ירושלים תש"ל.
פירושי הראב"ע לתורה, בתוך: תורת החיים, מוסד הרב קוק, ירושלים תשנ"א.
ספר יצירה עם פירוש הגאון רבנו סעדיה ב"ר יוסף פיומי ז"ל (מקור ותרגום), מהדורת הרב יוסף קפאח, ירושלים תשל"ב.
ר' לוי בן גרשום, ספר מעשה חושב, יוצא לאור פעם ראשונה ע"פ כתבי יד, מתורגם ומפורש ע"י גרשון לאנגע, פראנקפורט ע"ג מ"ן תרס"ט.
י' לוי, ילקוט אברהם אבן-עזרא, ניו יורק-הל אביב 1985.
א' סימון, ארבע גישות לספר תהלים מר' סעדיה גאון עד ר' אברהם אבן עזרא, הוצאת אוניברסיטת בר-אילן, רמת-גן תשמ"ב.
ש' סלע, אסטרונומיה ופרשנות המקרא בהגותו של אברהם אבן עזרא, הוצאת אוניברסיטת בר-אילן, רמת-גן תש"ס.
ל' פליישר, רבנו אברהם אבן עזרא בצרפת, בתוך מזרח ומערב ד-ה, תר"ץ-תרצ"ב. דפוס צילום: ר' אברהם בן עזרא, קובץ מאמרים על תולדותיו ויצירתו, הל-אביב תש"ל, עמ' 69-106.
ג' ב"ע צרפתי, מונחי המתמטיקה בספרות המדעית העברית של ימי הביניים, הוצאת מאגנס, האוניברסיטה העברית, ירושלים תשכ"ט.

D. Foata and D. Zeilberger, "Denert's permutation statistic is indeed Euler-Mahonian", in: *Studies in Applied Math.*, 1990.

S. Gandz, *Studies in Hebrew astronomy and mathematics*, Ktav, New-York 1970.

- 42 כעבור כמאה וחמישים שנה, בשנת ה' פב' (1321-2), ניסח הרלב"ג את כלל הסימטריה כמשפט מתמטי (החותרם את הפרק הקומבינטורי בספרו "מעשה חושב") והוכיחו באופן קפדני. ראה מעשה חושב סוף מאמר ראשון (עמ' 48-49 במהדורת לאנגע), צרפתי, עמ' 224, ולאחרונה — סימונטון.
43 זו תופעה נפוצה בתולדות המתמטיקה: החישוב המסובך קודם, לעתים קרובות, להוכחה הקצרה והאלגנטית.

- V. J. Katz, "Combinatorics and induction in the medieval Hebrew and Islamic mathematics", *Vita Mathematica*, 99–106, MAA Notes 40, Math. Assoc. Amer., Washington 1996.
- D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol. III, Addison-Wesley, Reading 1973.
- Y. T. Langermann and S. Simonson, "The Hebrew Mathematical Tradition", in: *mathematics Across Cultures: A History of Western Mathematics*, ed. Helaine Selin, Kluwer Pub., forthcoming.
- S. Simonson, "The missing problems of Gersonides — A critical edition, Part I", *Hist. Math.*, 27 (2000), pp. 243–302.
- R. P. Stanley, "Hipparchus, Plutarch, Schroder and Hough", *Amer. Math. Monthly*, 104 (1997), pp. 344–350.
- D. Zeilberger, "The Combinatorial Astrology of Rabbi Abraham Ibn Ezra", in: *La Gaceta*, ed. J. L. Fernandez, 1998.