אוניברסיטת בר-אילן

המספר e בתלמודים – "עישורייתא דבי רבי"

The Number e in the Talmudim – "The Tenth of Rabbi"

אריאל קטן

עבודה זו מוגשת במסלול השלמת תזה לתואר שני

הפקולטה למדעי הרוח

המחלקה להיסטוריה כללית

תוכנית מדע והלכה

אוניברסיטת בר אילן

רמת גן　　　　　　　　　　　　　　　　תש"ף

אוניברסיטת בר-אילן

המספר e בתלמודים – "עישורייתא דבי רבי"

The Number e in the Talmudim – "The Tenth of Rabbi"

עבודה זו נעשתה בהדרכתו של **פרופ' עלי מרצבך**

הפקולטה למדעי הרוח, המחלקה להיסטוריה כללית, תוכנית מדע והלכה של

אוניברסיטת בר אילן

בס״ד

אב תש״ף

המספר e ועישורייתא דבי רבי

אריאל קטן

תוכן

תקציר

המספר e (e=2.718281828459045…) הוא מספר יסודי בעולם המתמטיקה לא פחות מהמספרים פאי (π =3.14159265…) ושורש 2 (√2=1.41421356…), אך הוא פחות מוכר מהם. e התגלה במתמטיקה המודרנית במאה ה-17 והוגדר במאה ה-18. הוא מופיע בחישובי תופעות רבות ומגוונות, ובחישובי סטטיסטיקה והסתברות רבים. אחת ההגדרות של e היא $\frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

התלמודים דנים במגוון רחב מאוד של נושאים. בסוגיות בהם מבוצע חישוב הנקרא "כעישורייתא דבי רבי", נדרשים חכמי התלמוד לחשב ביטויים מהצורה $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. באחת מהסוגיות יש ההערכה למספר $\frac{1}{e}$, שליש ועוד קצת, וזאת לכאורה ההערכה הקדומה ביותר למספר זה.

בעבודה זו אסקור ואנתח את כל הסוגיות בהם מבוצע חישוב כעישורייתא דבי רבי:

א. ירושת בנות לאחר פטירת האב (כתובות סח ע"א ובסוגיה המקבילה בירושלמי), וספר הירושות לרס"ג המבצע את החישוב כמעט במדויק.
ב. ביקור חולים (נדרים לט ע"ב)
ג. פסיעה גסה (תענית י ע"ב ובתוספות שם, ברכות מג ע"ב ושבת קיג ע"ב)
ד. בניית מנורות בית המקדש (מנחות כט ע"א)
ה. דברים נוספים הנוטלים אחד מחמש מאות ממאור עיניו של אדם (עירובין נה ע"א ופסחים מב ע"א)
ו. נתן סאה ונטל סאה (משנה מקוואות פרק ז משנה ב, יבמות פב עמוד ב, משנה תרומות פרק ה משנה ז)

מתוך סוגיות אלו אראה כי לחכמי התלמוד, הגאונים והראשונים, היה ידע מתמטי נרחב וכן אינטואיציה חזקה לגבי חישובים שלא היה באפשרותם לחשב באמצעות הכלים המתמטיים שהיו בימיהם. באמצעות הידע והאינטואיציה, הם הסיקו מסקנות מתקדמות מאוד וביצעו הערכות לחישובים מסובכים. לכאורה הם גם היו הראשונים לשים לב למיוחדות המספר $\frac{1}{e}$, להעריך את גודלו ולהשתמש בתכונותיו.

עם כל זה, יש אולי גם שגיאות בחישובי חז"ל, במקרים בהם לא היו להם הכלים המתמטיים הנדרשים לביצוע החישובים. שגיאות אלו משפיעות על כל הסוגיות שלעיל, ואף עשויות לשנות הלכות שונות. אפרט בעבודה את ההנחות שהניחו חז"ל, את החישובים השונים, ואת השפעת החישובים על הסוגיות.

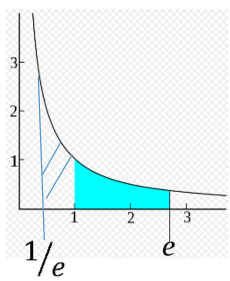
אין בהשגות אלו כל פגיעה בחז"ל, כי, כדברי הרמב"ם במורה נבוכים, חלק ג סוף פרק יד, המתמטיקה הלקויה של אותם הזמנים היא שהטעתם. נשאר לדון האם יש לשנות את ההלכות האלו עם התקדמות המתמטיקה.

מקור המספר e

המספר e ‏(e=2.718281828459045...) חשוב לעולם המתמטיקה ומופיע בטבע, לא פחות מהמספרים פאי (π =3.14159265...) ושורש 2 ($\sqrt{2}$=1.41421356...), אך הוא פחות מוכר מהם. הסיבה העיקרית לכך היא שיש השלכות גיאומטריות רבות ל- π ו- $\sqrt{2}$ וניתן להמחיש אותם בציור בקלות, מה שאין כן במספר e. לכן המספר e גם התגלה רק אלפי שנים מאוחר יותר מהם.

עוד בבית הספר היסודי רוב התלמידים ולומדי הגמרא נתקלים ב- π בחישוב היקף מעגל וב- $\sqrt{2}$ כאורך אלכסון בריבוע שאורך צלעותיו 1. בלימוד הגמרא מגיעים אליהם בסוגיות רבות כגון במסכתות עירובין (דף יד עמוד א – עמוד ב, דף נה עמוד א – נז עמוד א) וסוכה (דף ז עמוד ב - ח עמוד ב). לעומת זאת, למספר e נחשפים, אם בכלל, רק בתיכון ורק כאשר לומדים חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי וכלל לא לומדים עליו בגמרא. גם חכמי המתמטיקה של העת הקדומה התעניינו בעיקר בשאלות שניתן לצייר כגון שטחי צורות שונות וחתכי חרוט, או בשאלות הכוללות מספרים שלמים. לכן הם לא התייחסו לתופעות בהם מופיעים המספרים e או $\frac{1}{e}$ ולא גילו את תכונותיהם המיוחדות. לעומתם, התנאים כללו בחישוביהם קירובים למספר $\frac{1}{e}$ בפסיקותיהם ההלכתיות, ואף שמו לב לתכונות מיוחדות של מספר זה.

המספר e וההופכי שלו $\frac{1}{e}$ מוגדרים במספר דרכים השקולות זו לזו:

סוג הגדרה	$e = 2.7182\ldots$	$\frac{1}{e} = 0.3678\ldots$
על פי גבול	$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$\frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$
על פי טור אינסופי	$e = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+$	$\frac{1}{e} = \frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+$
על פי נגזרת $\frac{dy}{dx} = y(x)$	$e = \frac{y(1)}{y(0)}$	$\frac{1}{e} = \frac{y(0)}{y(1)}$
על פי שטח  	השטח מתחת לגרף של $y(x) = \frac{1}{x}$ מהנקודה x=1 ועד הנקודה (מימין לה) בה השטח הכולל יהיה שווה ל-1 (צבע התכלת בגרף). $\int_1^e (\frac{1}{t}dt) = 1$	השטח מתחת לגרף של $y(x) = \frac{1}{x}$ מהנקודה x=1 ועד הנקודה (משמאל לה) בה השטח הכולל יהיה שווה ל-1 (השטח המקווקו בגרף). $\int_{\frac{1}{e}}^1 (\frac{1}{t}dt) = 1$

עד המאה השש עשרה אין התייחסות בספרות המתמטית[1] למספר e או $\frac{1}{e}$. רק בתחילת המאה השבע עשרה המציא ג'ון נפייר (1550-1617) מסקוטלנד את הלוגריתמים שבעקבותיהם התגלה המספר e. מטרתו היתה לפשט חישובים של מכפלות, חילוקים וחזקות של מספרים על ידי הפיכת חישובי הכפל לפעולות חיבור באמצעות הנוסחה $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$, את חישובי החילוק לפעולות חיסור לפי $\log(a/b) = \log a - \log b$ ואת חישובי החזקה לפעולות כפל באמצעות הזהות $\log a^n = \mathrm{n} \cdot \log a$.

המצאתו, עם תיקונים קלים של הנרי בריגס (1561-1631), התפשטה בעולם במהירות והגיעה תוך פחות מארבעים שנה עד סין. הלוגריתמים הקלו על מלאכת החישוב והביאו במהרה להתקדמות המתמטיקה והמדע. אחד המשתמשים הראשונים הידועים היה יוהאנס קפלר (1571-1630) שהשתמש בלוגריתמים לחישוב מסלולי כוכבי הלכת. טבלאות הלוגריתמים שהכינו נפייר ובריגס שימשו מתמטיקאים במשך 300 שנה עד שמהדורה חדשה ומדויקת יותר הודפסה בשנת 1924[2]. ניתן עדיין למצוא לוחות לוגריתמים בחנויות לספרים ישנים, אף על פי שכעת יש מחשבונים המבצעים חישובים אלו במהירות.

ליאונרד אוילר (1707-1783) היה הראשון לסמן את המספר e באות זו בשנת 1727, ולחשבו עד 23 ספרות אחרי הנקודה. כמו כן, אוילר הגדיר מחדש את הפונקציות $\mathrm{y} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$ ו- $\log_e y = x$, פיתח את הטור $e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$, הגדיר את הזהות $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ והוכיח כי $e^{i\pi} + 1 = 0$. נוסחה אחרונה זו נחשבת לאחת הנוסחאות היפות ביותר בעולם המתמטיקה[3].

הפונקציה e^x משחקת תפקיד כמעט בכל תהליך רציף המתקיים בעולמנו. מקצב התפרקות חומרים רדיואקטיביים, דיפוזיה של חום, מעבר גלי קול ואור בחומר, ריבית דריבית, קצב גידול של אוכלוסייה, התפתחות מגפות ועוד. תפקיד ראשי יש לה גם בתורת ההסתברות. מאחר והתלמודים מקיפים נושאים רבים ומגוונים, סביר שהם ידונו בסוגיות שונות בהן יש למספר e תפקיד.

---

[1] Maor, E. (1994), e - The Story of a Number. New Jersey, Princeton University Press

ערכתי בדיקה בספרי היסטוריה של המתמטיקה הבאים כדי לוודא שאין איזכור של e לפני תקופה זו:

Bell E. T. (1945), The Development of Mathematics, New York NY. 2nd edition, McGraw Hill

Boyer C. B. (1968) A History of Mathematics. New York NY. John Wiley & Sons

Bunt L., Jones P., Bedient J. (1988) The Historical Roots of Elementary Mathematics, New York NY, Dover Publications

Burton D. M. (2011) The History of Mathematics: An Introduction, , New York NY. 7th edition, McGraw Hill

Cajory F. (1909) A History of Mathematics, London England. MacMillan & Company

Eves H.. (1969) An Introduction to the History of Mathematics. Holt, Rinehart & Winston

Newman J. R. (1956), The World of Mathematics, New York NY, Simon & Schuster

[2] Maor, e -The Story Of A Number, עמודים 11-16.

[3] Maor, e -The Story Of A Number, עמוד 160. https://en.wikipedia.org/wiki/Euler's_identity (פסקה 1, 2020), וגם פיינמן ר'. The Feynman Lectures on Physics I. Addison-Wesley, (1977), עמ' 10–22.

במשוואה זו מופיעים חמשה מספרים בסיסיים ביותר במתמטיקה (e,π, i,0,1) עם קשר ביניהם. בעיני הנוסחה $e^{i\tau} - 1 = 0$ כאשר $\tau = 2\pi$ היא נוסחה עוד יותר יפה כי מלבד היותה מורכבת ממספרים בסיסיים, היא מכילה איבר נייטרלי לחיבור וחיסור (0), איבר נייטרלי לכפל וחילוק (1), איבר נייטרלי לאינטגרציה וגזירה (e^x) ואיבר נייטרלי לסיבוב ($e^{i\tau}$ או τ).

בזמן חיבור המשנה והתלמודים, המספר e טרם הוגדר. חז״ל אמנם לא הגדירו את המספרים e או $\frac{1}{e}$, אך העריכו בקירוב את גודלם, הבינו שהם מיוחדים והסיקו נכונה חלק מהתכונות שלהם. במאמר זה אתמקד במספר $\frac{1}{e}$ המופיע בחישובים הקשורים לסוגיית ״עישורייתא דבי רבי״ באמצעות הנוסחה $\frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

עישורייתא דבי רבי [4]

הגמרא בכתובות דף סח עמוד א - סח עמוד ב דנה במקרה הבא: "אמר רבי: בת הניזונת מן האחין נוטלת עישור נכסים. אמרו לו לרבי: לדבריך מי שיש לו עשר בנות ובן אין לו לבן במקום בנות כלום? אמר להן כך אני אומר: ראשונה נוטלת עישור נכסים, שניה במה ששיירה, ושלישית במה ששיירה, וחוזרות וחולקות בשוה".

פירוש הגמרא (החישובים בסוגריים המרובעים לא מפורטים בגמרא): רבי אומר שכאשר אדם נפטר והשאיר נכסים לילדיו, הבת מקבלת לנדונייתה כאשר היא מתחתנת עשירית מן הירושה. שאלו את רבי, מה יהיה במקרה של אדם שיש לו עשר בנות ובן, אם כל בת תקבל עשירית מהנכסים לחתונתה, לבן לא תישאר כלל ירושה. ענה להם רבי שהכוונה שכל בת תקבל עשירית מהנכסים שנשארו בירושה בזמן חתונתה. זאת אומרת שהראשונה שמתחתנת תקבל עשירית מהירושה $[\frac{1}{10}\cdot 1=\frac{1}{10}]$. השניה שמתחתנת תקבל עשירית ממה שנשאר $[\frac{1}{10}\cdot(1-\frac{1}{10})=\frac{9}{100}]$, והשלישית עשירית ממה שנשאר $[\frac{1}{10}\cdot(1-\frac{1}{10}-\frac{9}{100})=\frac{81}{1000}]$ וכן הלאה. ואז כל הבנות מחלקות ביניהן בשווה.

עד כאן הסוגיה בבבלי בכתובות. בתלמוד הירושלמי כתובות פרק ו הלכה ו, דנה הגמרא באותו נושא אך מפרטת קצת יותר: "בעון קומי רבי, הרי שהיו עשר נקיבות ובן, אם נטלה הראשונה עישור נכסים והשנייה עישור נכסין והשלישית והרביעית והחמישית וכן עד לעשירית, אין כן לא נשתייר לבן כלום. אמר להן הראשונה נוטלת עישור נכסין ויוצאה והשנייה נוטלת עישור נכסים מן המשתייר והשלישית מן המשתייר והרביעית מן המשתייר עד עשירית מן המשתייר. **נמצאו הבנות נוטלות תרין חולקין פרא ציבחר והבן נוטל חד חולק ואוף ציבחר".** רש"י בנדרים דף לט עמוד ב, ד"ה (דיבור המתחיל) כעישורייתא דבי רבי מסביר את המשפט בירושלמי "נמצאו בנות שנוטלות במנה תרי תילתי פחות ציבחר והאי תלתא ומוסיף ציבחר (לבן)".

[4] הראשון שהסב את תשומת הלב לנושא זה היה יקותיאל גינצבורג (1889-1957), פרופסור למתמטיקה באוניברסיטת קולומביה וראש המכון למתמטיקה בישיבה יוניברסיטי בניו יורק, במאמרו מידות ומספרים בתלמוד שנדפס בתוך יקותיאל גינצבורג, כתבים נבחרים, הוצאת ניומן 1961, עמודים 129-146. **במשפט האחרון במאמר הוא מדגיש כי שליש ועוד קצת הוא הקירוב הראשון בספרות העולמית למספר היסודי של נפייר, שכל כך חשוב במתמטיקה המודרנית.**

המילה ״ציבחר״ או ״ציבחד״ מופיעה בתרגומים לתנ״ך שמונה פעמים[5] כתרגום למילים מצער, מעט וזעיר, ובתלמוד הירושלמי 17 פעמים[6], ללא ערך מספרי[7]. ״פרא ציבחר״ פירושו פחות קצת ו״אוף ציבחר״ פירושו ועוד קצת[8]. בחישוב שלעיל נקבל שציבחר הוא 1.5345% [בערך 1/65].

התלמוד הירושלמי מסביר את הסוגיה כמו התלמוד הבבלי, אלא שהוא מוסיף משפט נוסף בסוף שתרגומו : **נמצא שהבנות מקבלות שני חלקים פחות קצת והבן מקבל חלק אחד ועוד קצת**. התלמוד הירושלמי אינו מסביר איך הוא הגיע לתוצאה אלא רק מביא את התוצאה הסופית.

לפי חישוב ישיר, כל הבנות יחד מקבלות 65.13% מהירושה.

$$\frac{1}{10}+\frac{9}{100}+\frac{81}{1,000}+\frac{729}{10,000}+\frac{6,561}{100,000}+\frac{59,049}{1,000,000}+\frac{531,441}{10,000,000}+\frac{4,782,969}{100,000,000}+\frac{43,046,721}{1,000,000,000}+\frac{387,420,489}{10,000,000,000}=\frac{6,513,215,599}{10,000,000,000}=65.13216\%$$

לבן יישאר מהירושה $1-\frac{6,513,215,599}{10,000,000,000}=34.867844\%$, השווה לקצת יותר משליש 33.333%.

בכתיב מתמטי ניתן לרשום כי לבן ישאר בדיוק $\left(1-\frac{1}{10}\right)^{10}$ מהנכסים, ביטוי הקרוב מאוד ל- $\frac{1}{e}$.

יקותיאל גינצבורג מעיר[9] הערה חשובה. אילו היה כלל החלוקה של הירושה תלוי במספר הבנות כך שכל בת מקבלת אחד חלקי מספר הבנות, ולא 1/10 קבוע מהירושה, המשפט של התלמוד ״נמצאו הבנות נוטלות תרין חולקין פרא ציבחר והבן נוטל חד חולק ואוף ציבחר״ היה נכון לכל מספר בנות

[5] א. בראשית יט כ (פעמיים) – "הִנֵּה נָא הָעִיר הַזֹּאת קְרֹבָה לָנוּס שָׁמָּה וְהִיא מִצְעָר אִמָּלְטָה נָּא שָׁמָּה הֲלֹא מִצְעָר הִוא" ומתורגם בתרגום יונתן (ת"י) "הָא כְּדוּן בְּבָעוּ קַרְתָּא הָדָא קְרִיבָא מוֹתְבָהָא וְחָמֵי לְמֵיעֲרוֹק לְתַמָן וְהִיא צִיבְחַר וְקַלִילִין חוֹבָהָא אִישְׁתְּזֵיב כְּדוֹן תַּמָן הֲלָא צִבְחַר הִיא".
ב. ישעיהו כט יז – "הֲלוֹא עוֹד מְעַט מִזְעָר" מתורגם בתרגום יונתן "הֲלָא עוֹד צִיב חַד כִּזעֵיר" .
ג. ישעיהו י כה - "כִּי עוֹד מְעַט מִזְעָר" מתורגם בת"י אֲרֵי עוֹד צִיב חַד כִּזעֵיר.
ד. ישעיהו טז יד – "וּשְׁאָר מְעַט מִזְעָר" מתורגם בת"י "וּשׁאָר צִיב חַד כִּזעֵיר".
ה. ירמיהו נא לג – "עוֹד מְעַט" מתורגם בת"י "עוֹד צִיב חַד כִּזעֵיר".
ו. איוב לו ב – "כַּתַּר לִי זְעֵיר" מתורגם "אַמְתֵּן לִי צִבְחַר"
ז. דברי הימים ב כד כד: "כִּי בְמִצְעַר אֲנָשִׁים בָּאוּ חֵיל אֲרָם" – מתורגם "אֲרוּם בְּצִבְחַר גוּבְרִין אֲתוֹ חֵילְוַת אֲרָמָאֵי"

[6] ברכות ג ב, כלאים ל ג, דמאי כב א, דמאי כד ג, פאה כ ד, חלה נח ד, שבת ג א, שבת ו ד, שבת ח א, עירובין כה א, יומא מג ד, סוכה נה ג, ביצה סג א, תענית סו ב, תענית סו ג, סנהדרין כ ב, יבמות יב ד, כתובות ל ד. גם במקומות אלו יש גרסאות בר' ויש גרסאות בד'. מתוך אוצר לשון תלמוד ירושלמי, ערך ציבחד.

[7] גינצבורג מציע להשתמש במילה ציבחר כמילה העברית לשארית בחשבון מודולרי. הצעתו טרם נתקבלה.

[8] ספר הערוך, שכתב רבי נתן בר יחיאל מרומי בהמאה ה-11, גרס "צבחד" שפירושו "ציב חד" (מקצת אחד), "פרא" הוא בלשון יווני "פחות" (להפחית) ו"אוף" פירושו "עוד" (להוסיף). גינצבורג, מידות ומספרים בתלמוד עמ' 130, מסביר את המילה "פרא" במובן של "מחוץ" או "מעבר" ואז הבנות מקבלות "קצת מחוץ לשני שליש" אך הכוונה היא זהה.

[9] גינצבורג, כתבים נבחרים, מאמר מידות ומספרים בתלמוד, עמ' 132-134 (ובפרט בראש עמוד 133).

(משש בנות ומעלה). הוא מניח כי חז״ל שמו לב לתופעה זו. גינצבורג גם מניח שמחברי התלמוד הירושלמי ידעו את התוצאה המדויקת של החשבון אך לא כתבו את המספר המדויק של הציבחר כי הוא פחות מאחד מששים[10]. בהמשך הוא רומז[11] שמחברי התלמוד לא רשמו במדויק כמה זה ציבחר כי הם רצו לומר לנו שאין זה משנה כמה בנות יהיו, אם כל אחת תקבל אחד חלקי מספר הבנות מהנכסים, לבן ישאר ״חד חולק ואוף ציבחר״, אלא שהציבחר משתנה קצת לפי מספר הבנות. אין לחלק שמקבל הבן ערך אחד קבוע אלא הוא תלוי במספר הבנות, אך הוא תמיד יהיה שליש מהנכסים ועוד קצת. אם יש 10 בנות וכל בת מקבלת עישור מהנכסים (עשירית), היה נשאר לבנים $\left(1-\frac{1}{10}\right)^{10}$ מהירושה, וערך זה קרוב ל $\frac{1}{e}$. גם אם לוקחים מספר אחר כגון 12 ומחשבים חישוב דומה רק עם הכלל שכל בת[12] מקבלת $\frac{1}{12}$, עדיין ישאר לבנים בקירוב $\frac{1}{e} \approx \left(1-\frac{1}{12}\right)^{12}$ מהנכסים.

ניתן להגיע למסקנה זו מתוך עיון בסוגיה בתלמוד הבבלי. על פי מסקנת הגמרא (כתובות סח עמוד א) חכמים היו צריכים לאמוד את דעתו של כל אב שנפטר אם היה פזרן[13] או קמצן ומתוך כך להסיק כמה ירצה לתת נדוניה לבתו. חישוב זה היה צריך להתבצע כל פעם לאב אחר עם מספר הבנות שהיו לאותו אב. רק במקרה שאין לנו אומדן לדעתו של האב היו נותנים לכל בת עשירית מהנכסים. כך גם נפסק להלכה בשולחן ערוך (אבן העזר סימן קיג סעיף א): ״מי שמת והניח בת, אומדים דעתו כמה היה בלבו ליתן לה לפרנסת נדוניתא ונותנים לה[14]. ומנין יהיו יודעים אומדן דעתו? מריעיו ומיודעיו ומשאו ומתנו וכבודו. וכן אם השיא בת בחייו אומדים בה. ואם לא ידעו בית דין אומדן דעתו, נותנים לה מנכסיו עישור לפרנסת נדוניתה״. לכן ברור שחכמים חישבו פעמים רבות כמה ישאר לבנים במקרים בהם האב היה פזרן או קמצן עם מספר משתנה של בנות, ושמו לב שבכל מקרה שיש n בנות וכל בת מקבלת $\frac{1}{n}$ מהנכסים, לבנים ישאר שליש ועוד קצת[15].

מכאן שחז״ל זיהו כבר לפני מעל 1500 שנה כי הביטוי $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$ הוא שליש ועוד קצת (לכל 5<n).

זאת לדעתו של גינצבורג[16] ההערכה הקדומה ביותר למספר $\frac{1}{e}$.

---

[10] שם עמוד 132.

[11] שם עמוד 133.

[12] כמעשה שהיה בגמרא בבלי, כתובות דף סח עמוד א.

[13] במפרשים מופיעים הביטויים ותרן או נדיב

[14] הטור בשם הרא"ש וחלק מהגאונים סוברים שעשירית מהנכסים זה הגבול העליון לכמה כל בת יכולה לקבל במקרה שהאבא נפטר. לעומת זאת רש"י וגאונים אחרים סוברים שכל בת יכולה לקבל כפי האומדנא, בין פחות ובין יותר, ללא הגבלה.

[15] החישובים כנראה נעשו רק על מספר מוגבל של מקרים כי החישובים עם מספר גדול מאוד של בנות הוא מסובך ביותר. אולי משום כך חז"ל לא שמו לב שאם יש מספר גבוה של בנות, וכל אחת מקבלת יותר מאשר אחד חלקי מספר הבנות, יכול להיות מצב שחלק הבן יפחת קצת משליש.

[16] גינצבורג, כתבים נבחרים, מאמר מידות ומספרים בתלמוד, עמוד 146 מסקנה 3.

אופן חישוב עישורייתא דבי רבי

בסוגיית עישורייתא דבי רבי נאמרו כללים הקובעים כמה כל בת צריכה לקבל מהירושה, אך לא נעשה חישוב מפורש וגם לא מוסבר איך לבצע את החישוב. התלמוד מניח שחכמים ידעו לבצע את החישוב. בתלמוד הירושלמי מופיעה רק התוצאה הסופית, מה חלק הבנות וחלק הבן, במקרה של בן אחד ועשר בנות כשכל בת מקבלת עשירית מהנכסים. אין פירוט כמה כל בת מקבלת בנפרד.

חישוב רב סעדיה גאון

רב סעדיה גאון (רס״ג 882-942) כתב ספר ירושות[17], בו הוא מביא את הדין של עישורייתא דרבי, מסביר את דיניו השונים, ומחשב בפירוש כמה כל בת תקבל במקרה של עשר בנות ובן אחד מתוך ירושה של מאה דינרים. הספר תורגם לעברית פעמיים. פעם ראשונה בשנת 1897 על ידי יואל הכהן מילר[18] שהסתמך על כתב יד אחד בלבד[19], ופעם שניה בשנת 2015 על ידי ירחמיאל ברודי[20] בהסתמך על כתבי יד נוספים שנמצאו בגניזה הקהירית[21].

רס״ג מבצע את החישובים בעשרים שלבים. לכל בת הוא מחשב כמה היא מקבלת (עשירית ממה שנשאר) וכמה נשאר בנכסי האב לאחר שהבת מקבלת את חלקה. להלן השוואה בין התרגומים של מילר וברודי לחישוב[22]:

תרגום מילר	תרגום ברודי
ובאור זה אם הממון מאה דינרים	וביאור זאת: (אם)[23] היה הממון מאה דינרים,
נותנים לאותה שנשאת ראשונה עשרה.	(נותנים) לאותה שנישאת ראשונה עשרה,
נשארו תשעים דינרין.	נשארו תשעים דינרים;
ולהשנייה תשעה דינרין.	ולשנייה תשעה דינרים,
נשארו שמונים ואחד.	נשארו שמונים ואחד;
ולהשלישית ח' דינרין ועשירית.	ולשלישית ח' דינרים ועשירית,
נשארו ע״ג דינרין פחות עשירית.	נשארו ע״ג דינרים פחות עשירית;
ולהרביעית ז' ותשעה ושלשים חלקים ממאה.	ולרביעית ז' ותשעה ושלשים חלקי מאה,
נשארו ס״ה דינרין וחצי וחלק אחד ממאה.	נשארו ס״ה דינרים וחצי ועשירית העשירית.

---

[17] כתאב אלמוארית (ספר הירושות). חיבור בדיני ירושה בשפה הערבית.

[18] מילר י', (1897) ספר הירושות, בערבית ובעברית ובארמית, http://hebrewbooks.org/32708 פאריס צרפת, בהוצאת יוסף דירינבורג בברלין.

[19] Hunt. 630 שנמצא בספריית הבודליאנה באוקספורד.

[20] ברודי י', (2015) חיבורים הלכתיים של רב סעדיה גאון, בפרט עמודים 31-32. ירושלים, בית ההוצאה של 'יד הרב נסים'.

[21] ברודי בהקדמתו מציין שכתב היד בו השתמש מילר הוא קשה לקריאה בחלק מהמקומות והושמטו בו המקורות שרס"ג ציין בהלכותיו. בנוסחאות הנוספות מהגניזה יש את מקורות רס"ג אך אין את הספר בשלמותו, ולכן הוא השתמש בהן כדי להשלים את כתב היד בו השתמש מילר.

[22] ההבדלים המשמעותיים בין התרגומים מודגשים בטבלה.

[23] סוגריים עגולים אצל ברודי מסמנים טקסט משובש שיש למוחקו.

ולהחמישית ו׳ דינרין **וחצי וחלק אחד מעשרים** וחלק אחד מאלף.	ולחמישית ו׳ דינרים **וחצי**[24] **עשירית** וחלק אחד מאלף ;
נשארו נ״ח דינרין וצ״ט חלקים מאלף.	נשארו נ״ח דינרים ותשעים ותשעה חלקי אלף ;
ולהשישית ה׳ דינרין ושמונה עשיריות וצ״א חלקים מאלף פחות עשירית.	ולשישית ה׳ (דינרים) ושמונה עשיריות ותשעים ואחד חלקי אלף פחות עשירית,
נשארו נ״ג דינרין וי״ח חלקים מאלף ועשירית.	נשארו נ״ג דינרים ושמונה עשר חלקי אלף ועשירית ;
ולהשביעית ה׳ דינרין וג׳ עשיריות ושני חלקים פחות חומש מאלף.	ולשביעית ה׳ (דינרים) וג׳ עשיריות ושני חלקים פחות חמישית מאלף,
נשארו מ״ח וט״ז חלקים מאלף פחות עשירית.	נשארו מ״ח ושישה עשר חלקי אלף פחות עשירית ;
ולהשמינית ד׳ דינרין וח׳ עשיריות וחלק וג׳ חומשים מאלף.	ולשמינית ד׳ דינרים ושמונה עשיריות וחלק ושלוש חמישיות מאלף,
נשארו מ״ג דינרין וכ״א חלקים ורובע וחומש ממאה.	נשארו מ״ג דינרים ועשרים ואחד חלקים ורבע וחמישית ממאה ;
ולהתשיעית ד׳ דינרין וג׳ עשיריות **וג׳** חלקים ושביעית ממאה.	ולתשיעית ד׳ דינרים ושלוש עשיריות **ושני**[25] חלקים ושביעית ממאה,
נשארו **ל״ז** דינרין ופ״ט חלקים ושליש ממאה.	נשארו **שלושים ושמונה**[26] דינרים ושמונים ותשעה חלקים ושליש ממאה ;
ולהעשירית ג׳ דינרין ופ״ט חלקים ממאה.	ולעשירית ג׳ דינרים ושמונים ותשעה חלקי מאה,
נשארו ל״ה דינרין **וחלק ושלשה ממאה** ...	נשארו שלושים וחמישה דינרים **וחלק משלוש מאות**[27]...
כל אלו העישורים יחד והם ששים וחמשה דינרין ...	מצרפים את כל העישורים האלה והם שישים וחמישה דינרים, ...
ונשאר לבנים חמישה ושלושים דינר וכן הדין.	ונשארו לבנים שלושים וחמישה דינרים, וכך מחייב (הדין).

להלן טבלה למעקב אחר החישובים של רס״ג[28] (סימון (מ) מציין חישוב של מילר ו-(ב) מציין חישוב של ברודי). משמאל מופיע חישוב מדויק :

בת	חלק הבת לפי רס״ג	אופן חישוב רס״ג חלק הבת	יתרה לפי רס״ג	אופן חישוב רס״ג יתרה	חלק הבת מדויק	יתרה מדויקת
			100			100

[24] התרגום של ברודי נאמן למקור הערבי אך כנראה נשמט לרס"ג או למעתיקים המילה "וחצי" משום הדומות. מילר תרגם כאילו רשום "ולחמישית ו׳ דינרים **וחצי וחצי** עשירית וחלק אחד מאלף" שנותן תוצאה נכונה כי 6.551 שווה לעשירית של 65.51. ברודי מתרגם את המילה "וחצי" רק פעם אחת אך ממשיך בחישוב כאילו היא רשומה פעמיים וחלק הבת החמישית הוא 6.551.

[25] אצל מילר נרשם ג' חלקים.

[26] אצל מילר נרשם ל"ז.

[27] אצל מילר רשום "וחלק שלשה ממאה"

[28] מילר וברודי עוקבים אחר חישובו של רס"ג ומציינים טעויות רבות. גינצבורג מציין טעויות חישוב שיש אצל מילר, אך במאמרו יש שגיאות דפוס רבות.

1	10	10	90	90	10	90
2	9	9	81	81	9	81
3	8.1	$8+\frac{1}{10}$	72.9	$73-\frac{1}{10}$	8.1	72.9
4	[29]7.39	$7+\frac{39}{100}$	[30]65.51	(מ) $65+\frac{1}{2}+\frac{1}{100}$ (ב)[31] $65+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}$	7.29	65.61
5	6.551 (מ) [32]6.051 (ב)	(מ) $6+\frac{1}{2}+\frac{1}{20}+\frac{1}{1000}$ (ב) $6+\frac{1}{20}+\frac{1}{1000}$	[33]58.099 (מ) [34]58.099 (ב)	$58+\frac{99}{1000}$	6.561	59.049
6	[35]5.8909	$5+\frac{8}{10}+\frac{91}{1000}-\frac{1}{10000}$	53.0181 [36]	$53+\frac{18}{1000}+\frac{1}{10000}$	5.9049	53.1441
7	[37]5.3018	$5+\frac{3}{10}+\frac{2-\frac{1}{5}}{1000}$	48.0159 [38]	$48+\frac{16}{1000}-\frac{1}{10000}$	5.31441	47.82969
8	[39]4.8016	$4+\frac{8}{10}+\frac{1+\frac{3}{5}}{1000}$	43.2145 [40]	$43+\frac{21+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{100}$	4.782969	43.04672

[29] צריך להיות 7.29. מילר מעיר שיש מספר טעויות בחישוב, אך כיוון שהטעויות לא נגררות עד הסוף, "קרוב לומר שיד המוריקים מכלי אל כלי גרמו הבלבול". כוונתו למעתיקים שלא הבינו את החשבון ולכן טעו בהעתקת המספרים. ברודי כותב: "מסתבר שהטעות היא של המחבר, מכיון שמיד לאחר מכן נאמר שהסכום שנשאר הוא 65.51 דינרים (72.9 פחות 7.39)". מסקנתו שונה ממסקנת מילר כי הטעות נגררת. בהמשך יש טעויות נוספות אך למרות כל הטעויות התוצאה הסופית קרובה לתוצאה הנכונה ומתאימה לתוצאה בתלמוד הירושלמי.
[30] כאן הטעות נגררה מחישוב חלק הבת הרביעית. החישוב הנכון נותן עשירית דינר יותר.
[31] חישוב זהה לשל מילר רק במילים אחרות.
[32] ברודי מתעלם מכך שרק פעם אחת מופיעה המילה "וחצי". ראה גם הערה 24 לעיל.
[33] שגיאה של כמעט דינר. היתרה אחרי הבת הרביעית פחות חלק הבת החמישית (עם השגיאה הנגררת) צריך לצאת 58.959.
[34] עם הערך 6.051 היה צריך להתקבל 59.459, שגיאה לא סבירה של יותר מדינר ושליש. לכן ברור שהמילה "וחצי" נשמטה פעם אחת. ברודי מעיר שכאן נפלה טעות סופר וצריך להיות 58.909 ולא 58.099 על פי החלק של הבת השישית, אך יותר נכון שהיה צריך להיות 58.959 ובחישוב החלק של הבת השישית יש שגיאה נוספת.
[35] חלק הבת אינו עשירית מהיתרה. קל לראות את השגיאה כשרושמים את המספרים בבסיס 10 עם הספרה 0 כשומרת מקום, כי אז צריך רק להסיט את הנקודה העשרונית מקום אחד שמאלה. רס"ג אינו משתמש בספרה 0 או בנקודה עשרונית ולכן הוא מציין שברים שונים כגון חמישית ושביעית.
[36] כאן השגיאות מתקזזות והחשבון חוזר להיות קרוב למדויק. אילו היינו ממשיכים בטעות ומפחיתים את חלקה של הבת השישית מהיתרה אחרי הבת החמישית, היינו צריכים לקבל 52.2 דינרים.
[37] רס"ג החל לעגל את המספרים לחלק ה- 10000/1. מילר רשם בטעות 5.318.
[38] שגיאה של שלוש עשיריות דינר. היתרה אחרי הבת השישית פחות חלק הבת השביעית צריך לתת 47.7163. ברודי מעיר "נפלה כאן טעות בפעולת החיסור, שאינני יודע להסביר אותה בדיוק (רס"ג שכח כנראה את שלוש העשיריות, אבל גם אם נתקן השמטה זו החישוב אינו מדויק), אבל התוצאה של 48.0159 מתאימה להמשך".
[39] רס"ג מעגל את 4.80159 ל- 4.8016.
[40] רס"ג מעגל את 43.2143 ל- 43.2145.

9	4.3314 (מ) [41]4.3214 (ב)	(מ) $4+\frac{3}{10}+\frac{3+\frac{1}{7}}{100}$ (ב) $4+\frac{3}{10}+\frac{2+\frac{1}{7}}{100}$	37.8933 (מ) [42] 38.8933 (ב)	(מ) $37+\frac{89+\frac{1}{3}}{100}$ (ב) $38+\frac{89+\frac{1}{3}}{100}$	4.304672	38.74205
10	[43]3.89	$3+\frac{89}{100}$	35.0133 3 (מ) 35.0033 3 (ב)	(מ)[44] $35+\frac{1+\frac{1}{3}}{100}$ (ב)[45] $35+\frac{1}{300}$	3.874205	34.86784
סה"כ	65	65	35	35	65.13	34.87

בסך הכל הבנות מקבלות לפי רס"ג 65.2567 דינרים, ורס"ג עיגל זאת בסיכום הדין ל- 65 דינרים. מתוך חישובו נקבל שהמילה ציבחר (או ציבחד) בירושלמי הנ"ל שווה ל- 1/60[46].

למרות שיש שגיאות חישוב בכל בת החל מהבת הרביעית, התוצאה הסופית מאוד קרובה לתוצאה המדויקת ומתאימה לתוצאה בגמרא. מילר הסיק מכך שרס"ג חישב נכון אך המעתיקים הם אלו שקלקלו את החשבונות. קשה להאמין שרס"ג טעה הרבה טעויות גסות, חלקן כבר בתחילת החישוב, ואף על פי כן הגיע כל כך קרוב לתוצאה הנכונה. כמו כן, רס"ג ידע לבצע חישובים מסובכים ומדויקים בנושא חישוב המולדות וקידוש החודש[47] ולכן קשה לומר שהוא טעה כל כך בחישוביו פה, אפילו שאופי החישובים שונה. ברודי לעומת זאת כותב שרס"ג טעה בחישובים, כי חלק מהשגיאות נגררות ולא מדובר על שגיאות נקודתיות. לשיטתו סביר להניח כי רס"ג אכן טעה אך מאחר והגיע לתוצאה הנכונה הכתובה בגמרא ("נמצאו הבנות נוטלות תרין חולקין פרא ציבחר והבן נוטל חד חולק ואוף ציבחר"), לא שם לב לטעויות בדרך.

[41] מאית דינר פחות ממילר. הגרסה של ברודי יותר מתאימה לחישוב.
[42] אצל מילר יש טעות של דינר שלם (37 במקום 38). היתרה אחרי הבת השמינית פחות חלק הבת התשיעית צריך לתת 38.8831. הטעות היא בבירור של המעתיק כי בבת העשירית החישוב חוזר לתוצאה הנכונה. אצל ברודי המספר מתוקן ל-38 ולאחר התיקון התוצאה קרובה מאוד לתוצאה האמיתית.
[43] מספר זה מעוגל לחלק ה- 1/100 והוא מתאים ליתרה של 38.89 אחרי הבת התשיעית.
[44] אולי צריך להיות "נשארו ל"ה דינרין וחלק שלושה ממאה" ללא ו' לפני מילת שלושה ואז התוצאה תהיה 35.03 המתאים כמעט במדויק ליתרה הנכונה אחרי הבת התשיעית שהוא 38.893 פחות חלק הבת העשירית 3.89. הצעתו של מילר 35.331 אינה הגיונית והוא מציין זאת.
[45] הגרסה של ברודי נותנת תוצאה של 35.003 הקרובה מאוד ליתרה הנכונה, 34.868. הפרש של כשביעית דינר המהווה פחות מחצי אחוז!
[46] אם ניקח את הערך המדויק של שני שליש פחות 0.652567 אז ציבחר שווה בערך 1/71.
[47] רס"ג חיבר בנושאים אלו את הספרים "הוכחת העיבור" ו-"ספר המועדים".

מסקנה מחישוב רס"ג

רס״ג מחשב במאמץ רב את חלקה של כל בת לפי עישורייתא דבי רבי, ולמרות שגיאות חישוב רבות מגיע לתוצאה הסופית הנכונה כמעט במדויק. בכלים המתמטיים שהיו לרס״ג, משימת חישוב החלק של כל בת היא משימה קשה ביותר. אילו היו בנות נוספות במשפחה, החישוב היה קשה פי כמה וכמה. חכמי התלמוד ביצעו כנראה חישובים דומים לאלה של רס״ג כדי להגיע לתוצאה הנכונה וגם להם לא היו הכלים המתאימים לביצוע החישובים באופן מהיר ומדויק. לכן נראה כי חישובים כעישורייתא דבי רבי עם n=10 היו קרובים לקצה גבול היכולת החישובית של חז״ל. ברור כי לא היתה להם אפשרות טכנית לחישוב ביטויים[48] כמו $\left(1-\frac{1}{60}\right)^{60}$ או $\left(1-\frac{1}{500}\right)^{500}$. כפי שנראה להלן, חז״ל ידעו כי ביטויים אלו אינם מתאפסים אלא הם שווים לערך שהוא משמעותית גדול מאפס.

כנראה שהדרך היחידה שחז״ל יכלו להעריך את הגודל של ביטויים כגון $\left(1-\frac{1}{60}\right)^{60}$ או $\left(1-\frac{1}{500}\right)^{500}$ היא שהם שמו לב שלא משנה כמה בנות יש במשפחה, אם ניתן לכל בת אחד חלקי מספר הבנות מהרכוש, הבנות יקבלו סך הכל שני שליש פחות קצת והבנים יקבלו שליש ועוד קצת[49]. מכאן יכלו חכמים להסיק נכונה כי הביטוי $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$ שווה לשליש ועוד קצת לכל ערך של n הגדול מחמש. אמנם ערך הביטוי נכתב בפירוש רק בסוגיה אחת בה n=10, ובשאר הסוגיות אין ערך מפורש לביטוי עבור n גדול יותר, אך ברור מהסוגיות שיש לביטוי ערך גדול מאפס. הם השתמשו במסקנה זו בסוגיות רבות בתלמוד[50], גם עבור ערכי n גדולים בהם לא היתה אפשרות לחשב את הביטוי.

---

[48] אפילו כאשר n=60 בלבד, החישובים מסובכים ביותר וכוללים שברים עם מכנים בעלי יותר ממאה ספרות. אם נעגל את המספרים כמו רס"ג עד אחד מעשרת אלפים, החישובים יהיו עדיין מסובכים ביותר, אבל יתנו תוצאות מאוד קרובות לתוצאות האמיתיות. היום מחשבים ביטויים כאלה באמצעות לוגריתמים.

[49] כפי שכתב גינצבורג במידות ומספרים בתלמוד, עמודים 132-134.

[50] בפרק הבא אדון בסוגיות ביקור חולים (נדרים לט עמוד ב) n=60, פסיעה גסה (תענית י עמוד ב ובתוספות שם, ברכות מג עמוד ב ושבת קיג עמוד ב) n=500, בניית מנורות בית המקדש (מנחות כט עמוד א) n=1000, דברים נוספים הנוטלים אחד מחמש מאות ממאור עיניו של אדם (עירובין נה עמוד א ופסחים מב עמוד א) n=500, נתן סאה ונטל סאה (משנה מקוואות פרק ז משנה ב, יבמות פב עמוד ב, משנה תרומות פרק ה משנה ז) n=101.

סוגיות עם חישוב כעישורייתא דבי רבי

על פי המסקנה הקודמת כותב גינצבורג[51] שחז״ל הסיקו כי כל ביטוי מהצורה $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$ שווה לשליש ועוד קצת (״חד חולק ואוף ציבחר״) גם כאשר n גדול מאוד. במקומות רבים בתלמוד[52] חז״ל מניחים כי הביטויים $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$ אינם שווים לאפס, אף שלא יכלו לחשב אותם במפורש[53] ולא כתבו את ערך הביטויים. בגלל שחז״ל (על פי גינצבורג) הסיקו שהביטוי $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$ שווה לשליש ועוד קצת, הם יכלו להיות בטוחים שגם כאשר $n=60$ או $n=500$ הביטויים $\left(1-\frac{1}{60}\right)^{60}$ או $\left(1-\frac{1}{500}\right)^{500}$ אינם 0 אלא שווים לשליש ועוד קצת. חוכמה זו של חכמינו היא מדהימה בהתחשב בכך שלא היתה בימיהם דרך לחשב את הביטויים הללו. אפילו חישוב של $\left(1-\frac{1}{10}\right)^{10}$ דרש מאמצים מרובים כפי שראינו בחישוב רס״ג.

ביקור חולים

הגמרא בנדרים דף לט עמוד ב דנה במצוות ביקור חולים: ״אמר רבי אחא בר חנינא, כל המבקר חולה נוטל אחד מששים בצערו[54]. אמרי ליה[55], אם כן, ליעלון שיתין ולוקמוה[56]. אמר ליה כעישורייתא דבי רבי ובבן גילו[57]. דתניא רבי אומר בת הניזונית מנכסי אחין נוטלת עישור נכסים. אמרו לו לרבי, לדבריך מי שיש לו עשר בנות ובן אין לו לבן במקום בנות כלום? אמר להן, ראשונה נוטלת עישור נכסים, שניה במה ששיירה, שלישית במה ששיירה וחוזרות וחולקות בשוה״.

לפי גמרא זו, חז״ל ידעו כי גם לאחר 60 מבקרים עדיין ישאר לחולה חלק ניכר ממחלתו. הגמרא מתקשה מדוע חולה לא מבריא לאחר 60 מבקרים והיא מתרצת שהפחתת המחלה בכל ביקור היא כעישורייתא דבי רבי, שאז נשאר חלק ניכר מהמחלה אצל החולה. אמנם לא נאמר בפירוש שלחולה

---

[51] גינצבורג, כתבים נבחרים שם, עמוד 133 ועמוד 136.

[52] נדרים לט עמוד ב, תענית י עמוד ב, ברכות מג עמוד ב, שבת קיג עמוד ב, מנחות כט עמוד א, עירובין נה עמוד א ופסחים מב עמוד א. בהמשך אדון בפירוט בכל סוגיה וסוגיה.

[53] ללא מסקנה זו, לא ניתן להבין איך חז"ל חישבו זאת ללא שימוש בספרה 0, ללא נקודה עשרונית וללא לוגריתמים. לשם המחשה, כאשר n=60, חלק מהחישוב דורש להשתמש בשברים בעלי מכנה של יותר ממאה ספרות, וכאשר n=500, מקבלים שברים בעלי מכנה של יותר מאלף ושלוש מאות ספרות. מספרים כאלו לא היו קיימים אז.

[54] בהערת שוליים בגמרא וכן בגמרא המקבילה בבבא מציעא דף ל עמוד ב נכתב "מחליו". בויקרא רבה פרשה לד א כתוב: "דאמר רב הונא כל מי שמבקר את החולה פוחתים לו אחד מששים בחוליו. אותיביה לרב הונא, אם כן יעלו ששים וירד עמהם לשוק. אמר להם, ששים ובלבד שיהו אוהבין אותו כנפשו. אף על פי כן מרויחין לו".

[55] מסורת הש"ס מתקן ל- א"ל אביי לרבא.

[56] מסביר רש"י שם, ד"ה ליעיילו שיתין ולוקמוה: יכנסו ששים בני אדם כאחת לבקרו ויטול כל אחד ואחד מששים בצערו ומיד מתרפא.

[57] הר"ן (והרא"ש) פירש "שנולד המבקר במזלו של חולה". רש"י מפרש "בחור כמותו או זקן לזקן". בויקרא רבה לד א משמע שאם אוהבים אותו כנפשו אז כל אחד נוטל אחד מששים מהמחלה המקורית ואם יבואו ששים אכן יבריא, אך אם לא אוהבים אותו כנפשו יתרווח לחולה כי יטלו אחד מששים כעישורייתא דבי רבי (מתנות כהונה שם).

נותר "שליש ועוד קצת" ממחלתו, אך על פי הבנתנו בסוגיית "עישורייתא דבי רבי", החלק שנשאר לחולה הוא 36.4792% אחוז ממחלתו $\left(1-\frac{1}{60}\right)^{60} = 0.364792$, שזה בקירוב $\frac{1}{e}$.

ברור שלחז"ל היתה אינטואיציה חזקה שלמרות כל המבקרים שמפחיתים את המחלה אצל החולה לפי הנוסחה של עישורייתא דבי רבי, עדיין יישאר לחולה חלק משמעותי מהמחלה ואין נוסחת קסם לגרום לחולה להבריא.

פסיעה גסה

הגמרא בתענית דף י' עמוד ב' כותבת[58]: "פסיעה גסה נוטלת אחד מחמש מאות ממאור עיניו של אדם". התוספות על אתר כותבים: ואין להקשות אם כן בחמש מאות פסיעות גסות יהיה ניטל כל מאור עיניו של אדם והא קא חזינן דלאו הכי הוה. ונראה לפרש דהפסיעה ראשונה נוטל אחת מחמש מאות והפסיעה שניה נוטל פחות מן הראשונה ששניה אינה נוטלת אלא אחד מחמש מאות הנשארים כמו בעישורייתא דבי רבי (כתובות דף סח.), ר"ל (רוצה לומר) העישור ממה שנשאר. אבל עדיין קשה דמ"ש (דמאי שנא) פסיעה ראשונה דנוטלת יותר מן השניה אלא יש לומר דלא נוטלת אלא פסיעה ראשונה דוקא ומכאן ואילך כיון דדש דש. אי נמי פסיעה ראשונה נוטלת טפי משום דכל התחלות קשות."

על פי הגמרא, פסיעת פסיעה גסה פוגעת בראייה ומפחיתה אחד מחמש מאות ממנה. התוספות מסבירים שמאור העיניים לא נעלם לאחר 500 פסיעות גסות כי כל פסיעה מורידה פחות מקודמתה כמו בעישורייתא דבי רבי, ולכן תמיד ישאר לאדם מאור עיניים חלקי. תוספות מניחים שכאשר הולכים לפי עישורייתא דרבי, תמיד תישאר שארית משמעותית (כמו שמניחים שתמיד נשאר לבנים חלק משמעותי בירושה) ושכל פסיעה גורמת פחות נזק מהפסיעה לפניה. בעלי התוספות הבינו מתוך הגמרות שלעיל כי הביטוי $\left(1-\frac{1}{500}\right)^{500}$ אינו קרוב לאפס אלא בעל ערך משמעותי, ולכן אדם לא מתעוור מפסיעות גסות רבות. הם אינם מציינים שנשארת ראייה של "שליש ועוד קצת" בפירוש אך הם מתייחסים למציאות בה אנו רואים שנשארת ראייה משמעותית ("והא קא חזינן דלאו הכי הוה"). תוספות לא יכלו לבצע את החישוב במדוייק[59], אך ידעו כנראה שהביטוי $\left(1-\frac{1}{500}\right)^{500}$ קרוב לשליש ועוד קצת ולא קרוב לאפס. גינצבורג[60] כותב כי "ליבנו מגיד לנו שאחרי חמש מאות פסיעות ישאר לפי חשבון זה שליש ועוד ציבחר", ורומז שחז"ל הבינו זאת.

אכילת פת קיבר, שכר חדש וירק

הגמרות בעירובין נה עמוד ב ופסחים מב עמוד א מביאות דברים נוספים הנוטלים אחד מחמש מאות ממאור העיניים: "שלושה דברים מרבים את הזבל וכופפין את הקומה ונוטלין אחד מחמש מאות

---

[58] המשפט מופיע גם בברכות מג עמוד ב ושבת קיג עמוד ב

[59] חלק מהחישוב דורש להשתמש בשברים בעלי מכנה של יותר מאלף ושלוש מאות ספרות, אם לא משתמשים בלוגריתמים שלא היו בתקופת בעלי התוספות.

[60] גינצבורג, במאמר מידות ומספרים בתלמוד עמוד 136.

ממאור עיניו של אדם ואלו הן: פת קיבר ושכר חדש וירק (חי)". גם כאן צריך להסיק כמו בעלי התוספות לעיל שמדובר בחישוב כעישורייתא דבי רבי, כי הרי אנו רואים שאנשים לא מתעוורים לגמרי מפעולות אלו. הגמרא גם כאן כנראה ידעה שהחישוב הוא כעישורייתא דבי רבי, וביצוע פעולה הנוטלת $\frac{1}{500}$ מהראייה 500 פעמים, תשאיר לנו עדיין "שליש ועוד קצת" (בקירוב $\frac{1}{e}$) מהראייה.

מנורת המקדש

הגמרא במנחות[61] דף כט עמוד א מסבירה איך זיקקו את הזהב לעשיית מנורות הזהב לבית המקדש. הגמרא מצטטת מדברי הימים ב פרק ד פסוק כא את הפסוק "וְהַפֶּרַח וְהַנֵּרוֹת וְהַמֶּלְקַחַיִם זָהָב הוּא מִכְלוֹת זָהָב" ושואלת "מאי מיכלות זהב? אמר רב אמי: שכילתו לכל זהב סגור של שלמה. דאמר רבי יהודה אמר רב: עשר מנורות עשה שלמה וכל אחת ואחת הביא לה אלף ככר זהב והכניסוהו אלף פעמים לכור והעמידוהו על ככר".

רש"י, ד"ה ומי חסר כולי האי מסביר: "דקאמרת אלף ככר הכניסו אלף פעמים לכור עד שיעמוד על ככר, אלמא בכל פעם חסר ככר". לפי רש"י, בכל פעם שהכניסו את הזהב לכור, נחסר מהזהב ככר שלם ולכן לאחר 1000 פעמים נותר זהב מזוקק בכמות של ככר אחת בלבד[62,63]. המהרש"א[64] בחידושי אגדות מעיר שחשבונו של רש"י לא עקבי: "ואין זה מכוון דאם בתחלה כשהיו אלף ככר בכור לא היה נחסר רק ככר אחד, א"כ אח"כ בכל עוד יתמעטו הככרות בכור יתמעט גם החסר ולא היה נחסר עוד ככר שלם. אבל נראה לי בזה כמו בעישורייתא דרבי בכל פעם שנתמעטו הככרות נתמעט החסר ובפעם אחד היה חסר יותר מככר אחד ואח"כ לפי ערך זה וק"ל (וקל להבין)."

המהרש"א טוען שהכור מצרף באחוז קבוע. אם מכניסים 1000 ככרות לכור ויוצאים אחרי פעם אחת 999 ככרות, אז הכור מצרף בכל פעם 0.1%. הוא מחשב נכון שאם הכור מצרף 0.1% בכל פעם, אז 1000 צירופים לא יספיקו כדי לקבל ככר אחת בלבד של זהב טהור. בחישוב מדויק אחרי 1000 צירופים נישאר עם 367.7 ככרות זהב כי $\frac{1}{e} \approx 0.367695 = \left(1-\frac{1}{1000}\right)^{1000}$. המהרש"א הבין זאת ואומר שצריך להגדיל את אחוזי הצירוף כך שאחרי 1000 צירופים נישאר עם ככר אחת. הוא אינו מחשב את אחוזי הצירוף הנדרשים לשם כך, משום שבזמנו טרם ניתן היה לחשב זאת. כדי למצוא את אחוז הצירוף הנדרש, יש לפתור את המשוואה הבאה[65]: $\frac{1}{1000} = \left(1-\frac{X}{1000}\right)^{1000}$ שפתרונה

[61] וכן בגמרא המקבילה בירושלמי שקלים פרק ו הלכה ג, במדרש במדבר רבה פרשה יב אות ד ובשיר השירים רבה (על הפסוק עמודיו עשה כסף אות ג).

[62] כמובן שניתן להסביר שרש"י התכוון שבממוצע חסר ככר בכל צירוף, אך רש"י לא כתב כך במפורש.

[63] רש"י אמנם כותב שהכניסו 1000 ככר לכור 1000 פעמים ובכל פעם נחסר ככר, אך ברור שכוונתו שכל פעם נחסר רק 99.9% מככר או שמראש הכניסו 1001 ככרות זהב כדי שבסוף תישאר ככר אחת.

[64] רבי שמואל אליעזר הלוי איידלס 1555 – 1631.

[65] בימינו פותרים משוואה מהצורה $\frac{1}{1000} = \left(1-\frac{X}{1000}\right)^{1000}$ על ידי שימוש בלוגריתמים:

$$\ln\left(1-\frac{X}{1000}\right) = \frac{-\ln 1000}{1000} = -0.006907755$$ כך ש $$1-\frac{X}{1000} = 0.993116$$,

$X = 6.883952$. זאת אומרת שעל מנת שאחרי 1000 צירופים תישאר רק ככר אחת, הכור צריך לצרף 0.6884% בכל פעם. בצירוף הראשון יפחתו 6.884 ככרות ובצירוף האחרון יפחת 0.00693167 ככר. מככר הזהב שנשאר לאחר אלף הצירופים בנו את המנורה.

ומכאן $X = 1000 \cdot (1 - 0.993116) = 6.883952$

נתן סאה ונטל סאה

מקור נוסף בו מסתתר המספר e הוא במשנה בתרומות פרק ה משנה ז: "סאה תרומה שנפלה למאה, הגביהה ונפלה אחרת, הגביהה ונפלה אחרת הרי זו מותרת עד שתרבה תרומה על החולין". הסאה הראשונה של התרומה שנפלה למאה סאים של חולין מתבטלת מדין ביטול ברוב, אלא שצריך להוציא מתוך התערובת של 101 הסאים סאה אחת ולתת אותה לכהן. אם לאחר שהוציא סאה, נפלה סאה תרומה אחרת לתוך 100 הסאים של התערובת, גם התערובת החדשה נחשבת חולין אלא ששוב צריך לתת סאה אחת לכהן. המשנה אומרת שכל עוד יש בתערובת של 100 הסאים יותר חולין מאשר תרומה, כל התערובת נחשבת חולין. מפרשים רבים (הראב"ד, הרא"ש, הברטנורא[66]) פירשו שסאה תרומה שנפלה למאה סאים של חולין תהיה מותרת רק עד הפעם ה-51 שזה קורה, כי עד הפעם ה-51, גם אם בכל פעם שנתנו לכהן סאה וכל הסאה היתה חולין לגמרי, בטוח יש לי עדיין רוב חולין בתערובת. מפרשים אלו לא מחשבים את אחוז התרומה בתוך התערובת אלא הולכים למקרה הקיצוני שאפילו גרגר תבואה אחד של תרומה לא יצא מהתערובת.

אם נרצה לעשות חישוב מדויק ונניח שהתערובת מתערבבת היטב[67] נחשב כך: בהתחלה יש 100 סאים חולין. נפלה לתוכם סאה אחת תרומה. כעת בתערובת יש 101 סאים כאשר $\frac{100}{101}$ חלקים הם חולין ו- $\frac{1}{101}$ חלקים הם תרומה. מוציאים סאה מעורבבת המכילה $\frac{100}{101}$ חלקים חולין ו- $\frac{1}{101}$ חלקים תרומה ונותנים לכהן. כמות החולין שנשארה במאה הסאה הנותרים היא $\left(100-\frac{100}{101}\right)$ סאים וכמות התרומה במאה הסאה היא $\frac{100}{101}$ סאה. לאחר שפעם שנייה נופלת סאה תרומה למאה הסאים יש כעת $\left(1+\frac{100}{101}\right)$ תרומה ועוד $100\left(1-\frac{1}{101}\right)$ חולין בתערובת (וכל התערובת מכילה יחד 101 סאים). שוב נוציא סאה וניתן לכהן. הסאה שנוציא מורכבת מ- $\frac{\left(1+\frac{100}{101}\right)}{101}$ חלקים תרומה ועוד $\frac{100\left(1-\frac{1}{101}\right)}{101}$ חלקים חולין. לכן כמות הסאים של חולין שנשארו כעת היא

$$100\left(1-\frac{1}{101}\right)-\frac{100\left(1-\frac{1}{101}\right)}{101}=\left(1-\frac{1}{101}\right)\left(100-\frac{100}{101}\right)=$$

$$=100\left(1-\frac{1}{101}\right)\left(1-\frac{1}{101}\right)=100\left(1-\frac{1}{101}\right)^2$$

---

[66] גינצבורג במידות ומספרים בתלמוד מעיר שרבי עובדיה מברטנורא "לא אהב לטפל בחשבונות מסובכים, ביחוד במקרה שאפשרותו רחוקה כל כך".

[67] לח בלח כמו אמת מים הנכנסת לבור מים מתערבבים היטב. יבש ביבש כגון גרגירי תבואה מתערבבים קצת פחות אך עדיין יש ערבוב רב. וכן כתב הרדב"ז על הרמב"ם בהלכות תרומות, פרק יג הלכה ה.

מכאן רואים שכל "נתן סאה ונטל סאה" מקטין את כמות החולין בתערובת ביחס של $(1-\frac{1}{101})=\frac{100}{101}$. אם n פעמים קרה "נתן סאה ונטל סאה", כמות החולין שתישאר היא $100\left(1-\frac{1}{101}\right)^n$.

אחרי כמה פעמים ישארו 50 סאים חולין בלבד בתערובת והיא תהיה אסורה?

נפתור את המשוואה הבאה: $50 = 100\left(1-\frac{1}{101}\right)^n$ שפתרונה $n = \frac{\ln\frac{50}{100}}{\ln(1-\frac{1}{101})} = 69.66$.

לכן לפי חשבון מדויק יש לאסור את התערובת לאחר הפעם ה-70 של נפילת סאה תרומה.

הרמב"ם[68] מפרש שניתן לאכול מהחולין עד שנפילת תרומה לתערובת תחזור על עצמה 100 פעמים ועוד קצת. האיסור יתחיל בנפילה ה- 101. איך הגיע הרמב"ם למספר זה? הסבר אחד (שיטת הכסף משנה) הוא שמסתכלים כאילו כל 101 הנפילות (101 סאים של תרומה) נופלים בבת אחת יחד ומתערבבים עם 100 הסאים של החולין. לאחר מכן מחשבים כאילו מוציאים 101 סאים בבת אחת. בתערובת שנותרה יישארו $\frac{100}{201}$ אחוזים חולין שהם פחות מ- 50%. לכן האיסור יתחיל מנפילת הסאה בפעם ה- 101. הסבר נוסף (שיטת הרדב"ז) היא שבכל סאה שמוציאים מהתערובת מניחים כי היא מורכבת מכמות שווה של חולין ותרומה, ולכן לאחר 100 פעמים הוצאנו בסה"כ 50 סאה חולין. שתי שיטות אלו מפשטות את החישובים אך אינן עומדות לכאורה במבחן המציאות. גינצבורג[69] דן בשאלה זו ונשאר בצריך עיון.

רויכמן[70] מציע לתרץ שהרמב"ם דרש רוב ניכר של שני שלישים ולא רוב רגיל של קצת מעל חצי[71]. הוא מציין שלפי הסבר הכסף משנה ברמב"ם, מדאורייתא כל התרומה בטלה כי קמא קמא בטיל, אך מדרבנן המשנה מתירה כל עוד יש רוב חולין, והרמב"ם הבין שהמשנה אסרה רק כאשר יש רוב ניכר של תרומה. לא ברור מה הקשר בין דין זימון לענייני תרומה ומדוע דווקא בנושאים אלה נדרש רוב ניכר.

סביר להניח כמו שכתבנו, שהרמב"ם ידע כמו חכמי הגמרא שהביטוי $\frac{1}{e} \approx \left(1-\frac{1}{101}\right)^{101}$ ושווה חד חולק ואוף ציבחר (שליש ועוד קצת). הוא לא יכל לבצע את החישוב אך הניח נכון שהביטוי הנ"ל, כאשר החזקה שווה למכנה של השבר, מתכנס לקצת יותר משליש. הרמב"ם לא יכל לחשב במדויק מתי כמות התרומה עוברת את החצי, אך הוא ידע מתי היא תגיע לרמה של תרין חולקין פרא ציבחר (שני שליש פחות קצת). לענ"ד, מאחר ומדאורייתא התערובת מותרת ורק מדרבנן היא אסורה כפי שהסביר הכסף משנה, הרמב"ם פסק שיש ללכת לקולא כל עוד יש ספק ואיננו יודעים אם כמות התרומה עברה את החצי. רק לאחר 101 פעמים כבר אין ספק וכמות התרומה היא תרין חולקין

[68] הלכות תרומות פרק יג הלכה ה.

[69] גינצבורג, כתבים נבחרים שם, עמ' 140.

[70] רויכמן י' (2018), הרמב"ם על דימוע ועישורייתא דרבי והמספר e, **המעיין גליון 226**, תמוז תשע"ח, עמ' 13.

[71] כמו בדין זימון שנדרש רוב ניכר של אוכלי דגן. ברכות דף מח עמוד א.

פרא ציבחר. לכן האיסור נכנס לתוקף רק בפעם ה- 101 כפי שכתב הרמב״ם[72]. לפי הסברי זה, כנראה גם הרמב״ם יודה שהיום, עם הכלים המתמטיים החדשים, האיסור יכנס לתוקף מנפילת הסאה ה-70.

[72] הסבר זה מתרץ גם את ההלכה בשולחן ערוך, חלק יורה דעה סימן רא הלכה כד: "אבל אם יש בו (במקווה) מ' סאה ונפל לתוכו סאה אחת מאלו (מי פירות) ונטל מתוכן סאה אחרת, כשר אפילו עשה כן עד יט' פעמים". בנו של רבי עקיבא איגר (רע"א) הקשה שהיה צריך להתיר עד ל' פעמים (החשבון המדויק הוא כח' פעמים) לפני פסילת המקווה ולא יט' (שאלות ותשובות רע"א סימן רכא-רכב). לפי הסברי, מאחר וכאן האיסור הוא מדאורייתא, והשולחן ערוך (שו"ע) לא ידע לעשות את החישוב המדוייק, יש להחמיר ולהתיר רק יט' פעמים בלבד כי אז בטוח לא עברנו את החצי. אילו היה מדובר באיסור דרבנן אולי הוא היה מתיר כסברת הרמב"ם אפילו מ' פעמים. היום, כשיש בידינו כלים מתמטיים מתאימים, אולי השו"ע היה באמת מתיר עד כח' פעמים.

חישוב עישורייתא דבי רבי מספר רב של פעמים

חז״ל אמנם לא הגדירו את המספר $\frac{1}{e}$ במפורש, אך העריכו נכונה את גודלו וחלק מהתכונות שלו. חשיבתם המתקדמת מאוד מפתיעה לאור הידיעות המתמטיות בעולם באותה תקופה. נבחן כעת את ההנחות של חז״ל, תקפותם המתמטית והשפעתם על הלכות שונות.

בחישובים של ״עישורייתא דבי רבי״, חכמי התלמוד הניחו את ההנחות הבאות:

א. לכל n הגדול מ-5, הביטוי $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ שווה למספר שליש ועוד קצת.

ב. כאשר אנשים נוטלים חלק של משהו לפי כללי עישורייתא דבי רבי, כל אדם נוטל פחות מהאדם שנטל לפניו. זאת אומרת שלכל n,k נתונים, שלמים וחיוביים, האיברים[73] בסדרה $\frac{1}{n-1}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^k$ קטנים והולכים ככל ש-k גדל, והם מתקרבים לאפס. כלומר[74] מתקיים $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k+1} > \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$.

אנחנו יודעים שחז״ל הסיקו את הנחה ב׳ כי בסוף סוגיית עישורייתא דבי רבי בכתובות (סח עמוד א – סח עמוד ב) הגמרא אומרת ״וחוזרות וחולקות בשווה״. ומסבירה הגמרא, ״אם באו כולם להנשא כאחת, חולקות בשווה״ כי אם הן באות יחד, אין סיבה שהראשונה תקבל יותר מהשניה. רש״י על אתר אף מפרט את החישוב לשלושת הבנות הראשונות: ״אם היו מאה מנה, האחת נוטלת עשר מנים, והשניה תשע, והשלישית שמונה מנה ועישור של מנה וכן כולם״. הדבר גם הגיוני כי אם לוקחים חלק קבוע (עשירית או אחד משישים וכד׳) מגודל מסויים, תישאר כמות קטנה יותר כל פעם, ואם ניקח שוב חלק קבוע ממה שנשאר, החלק שניקח יקטן ויקטן[75].

שתי הנחות אלו הן נכונות מתמטית ומדהים שחז״ל הגיעו למסקנות אלו למרות שלא היו בידם כלים מתמטיים מתקדמים לביצוע החישובים בפועל, גם כאשר n,k גדולים.

---

[73] כל איבר בסדרה הוא החלק שנוטל אדם k מתוך הסכום הראשוני, כאשר כל אדם מקבל $\frac{1}{n}$ ממה שנשאר.

[74] האדם ה- k+1 יקבל פחות מהאדם ה- k.

[75] בסוגיית פסיעה גסה כותבי בעלי התוספות את ההנחה הזאת בפירוש: "דהפסיעה ראשונה נוטל אחת מחמש מאות והפסיעה שניה נוטל פחות מן הראשונה ששניה אינה נוטלת אלא אחד מחמש מאות הנשארים".

מה קורה לפי חז״ל כאשר מבצעים חישוב לפי כללי ״עישורייתא דבי רבי״ אבל הרבה יותר פעמים מאשר בדוגמאות המופיעות בגמרא? כמה ירושה נשארת לבנים כאשר יש 30 בנות במשפחה וכל אחת צריכה לקבל עשירית מהנכסים? כיצד ישתנה מצבו של חולה שמבקרים אותו מאות מבקרים? מה יקרה לראייה של אדם שפסע 20,000 פסיעות גסות? ברור הוא שחז״ל הניחו שתמיד ישאר חלק משמעותי בירושה לבנים, תמיד ישאר חלק משמעותי מהמחלה לחולה, תמיד ישאר חלק משמעותי מהראיה למי שפוסע פסיעות גסות או אוכל ירקות, ותמיד ישאר חלק משמעותי מהזהב כשצורפים אותו בכור. כמה בדיוק ישאר לא נאמר באף סוגיה, אך ברור שתמיד ישאר חלק משמעותי שהוא לא קרוב לאפס. זה הפשט בכל הסוגיות הנ״ל וכן מופיע בפירוש בסוגיות מנורת המקדש ובתוספות על סוגיית פסיעה גסה.

הגמרא במנחות דף כט עמוד א והסוגיות המקבילות בירושלמי ובמדרש רבה מתייחסים לשאלה זו. בסוגיה במנחות[76], לאחר תיאור הכנת המנורות ״דאמר רבי יהודה אמר רב: עשר מנורות עשה שלמה וכל אחת ואחת הביא לה אלף ככר זהב והכניסוהו אלף פעמים לכור והעמידוהו על ככר״, ממשיכה הגמרא ומקשה: ״ומי חסר[77] כולי האי? והתניא ר׳ יוסי בר׳ יהודה אומר, מעשה והיתה מנורת בית המקדש יתירה על של משה בדינר זהב קורדיקיני והכניסוה פ׳ פעמים לכור והעמידוה על ככר. **כיון דקאי קאי**[78].״ הגמרא מתרצת שלאחר 1000 צירופים בכור הכמות מתייצבת ואם נצרף עוד 80 פעמים בכור, כמות הזהב תפחת בכמות זניחה[79], ובלשון רש״י: ״כיון דקאי שנשרף יפה בימי שלמה, קאי, לפיכך לא חסר עכשיו אלא דינר״. בירושלמי[80] נאמר אפילו יותר בנחרצות ״והכניסוה לכור שמונים פעם **ולא חסרה כלום**״. גם בעלי התוספות על מסכת יומא דף מד עמוד א כותבים ״מפרש בירושלמי כשצורפים אותו **אינו נחסר כלום**״. בהמשך הגמרות בירושלמי מוסבר שכל עוד היו סיגים בזהב והוא לא נצרף כל צרכו, הזהב היה מתמעט, אבל מהרגע שהזהב נצרף כל צרכו והפך לזהב טהור, אין הוא מתמעט יותר כלל[81].

כפי שראינו, רש״י מסביר שבכל צירוף כמות הזהב ירדה בככר[82] והמהרש״א מסביר שכמות הזהב התמעטה כמו בעישורייתא דבי רבי, ולכן, לפי שניהם לאחר 1000 צירופים קיבלנו זהב טהור בכמות של ככר אחת. הגמרא מקשה על ההבנה הזאת (בין אם ההבנה ברש״י שכל פעם פוחתת ככר ובין אם ההבנה של המהרש״א שבכל צירוף בכור נפחת 0.6884%) שהרי היה מקרה שהיה צריך להפחית מהמנורה שמשקלה ככר אחת כמות קטנה מאוד והיה צריך לשם כך 80 צירופים בכור.

[76] וכן בבמדבר רבה פרשה יב אות ד, שיר השירים רבה על הפסוק עמודיו עשה כסף אות ג.
[77] גרסת הערוך: חסוך. גרסת רש"י בתענית יא עמוד א ד"ה חסוכי בנים: חסיכי
[78] פירוש: כיון שעמד, עמד.
[79] בככר של קודש יש 120 מנה. בכל מנה יש 100 דינרים. בכל דינר יש 24 דינרים קודיקיניים. לכן בככר של קודש יש 288,000 דינרים קורדיקיניים. 80 הצירופים הנוספים הפחיתו פחות מ- 0.00000347 ככרות.
[80] שקלים פרק ו הלכה ג, יומא פרק ד הלכה ד. וכן בשמות רבה פרשה לה א.
[81] קרבן העדה מסביר את הירושלמי קצת אחרת כדי שיתאים לבבלי שגם בצירופים האחרונים הזהב היה מתמעט אך מעט מאוד.
[82] בממוצע כנראה, אחרת המשך הגמרא המספרת על 80 צירופים נוספים, כלל לא מובן.

לשיטת רש״י אין בכלל אפשרות לצרף את הככר של המנורה יותר מפעם אחת נוספת כי אחרי פעם נוספת כל הככר תעלם בכור. לשיטת המהרש״א, עוד 80 צירופים יפחיתו את משקל המנורה ב-42.5%, כמות הגדולה פי 122,273 מהנדרש להפחתה[83].

התירוץ של הגמרא ״כיון דקאי קאי״ אומר שהמנורה של שלמה היתה עשויה מזהב כל כך טהור שהצירופים בכור כבר לא הפחיתו ממנה זהב אלא במידה קטנה מאוד מאוד[84]. מכאן רואים כי חכמי התלמוד הניחו כי הכמות הנותרת לאחר הפחתה בשיטת עישורייתא דבי רבי תישאר כמות ניכרת (כנראה שליש ועוד קצת) גם אם נבצע את החישוב הרבה מאוד פעמים[85]. כל המקורות בנושא עשיית המנורה מסכימים שיש גבול תחתון לכמות הזהב שתישאר לנו. הביטוי $\left(1-\frac{7}{1000}\right)^{n}$ מגיע לגבול התחתון לאחר n פעמים (במקרה שלנו n=1000), ושלאחריו אין שינוי יותר בכמות הזהב, וכמות זו אינה 0 אלא 1. זה כמו להגיד שמתקיימים $1000\cdot\left(\frac{993}{1000}\right)^{\mathbf{1000}}=1$ וגם $1000\cdot\left(\frac{993}{1000}\right)^{\mathbf{1080}}=1$ כי שמונים הצירופים הנוספים לא עשו שום שינוי בכמות הזהב. מכאן שחז״ל חשבו כי לאחר מספר מסוים של צירופים בכור, או מספר מסוים של תהליכים כעישורייתא דבי רבי, מגיעים למצב בו אין יותר הפחתות כלל או רק הפחתות מזעריות. היום ברור לנו כי חישוב זה אינו נכון, וצריך עיון גדול.

מתוך הבנות חכמי התלמוד שתהליך עישורייתא דבי רבי מתכנס לערך הגדול משמעותית מאפס, שהביטוי $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$ שווה לשליש ועוד קצת (הנחה א׳), ושלכל n,k נתונים, שלמים וחיוביים,

---

[83] $1-\left(1-\frac{6.883952}{1000}\right)^{80}=1-0.57544=0.42456=42.456\%$

[84] כמובן שניתן לתרץ שהנתונים מוגזמים למעלה או למטה באחד או יותר מהנתונים, אך מתירוץ הגמרא "כיון דקאי קאי" לא משמע כך ובכל מקרה מצביע על אופן חשיבת הגמרא. הנתונים שאולי מוגזמים למעלה הם כמות הצירופים הנדרש ליצירת ככר הזהב הטהורה של כל מנורה (1000) או כמות הצירופים הנדרש להפחתת הדינר העודף (80). הנתונים שאולי מוגזמים למטה הם כמות ככרות הזהב המקורית ליצירת כל מנורה (1000) או כמות הזהב העודף בסיפורו של ר' יוסי בר' יהודה (דינר קורדיקיני).

[85] תירוץ זה לכאורה אינו מסתדר מתמטית לפי החישוב של עישורייתא דרבי כי אם אחרי 80 צירופים בכור פוחתים רק 1/288,000 מהכמות, אז היה נדרש לצרף 1000 ככרות מעל 150,000,000 פעמים כדי להישאר עם ככר אחת. אם 80 צירופים מפחיתים את כמות הזהב ב- 1/288000 בלבד, אז ההפחתה בככרות של כל צירוף הוא $1-\left(1-\frac{X}{1000}\right)^{80}=\frac{1}{288000}\Rightarrow X=0.0000434$ שהם 0.00000434% בכל צירוף. כדי להפחית 99.9% מאלף הככרות, צריך לבצע את החישוב הבא: $\left(1-\frac{0.0000434}{1000}\right)^{n}=0.001\Rightarrow n=159{,}164{,}865$.
גם ניסיון להתאים בין שתי המימרות בגמרא בכך שלזהב המופק במחצבות יש הרבה סיגים באחוזים גבוהים, ורק הסיגים נצרפים בכור בקצב מהיר ואילו הזהב כמעט ואינו נעלם, אפשרי מתמטית אך אינו עומד במבחן המציאות. במציאות הזהב עצמו לא נחסר בכור כלל מלבד כמות זעומה בלבד. במחצבת זהב ממוצעת ניתן להפיק בערך 1 גרם זהב מכל 1000 ק"ג עפרה (https://he.wikipedia.org/wiki/זהב#הפקה, ונתוני World Gold Council (WGC) באתר gold.org (2020)). אם נניח שככרות הזהב של שלמה היו כבר בריכוז של פי 1000 מהעפרה הגולמית (הנחה לא סבירה כי גם בימי קדם ידעו לזקק זהב בצורה טובה ולא היו קוראים ככר זהב לככר המכילה רק 0.1% זהב. ראה שם בויקיפדיה וב WGC), אז בכל 1000 ככרות היתה כמות של ככר זהב טהורה אחת. אם הכור מצרף את הסיגים באחוזים גבוהים, אך את הזהב הוא מצרף רק באחוז קטן מאוד (כ-0.00434%) בכל פעם, שתי המימרות מתקיימות. לדוגמא: אם הכור מצרף סיגים 20% בכל פעם, ואת הזהב הטהור 0.00434% בכל פעם, אז לאחר 1000 צירופים של 1000 ככרות שריכוז הזהב בהם היה 0.1%, נקבל ככר אחת של זהב כמעט טהור לגמרי:

$$999\cdot\left(1-\frac{200}{1000}\right)^{1000}+1\cdot\left(1-\frac{0.00434}{1000}\right)^{1000}\sim 0+1=1$$

ואכן, אם נבצע עוד 80 צירופים, נקבל הפחתה קטנה מאוד של דינר קורדיקיני בלבד.

האיברים בסדרה $\frac{1}{n-1}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^k$ הולכים וקטנים ככל ש-k גדל (הנחה ב׳), נקבל את המסקנה הבאה (להלן הנחה ג׳): גם הביטוי $\left(1-\frac{1}{n}\right)^m$ כאשר $n < m$ יתכנס לערך שאינו אפס ויהיה שווה או קרוב לשליש ועוד קצת. הבעיה היא שהנחה ג׳ זו אינה נכונה וכל הסוגיות בהם מבוצע חישוב כעישורייתא דבי רבי מושפעות ממנה.

לפי חישוב זה במשפחה בה יש 30 בנות וכל אחת מקבלת עשירית מהנכסים, עדיין לבנים ישאר שליש ועוד קצת. גם לאדם שפסע 20,000 פסיעות גסות, ואיבד אחד מחמש מאות ממאור עיניו בכל פסיעה, ישאר שליש ועוד קצת מהראייה.

לעומת הנחות א+ב שלעיל שהן מדויקות, הנחה ג׳, למרות היותה הגיונית, היא מוטעית. חז״ל לא הוכיחו את נכונות ההנחות א׳+ב׳ אלא הסיקו את נכונותם מתוך ניסיונות חישוב במספרים קטנים ומתוך כך שהנחות אלו הגיוניות. את הנחה א׳ הם בדקו בעזרת חישוב הנוסחה למספרים שונים עד 12 לפחות[86] והסיקו שהדבר ישאר נכון למספרים גדולים יותר. לא היתה בידם האפשרות לבדוק את נכונות הנוסחה למספרים גדולים יותר בכלים שהיו בזמנם[87]. הנחה ב׳ היא פשוטה והגיונית כי הכפלת מספר במספר הקטן מאחד תתן תוצאה הקטנה מהמספר. הנחה ג׳ עשויה לנבוע מהנחות א׳ ו- ב׳ במקרים מסוימים, כי אם סדרה של מספרים מתכנסת למספר מסוים, ולאחר מכן ממשיכים להוסיף לתוצאה מספרים שקטנים והולכים, המספרים הנוספים יהיו זניחים ולא ישנו לכאורה את התוצאה. אולם הנחה ג׳ אינה נכונה תמיד, ובפרט לא בחישובים כעישורייתא דבי רבי.

המתמטיקה המודרנית הוכיחה את נכונות הנחות א׳ ו- ב׳, אך גם הוכיחה כי הנחה ג׳ מוטעית בחישובים כעישורייתא דבי רבי. חז״ל העריכו נכונה שהביטוי $(1-\frac{1}{n})^n$ שווה לשליש ועוד קצת גם עבור n-ים גדולים. כמו כן הם הבינו שכל איבר נוסף בטור קטן מחברו (לדוגמה, בת מספר 4 תקבל פחות ירושה מבת מספר 3 ובת מספר 11 תקבל פחות ירושה מבת מספר 10), אך הם לכאורה לא העריכו נכונה את השפעה של הרבה איברים נוספים. אם נחשב מספיק איברים נוספים, התוצאה תשתנה באופן משמעותי. השפעת איבר נוסף אחד או שניים עשויים לא להשפיע הרבה, אך הוספת איברים רבים נוספים תשנה לגמרי את התוצאה. כאשר $n < m$ אזי הביטוי $\left(1-\frac{1}{n}\right)^m$ ישאף למספר הקטן מ- $\frac{1}{e}$. לדוגמה, אם m=a·n אז $\frac{1}{e^a} = \left(\frac{1}{e}\right)^a = \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^a = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an}$. כאשר $m=2\cdot n$ הביטוי $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}$ ישאף אל $\frac{1}{e^2}$ ולא אל $\frac{1}{e}$, וכאשר $m=3\cdot n$ ישאף הביטוי בקירוב אל $\frac{1}{e^3}$. לדוגמה, כאשר יש 30 בנות במשפחה[88], תישאר לבנים ירושה של $\frac{1}{e^3}$ (פחות מ-5%) שהיא קטנה בהרבה משליש ועוד קצת ($\frac{1}{e} \approx 37\%$). אם מתקנים את החישובים בסוגיות בהן חישבנו לפי עישורייתא דבי רבי, ההלכות השונות עשויות להשתנות!

---

[86] ראה הערה 12.

[87] ראה הערה 53.

[88] כמו לשופט אבצן, שופטים יב ט: "וַיְהִי לוֹ שְׁלֹשִׁים בָּנִים וּשְׁלֹשִׁים בָּנוֹת".

חישוב מסלול חדש

הסוגיות השונות בתלמוד בהם חז״ל השתמשו בחישובים אלו, נדרשות כעת לעיון מחודש. בסוגיית עישורייתא דבי רבי בכתובות דף סח ובתלמוד הירושלמי כתובות פרק ו הלכה ו, רבי אומר שכל בת מקבלת עשירית מהנכסים גם אם יש יותר מעשר בנות. הגמרא מניחה שלבנים נשארת ירושה סבירה[89] גם אם יהיו בנות רבות כי החלק מהירושה אותו מקבלות הבנות ימשיך להתכנס לגבול העליון $\left(1-\frac{1}{e}\right)$ שהוא ״תרין חולקין פרא ציבחר״ ולבנים תמיד ישאר כ- $\frac{1}{e}$ (״חד חולק ואוף ציבחר״). לכן הגמרא עוצרת כאן ולא ממשיכה להקשות על סברת רבי. חז״ל לא יכלו לחשב את חלק הבנות כאשר יש הרבה יותר מעשר בנות כי זה דרש חישוב בכלים שלא היו בזמנם[90].

אילו חז״ל היו מחשבים את חלק הבנות גם במקרים בהם יש הרבה יותר בנות, הם היו רואים שיש מקרים שלבנים נשארת כמות זניחה ביותר. לדוגמה, אם מספר הבנות הוא 20 רואים כי לבנים נשאר בקירוב רק $\frac{1}{e^2}$ (13.5%) ולא $\frac{1}{e}$ (36.8%), וכאשר מספר הבנות הוא 30 לבנים ישאר בקירוב רק $\frac{1}{e^3}$ (4.98%). חז״ל היו צריכים להמשיך ולהקשות על רבי מהמקרים הבאים המופיעים בתנ״ך:

א. לשופט אבצן מבית לחם היו שלושים בנים ושלושים בנות. לפי תירוץ הגמרא שכל בת מקבלת עישור נכסים ממה שנשאר, הבנות של אבצן היו מקבלות95.76% מהירושה (3.192%[91] מהירושה כל אחת) ואילו הבנים היו מקבלים רק 4.24% מהירושה (0.1413%[92] בלבד כל אחד). זאת אומרת שכל בת מקבלת פי 22 מכל בן!
ב. אצל המלך רחבעם, שהיו לו 60 בנות ו- 28 בנים[93], המצב אף חמור יותר. הבנות של רחבעם היו מקבלות99.82% מהירושה, (1.663%[94] לכל בת) ואילו הבנים היו מקבלים רק 0.18% (0.00642%[95] בלבד כל אחד). כל בת מקבלת פי 259 מכל בן[96]!

---

89 הגמרא (הן בבבלי והן בירושלמי) מניחה שהבנים מקבלים ירושה לא זניחה. בגמרא מקשים על ההוא אמינא שכל בת מקבלת עשירית מכל הנכסים ממקרה של בן אחד ועשר בנות, "אמרו לו לרבי: לדבריך מי שיש לו עשר בנות ובן אין לו לבן במקום בנות כלום?", משמע שלא יתכן שהבן לא יקבל כלום או הרבה פחות מחלקה של כל בת. השלטי גיבורים על הרי"ף מביא מחלוקת ראשונים אם נותנים לבת לפי האומדנא של האב, גם במקרה שהיא תקבל הרבה יותר מהבן ואפילו אם הבן לא יקבל כלום.

90 ללא שימוש בלוגריתמים, בנקודה עשרונית או בספרה 0 החישוב מסובך ודורש שימוש במספרים גדולים מאוד ומורכבים. למשל, החלק של הבת השישית הוא $\frac{59049}{1000000}=\frac{9}{10}\cdot\frac{6561}{100000}$. בספרות רומיות החישוב נראה כך $\frac{\overline{DIX}XLIX}{\overline{M}}=\frac{IX}{X}\cdot\frac{\overline{V}MDLXI}{\overline{C}}$.

91 $\frac{\left(1-\left(1-\frac{1}{10}\right)^{30}\right)}{30}=0.03192$, $1-\left(1-\frac{1}{10}\right)^{30}=0.9576$

92 $\frac{\left(\left(1-\frac{1}{10}\right)^{30}\right)}{30}=0.001413$, $\left(1-\frac{1}{10}\right)^{30}=0.0424$

93 דברי הימים ב יא כא: "וַיּוֹלֶד עֶשְׂרִים וּשְׁמוֹנָה בָּנִים וְשִׁשִּׁים בָּנוֹת".

94 $\frac{\left(1-\left(1-\frac{1}{10}\right)^{60}\right)}{60}=0.016637$

95 $\frac{\left(\left(1-\frac{1}{10}\right)^{60}\right)}{28}=0.0000642$

96 לבנו של רחבעם שמלך אחריו, אביה (אבים), היו 16 בנות ו- 22 בנים (דברי הימים ב יג כא: "וַיּוֹלֶד עֶשְׂרִים וּשְׁנַיִם בָּנִים וְשֵׁשׁ עֶשְׂרֵה בָּנוֹת"). לפי חישוב עישורייתא דבי רבי, הבנות של אביה היו מקבלות 81% מהירושה (5.092% כל אחת) ואילו הבנים היו מקבלים פחות מ-19% מהירושה (0.842% בלבד לכל בן). כל בת מקבלת

מאחר והגמרא לא שאלה על מקרים כאלו על אף נדירותם, ניתן להניח שהחישוב לא נעשה וצריך עיון מה יהיה הדין כעת שכן ניתן לבצע חישוב מדויק.

גם בגמרא בנדרים דף לט עמוד ב הדנה במצוות ביקור חולים חז״ל לכאורה לא ביצעו בפועל את החישוב במספרים גבוהים. סיבה אחת להנחה זו היא שהגמרא לא מביאה את התוצאה הסופית של חלק המחלה שישאר אצל החולה לאחר שישים מבקרים. סיבה שנייה היא הקושי הרב לבצע את החישוב[97]. סיבה שלישית להניח זאת היא שאילו חז״ל ידעו לחשב במדויק כמה מהמחלה נשארת לחולה לאחר מספר רב של מבקרים, הם היו צריכים להקשות ״אם כן, ליעלון מאתן ארבע וארבעין ולוקמוה״, כי אם יבקרו את החולה 244 מבקרים בני גילו[98], ישאר לחולה פחות מאחד חלקי ששים ממחלתו המקורית, וכמות כזו כבר לא מסוכנת[99] והחולה נחשב כבריא.

כדי למצוא את מספר המבקרים הנדרש על מנת להפחית את מחלת החולה לאחד משישים ממה שיש לו כעת, יש לפתור את המשוואה הבאה: $\left(1-\frac{1}{60}\right)^n \le \frac{1}{60}$ שפתרונה $n \ge \frac{-\ln 60}{\ln\left(1-\frac{1}{60}\right)} = 243.6$.
משוואה זו לא היתה פתירה בזמן התלמוד.

על הגמרא[100] האומרת: ״פסיעה גסה נוטלת אחד מחמש מאות ממאור עיניו של אדם״ וחידוש בעלי התוספות שהחישוב נעשה ״כמו בעישורייתא דבי רבי (כתובות דף סח.), ר״ל העישור ממה שנשאר״, יש קושיה חזקה מאוד כאשר עושים את החישוב המדויק. תוספות מניחים שכאשר הולכים לפי עישורייתא דרבי, תמיד תישאר לאדם שארית ראייה משמעותית כפי שקורה במציאות. אולם, לפי החישוב המדויק, אדם הרץ ריצת מרתון בה הוא פוסע מעל 60 אלף פסיעות גסות, היה צריך לצאת עיוור ב99.99% (בחישוב מדויק מדובר על 52 תשיעיות רצופות אחרי הנקודה העשרונית ואחריהם $2.3324 \cdot 10^{-53}$). בעלי התוספות היו צריכים לשאול: אם כן בשש רבבות ״פסיעות גסות יהיה ניטל כל מאור עיניו של אדם והא קא חזינן דלאו הכי הוה״, כמו שהם כתבו בתחילת פירושם. הקושיה במקרה של פסיעות גסות קשה במיוחד מאחר והפעולה נפוצה ורוב העולם מבצע פסיעות גסות באופן תדיר ללא השפעה ניכרת על הראייה[101]. גם לפי התירוץ שפסיעה ראשונה לבדה פוגעת ולא הפסיעות שאחריה, עדיין ניתן להגיע למאות ואלפי פסיעות ראשונות (ראשונה של כל יום או

פי 6 מכל בן. אילו לאחת מאחיותיו של אביה היה רק ילד אחד שירש אותה, אותו ילד היה מקבל בירושה של רחבעם פי 1566 מאסא בן אביה מלך יהודה.

97 ראה הערה 53.

98 יצחק יהודה רוזן ביצע את החישוב במאמרו "כל המבקר את החולה נוטל אחד מס' בחוליו", הגיון תשנ"ו, כרך ג' עמוד 161.

99 שהרי מצווה לבקר חולה ולקחת אחד משישים מחוליו ואין להסתכן בכך הרבה, כך שאחד משישים מהמחלה אינו נחשב מסוכן כל כך. וכן פסקו הטור והשולחן ערוך ביורה דעה סימן שלה.

100 תענית י עמוד ב, ברכות מג עמוד ב ושבת קיג עמוד ב

101 להבדיל מהמקרים הקודמים של משפחות עם יותר מעשר בנות או מחולה שבאים לבקר אותו מבקרים רבים בני גילו ומזלו, שהם נדירים יותר.

של כל שבוע[102] שהיו פוגעות במאור העיניים ומשאירות פחות מ-$\frac{1}{e^3}$ או $\frac{1}{e^4}$ במהלך החיים, וצריך עיון[103].

קושיה חזקה זו ניתן להקשות גם על הגמרא[104] האומרת: "שלושה דברים מרבים את הזבל וכופפין את הקומה ונוטלין אחד מחמש מאות ממאור עיניו של אדם ואלו הן: פת קיבר ושכר חדש וירק (חי)". גם אם נגיד ששלושת הדברים האלו נוטלים אחד מחמש מאות ממאור העיניים לפי חשבון של עישורייתא דבי רבי, עדיין עלולים להגיע במהירות למצב של כמעט עיוורון מוחלט אם אוכלים פת קיבר, שכר חדש או ירקות כמה פעמים בשבוע[105].

התייחסות למספרים ולחישובים

ניסיון לתרץ קושיות אלה על ידי שנאמר שהמספרים והחישובים שנקטה הגמרא הם לאו דווקא אלא רק קובעים עקרונות ואין לדייק בהם יותר מדי, הוא ניסיון פסול לענ"ד. דבר ראשון, המספרים בעישורייתא דבי רבי (נתינת נדוניא לבנות) נפסקו להלכה יחד עם אופן החישוב. דבר שני, המספרים שנתנו חז"ל הם מדוייקים ורק מספרים מיוחדים משמשים לגוזמא. לדוגמה, המשנה בכתובות פרק יב משנה ד אומרת: "גובה כתובתה עד עשרים וחמש שנים" ובגמרא על המשנה (כתובות דף קד עמוד א): "אמר ליה אביי לרב יוסף: אתאי קודם שקיעת החמה גובה כתובתה לאחר שקיעת החמה לא גביא, בההיא פורתא אחילתא? אמר ליה אין, **כל מדת חכמים כן היא**. בארבעים סאה טובל בארבעים סאה חסר קורטוב אינו יכול לטבול בהן". גם הדיון על המשנה בבבא בתרא פרק ב משנה ו "ניפול הנמצא בתוך חמישים אמה, הרי הוא של בעל השובך. חוץ מחמישים אמה, הרי הוא של מוצאו", וקושיית רבי ירמיה עליה "בעי ר' ירמיה רגלו אחת בתוך נ' אמה ורגלו אחת חוץ מחמשים אמה מהו ועל דא אפקוהו לרבי ירמיה מבי מדרשא" (בבא בתרא דף כג עמוד ב), מראה את הדיוק שייחסו חכמים למספרים.

אם נאמר שאין להתייחס במדויק רק למספרים שחז"ל לא יכלו לחשב במדויק כגון יתרת מחלת חולה לאחר הרבה מבקרים או הפגיעה בראייה לאחר הרבה פסיעות גסות, וממספרים אלו ניתן ללמוד רק עקרונות, גם כן יצא שכרנו בהפסדנו. סיבה אחת היא שאין זה משנה הרבה לחישוב אם

---

[102] לא מדובר רק על פסיעות בשבת כדמוכח בגמרא שבת קיג עמוד ב: כדבעא מיניה ר' מר' ישמעאל בר' יוסי, מהו לפסוע פסיעה גסה בשבת? אמר לו (א"ל) וכי בחול מי הותרה שאני אומר פסיעה גסה נוטלת אחד מחמש מאות ממאור עיניו של אדם. בשבת יש איסור נוסף של "מעשות דרכיך" (משנה ברורה אורח חיים סימן שא סעיף קטן א).

[103] היה ניתן אולי לתרץ שההשפעה הרעה של הפסיעה הגסה על הראייה היא לא פיזית אלא במישור הרוחני ואז קשה יותר להסיק מסקנות מתמטיות. הגמרא בברכות מג עמוד א מביאה שמונה דברים שהם גנאי לתלמיד חכם ובתוכם פסיעת פסיעה גסה. הגמרא מסבירה בשבעת המקרים האחרים את הגנאי בהסבר שאינו פיזי, לכן אולי ההסבר בנטילת מאור העיניים גם אינו פיזי. הרמב"ם (הלכות דעות פרק ה' הלכה ח') כתב את האיסור של פסיעה גסה רק ביחס לתלמיד חכם ברשות הרבים, משום שזה כמנהג המשוגעים, כך שאולי הוא סובר שאין כאן השפעה פיזית. לעומת זאת, רוב הפוסקים התייחסו לנטילת מאור העיניים כדבר פיזי לחלוטין כמו בתוספות כאן, וראה הגהות הרמ"א על שו"ע אורח חיים (או"ח) סימן רעא סעיף י וסימן שא סעיף א, ובמשנה ברורה שם. והאריך להסביר תופעה זו הרב קוק בעין איה ברכות ו נט. הרב פרופ' אברהם שטיינברג, במאמרו "העיוור בהשקפת היהדות", תחומין חלק ג', עמ' 194 הערה 81, כותב "מענינת הקביעה המדעית שהגדלת המהירות הזויתית בין המשקיף לבין העצם הנשקף, גורמת לירידה בחדות הראיה (ראה: Sun Ophth 7:83, 1962) דבר המסביר את השקפת חז"ל בנידון".

[104] עירובין נה עמוד ב ופסחים מב עמוד א.

[105] בגמרות אלו משמע לכולי עלמא שמדובר בתופעה פיזית לחלוטין.

המבקר חולה נוטל אחד משישים[106] או אחד משמונים מחוליו, עדיין נשארת הקושיא מדוע חולה לא מבריא אחרי הרבה מבקרים[107]. כמו כן, גם אם פסיעה גסה נוטלת אחד מארבע מאות או אחד מאלף ממאור העיניים, עדיין רץ מרתון היה צריך להתעוור.

בנוסף, רואים שהגמרא בוחרת מספרים שונים לכל מקרה. המספר אחד מחמש מאות הוא נדיר ומופיע רק לגבי מאור עיניים ומרחק בין רקיע לרקיע[108] אם הנזק לראיה בפסיעה גסה הוא לאו דווקא אחד מחמש מאות אלא רק לומר שיש נזק כלשהו, למה דווקא אחד מחמש מאות ולא אחד משלוש מאות או אחד מארבע מאות, שהם מספרים שחז״ל השתמשו בהם לצורך הגזמה[109]? מה מיוחד במספר חמש מאות[110]?

המספר אחד משישים מופיע בהרבה מקומות ורומז לכמות הקטנה ביותר שעדיין נחשבת ואינה מתבטלת. לדוגמה[111], ברכות נז עמוד ב: ״חמשה אחד מששים, אלו הן: אש דבש ושבת ושינה וחלום. אש אחד מששים לגיהנם, דבש אחד מששים למן, שבת אחד מששים לעולם הבא, שינה אחד מששים למיתה, חלום אחד מששים לנבואה״. גם בביקור חולים המבקר נוטל מהחולה את הכמות הקטנה ביותר של המחלה שעדיין משפיעה, מבלי לגרום למבקר להיות חולה בעצמו.

לכן נראה לענ״ד שהמספרים שחז״ל פסקו הם מספרים מדויקים והם לא עקרונות בלבד או רק סדרי גודל. מכאן שניתן לדרוש בהם ולהקשות עליהם.

---

[106] בביקור חולים יש למספר 60 מקור מעניין. בספר 'קול אליהו להגר"א' מובא בשם הגאון מוילנא שבפרשת ויחי נאמר "<u>וַיַּגֵּד</u> לְיַעֲקֹב ... הִנֵּה בִּנְךָ יוֹסֵף בָּא אֵלֶיךָ וַיִּתְחַזֵּק יִשְׂרָאֵל <u>וַיֵּשֶׁב</u> עַל הַמִּטָּה". מתחילה היה יעקב חולה 60 חלקים ("הנה" בגימטריה 60) ולאחר שבא יוסף נשאר לו רק 59 חלקים מהמחלה ("המטה" בגימטריה 59). מכאן שיוסף נטל מיעקב אחד משישים מחוליו.

[107] במקרה שמבקר נוטל רק אחד משמונים מהמחלה, נצטרך אמנם 349 מבקרים כדי שלחולה ישאר פחות מאחד משמונים מהמחלה המקורית, אך הקושיא נשארת.

[108] פסחים צד עמוד ב וחגיגה יג עמוד א, ירושלמי ברכות פרק א הלכה א.

[109] לגבי המספר 300 ראה שקלים פרק ח הלכה ב, חולין דף צ עמוד ב, תמיד כט עמוד א, ערוך ערך גוזמא, רשב"ם פסחים קיט עמוד א ד"ה משוי שלוש מאות ועוד. לגבי המספר 400 ראה בברכות לא עמוד א "אייתי כסא דמוקרא בת ת' זוזי", ברכות ה עמוד ב, ברכות נא עמוד ב, שבת לא עמוד א, פסחים סב עמוד ב, מגילה ג עמוד א, בבא קמא פב עמוד ב, מנחות סד עמוד א "ונזדעזע ארץ ישראל ת' מאה פרסה", פסחים צד עמוד א, תענית י עמוד א, עבודה זרה יז עמוד ב, חולין נט עמוד ב, יומא סט עמוד ב, גיטין סח עמוד ב, כתובות קיא עמוד א, קידושין מ עמוד א, סנהדרין צה עמוד ב ועוד.

[110] המגן אברהם על שו"ע או"ח סימן רעא סעיף י, מביא בשם המהרי"ל שדווקא ניטל אחד מחמש מאות ממאור העיניים, כי בשבת מדליקים שני נרות, ונר בגימטריה 250, ושני נרות זה 500, והסתכלות בנרות מבטלת את הפסד הראיה מהפסיעה הגסה. לא מצאתי הסבר רציונלי יותר.

[111] מקומות נוספים הם בברכות מ עמוד א: קצח אחד מששים סמני מוות, פסחים צד עמוד א: מצרים אחד מששים בכוש וכוש אחד מששים בעולם ועולם אחד מששים בגן וגן אחד מששים בעדן ועדן אחד מששים בגיהנם, נמצא כל העולם כולו ככיסוי קדירה לגיהנם, וחולין קלז עמוד ב: ראשית הגז בששים תרומה בששים פאה בששים.

סיכום

התלמוד הירושלמי הוא מקור קדום ביותר בו ניתנה הערכה למספר $\frac{1}{e}$. חכמי התלמוד הניחו נכונה כי הביטוי $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$ שווה תמיד לשליש ועוד קצת, גם במספרים גדולים, אפילו שלא היתה להם אפשרות לחשב זאת במדויק. על סמך הנחה זו הסברנו גמרות שונות הדנות בעישורייתא דבי רבי, ותרצנו קושיה על הלכה ברמב״ם.

בנוסף, חז״ל לכאורה הבינו כי הביטוי $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m}$ ישאר שליש ועוד קצת גם אם החזקה m תהיה גדולה בהרבה מ-n. אולם דבר זה אינו נכון, וצריך עיון גדול כי הבנת הגמרות משתנה ויש לכך השלכות הלכתיות.

אנו רואים כי לחכמי המשנה והתלמוד היה ידע מתמטי נרחב ואינטואיציה חזקה, אך לא היה בידם הידע המתמטי שיש בידינו כיום. אין בטענה זו לפגוע במאומה בגדלותם של חז״ל[112]. כבר הרמב״ם כתב[113]: ״אל תדרוש ממני להתאים את כל ענייני האסטרונומיה שהם [חז״ל] ציינו אל המצב כפי שהוא, כי המתמטיקה היתה לקויה באותם זמנים. והם לא דנו בזאת מבחינת שהם מוסרים אמרות אלה מפי הנביאים, אלא מבחינת שהם היו חכמי אותן תקופות במקצועות אלה או שמעו אותן מפי חכמי אותן התקופות״.

[112] קליין א' (2017), הידע המדעי של המאה ה-21 לא היה ברשות חז"ל, בד"ד 30, אב תשע"ז.
[113] מורה נבוכים חלק ג פרק יד. מובא במאמרו של דניאל מלאך (1998), השתנות הטבעים כפתרון לסתירות בין דת למדע, תחומין יח, תשנ"ח, בתרגום הר"י קאפח. כאן מובא הקטע מתוך התרגום שוורץ כפי שמובא במאמר שבהערה 111.

ביבליוגרפיה

תנ"ך, ירושלים, מוסד הרב קוק, תשנ"ד (1994).

משניות, ע"א פירושים, ירושלים, הוצאת תורה לעם, תש"ך (1960).

תלמוד בבלי, הוצאת ט. רובינשטיין ובניו בע"מ תשל"ט, בני ברק (1979).

תלמוד ירושלמי, ירושלים, הוצאת המוסד לעידוד לימוד התורה (1992).

רש"י, בעלי התוספות ורשב"ם על הדף בתלמוד הבבלי.

רבי אברהם בן דוד (הראב"ד), השגות על הרמב"ם. נדפס על משנה תורה להרמב"ם, ירושלים, הוצאת פרדס (1955).

קוסובסקי משה, אוצר לשון תלמוד ירושלמי. הוצאת האקדמיה הלאומית הישראלית למדעים ובית המדרש לרבנים באמריקה (1985).

איגר, רבי עקיבא, תשובות רע"א. ישראל, מפעלי ספרים ליצוא בע"מ (1968).

איידלס, רבי שמואל אליעזר הלוי. חידושי אגדות למהרש"א, נדפס בסוף כל מסכת בתלמוד הבבלי.

איסרליש, רבי משה הרמ"א, הגהות על השולחן ערוך, ירושלים, מכון חתם סופר תשכ"ו (1966).

הגר"א, קול אליהו. ירושלים. הוצאת המוסד לעידוד לימוד התורה (1994).

אלפסי, רבי יצחק הרי"ף על מסכת כתובות. נדפס בסוף המסכת בתלמוד הבבלי.

רבינו אשר, הרא"ש. נדפס בסוף כל מסכת בתלמוד הבבלי.

בועז יהושע, שלטי גיבורים על הרי"ף בכתובות. נדפס בסוף המסכת בתלמוד הבבלי.

בן זמרא, דוד, חידושים על הרמב"ם. נדפס על משנה תורה להרמב"ם, ירושלים, הוצאת פרדס (1955).

ברודי ירחמיאל , חיבורים הלכתיים של רב סעדיה גאון, עם תרגום חדש של ספר הירושות. ירושלים, בית ההוצאה של יד הרב נסים, (2015).

ברטנורא, רבי עובדיה, פירוש המשניות. נדפס על המשניות במהדורות הדפוס ע"א פירושים.

גומבינר, אברהם אבלי הלוי, מגן אברהם על השו"ע. נדפס על השולחן ערוך ירושלים, מכון חתם סופר תשכ"ו (1966).

גינצבורג יקותיאל. כתבים נבחרים, ניו יורק, הוצאת ניומן (1961).

הכהן, ישראל מאיר מראדין, החפץ חיים, משנה ברורה על שו"ע או"ח,. ירושלים, דפוס דודו מהדורה מנוקדת (1994).

רבי יעקב בן הרא"ש בעל הטורים, ארבעה טורים השלם. ירושלים, הוצאת מכון ירושלים, (1990).

כ"ץ, יששכר בער, מתנות כהונה על מדרש רבה. וילנא, דפוס האלמנה והאחים ראם (1909).

מדרש רבה, שמות, ויקרא, דברים ושיר השירים, מהדורת וילנא, דפוס האלמנה והאחים ראם (1909).

מילר, יואל הכהן, תרגום "על הירושות". ספר הירושות לרס"ג, בערבית ובעברית ובארמית, פאריס צרפת, בהוצאת יוסף דירינבורג בברלין (1897).

רבי משה בן מימון (הרמב"ם), פירוש המשניות, נדפס בסוף התלמוד הבבלי.

רבי משה בן מימון (הרמב"ם), משנה תורה, חיפה, הוצאת ישיבת אור וישועה (2006).
רבי משה בן מימון (הרמב"ם), מורה נבוכים. תרגום מיכאל שוורץ, ישראל, סדרת עם הספר, הוצאת ידיעות אחרונות (2008).
רבינו ניסים (הר"ן) על מסכתות נדרים וכתובות. נדפס בסוף המסכתות בתלמוד הבבלי.
רבי נתן בר יחיאל מרומי, ספר הערוך, המאה ה-11. ונציה (1653).
פרנקל, הרב דוד, קרבן העדה על הירושלמי. נדפס על התלמוד הירושלמי.
קארו, רבי יוסף, שולחן ערוך. ירושלים, מכון חתם סופר תשכ"ו (1966).
קארו, רבי יוסף, כסף משנה על הרמב"ם. נדפס על משנה תורה להרמב"ם, ירושלים, הוצאת פרדס (1955).
קוק, הרב אברהם יצחק הכהן, עין איה על ברכות ו נט. הוצאת מכון הרצי"ה (2000).
קליין אלכסנדר, הידע המדעי של המאה ה-21 לא היה ברשות חז"ל, בד"ד 30, אב תשע"ז (2017).
רוזן, יצחק יהודה, כל המבקר את החולה נוטל אחד מס' בחוליו, הגיון תשנ"ו, כרך ג' (2006).
רויכמן יובל, הרמב"ם על דימוע ועישורייתא דרבי והמספר e, המעיין גליון 226, תמוז תשנ"ח (1998).
שטיינברג, אברהם, תחומין חלק ג', במאמרו "העיוור בהשקפת היהדות". הוצאת מכון צומת (1982).

Bell E. T. (1945), The Development of Mathematics, New York NY. 2nd edition, McGraw Hill

Boyer C. B. (1968) A History of Mathematics. New York NY. John Wiley & Sons

Bunt L., Jones P., Bedient J. (1988) The Historical Roots of Elementary Mathematics, New York NY, Dover Publications

Burton D. M. (2011) The History of Mathematics: An Introduction, New York NY. 7th edition, McGraw Hill

Cajory F. (1909) A History of Mathematics, London England. MacMillan & Company

Eves H. (1969) An Introduction to the History of Mathematics. Holt, Rinehart & Winston

Feynman R., Leighton R. B., Sands M. (1977) The Feynman Lectures on Physics I. Addison-Wesley.

https://en.wikipedia.org/wiki/Euler's_identity (September 2020)

https://he.wikipedia.org/wiki/זהב (September 2020)

Maor, E. (1994), e - The Story of a Number. New Jersey, Princeton University Press

Newman J. R. (1956), The World of Mathematics, New York NY, Simon & Schuster

World Gold Council (WGC), www.gold.org (September 2020)

Summary

The number e (e=2.718281828459045…) is a very important and basic number in mathematics, much like pi (π =3.14159265...) and the square root of 2 (√2=1.41421356…), but is much less known. e was discovered in the 17th century and was defined by Leonard Euler in the 18th century. This number appears in many areas of mathematics and in varied calculations, including statistics and probability. One of the definitions of e is $\frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

The Babylonian and Jerusalem Talmud cover a very wide range of topics. In calculations on the subject "The Tenth of Rabbi" the sages of the Talmud are required to calculate expressions in the form of $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. In one of these issues there is an estimate for the number $\frac{1}{e}$, a little more than a third, and this is apparently the earliest estimate for this number.

In this work, I will review and analyze all the issues ('Sugyot') in which a calculation is made that is connected to "The Tenth of Rabbi":

A. Inheritance of daughters after the death of their father (Ketubot 68 and the corresponding issue in the Yerushalmi), and in the book of inheritances written by Rav Saadya Gaon which performs the calculation almost perfectly.

B. Visiting the sick (Nedarim 39)

C. Making a rough step (Ta'anit 10, Brachot 43 and Shabbat 113)

D. Construction of the temple menorah (Menachot 29)

E. Things that take one out of five hundred from a person's eyesight (Eruvin 55, Pesachim 42)

F. Putting a SEAH and taking a SEAH (Mishnah Mikvaot, Chapter 7 Mishnah 2, Yevamot 82, Mishnah Trumot, Chapter 5 Mishnah 7)

From these issues I will show that the Talmudic sages had extensive mathematical knowledge as well as a strong intuition on calculations that they could not do using the mathematical tools of their time. Using their knowledge and intuition, they came to very advanced conclusions and performed evaluations of very complicated calculations. Apparently they were also the first to pay attention to the specialty of the number $\frac{1}{e}$, evaluate its size and use its features.

However, there may be some errors in the calculations of sages, in cases where they did not have the mathematical tools required to perform the calculations. These errors affect all of the above issues, and may even change different Halakhic laws. In this work I will detail the assumptions made by Sages, the various calculations they did, and the effect of modern calculations on these issues.

According to Maimonides in "More Nevuchim" (Part C, End of Chapter 14), it is the flawed mathematics of those times that have misled the sages. It remains to be discussed whether the Halakhic laws should be changed with the advancement of mathematics.

Bar-Ilan University

המספר e בתלמודים – "עישורייתא דבי רבי"

The Number e in the Talmudim – "The Tenth of Rabbi"

This work was done under the guidance of Prof. Ely Merzbach
Faculty of Humanities, Department of General History,
Science and Halacha Program of
Bar-Ilan University

Bar-Ilan University

המספר e בתלמודים – "עישורייתא דבי רבי"

The Number e in the Talmudim – "The Tenth of Rabbi"

Ariel Catane

Submitted as a Thesis
Faculty of Humanities
Department of General History
Science and Halacha Program
Bar-Ilan University

Ramat-Gan Israel 2020