

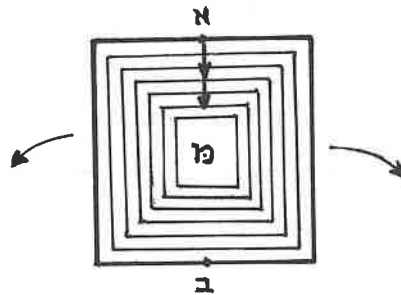
תרוץ על קושית החוות יאיר בענין מדידת שטח העגול

פרק א.

החוות יאיר בסימן קע"ב (דף צ"א ע"ב טור א' למטה וטור ב') (דפוס ירושלים תשל"ג).
הקשה קושיא מענינת ביותר על דברי התוס' סוכה דף ח'. ע"א בנדון מדדת שטח העגול בעזרת
"חוטים". (עיין שם היטיב בדברי התוס').

קודם אציג את תמצית קושייתו ואחר כך אפרט. (אשתדל ככל האפשר להמנע משמוש במונחים
מתמטיים אשר היו מקצרים מאד את הדרך אך הם דורשים ידיעה מוקדמת במתמטיקה.) ובכן הקושיא
היא שאם ננסה למדוד את שטחו של רבוע בשיטת ה"חוטים" של תוס', נמצא שבדרך אחת נגיע
למידת השטח הנכונה ואילו בדרך שניה נגיע למידת שטח אחרת. א"כ בהכרח יש כאן טעות כל שהיא
בשיטת מדידה זו. וכעת נפרט:

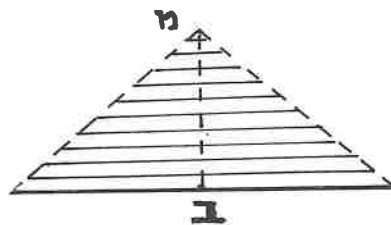
ציור מס' 1 (המידות בציורים אינם מדויקות)



ניקח רבוע בגדל של 10 ס"מ על 10 ס"מ (ציור מס' 1) ונקיף אותו בחוטים סביב נקודת מרכזו
(נקודה מ).

לאחר מכן נחתוך את החוטים מאמצע הצלע (נקודה א) אל המרכז בכוון החץ ונפרוס את החוטים
לכוון הצלע הנגדית. (הפריסה בכוון החיצים) נקבל משולש (ציור מס' 2) שבסיסו 40 ס"מ וגובהו 5
ס"מ (ב - מ = חצי רוחב הריבוע)

ציור מס' 2



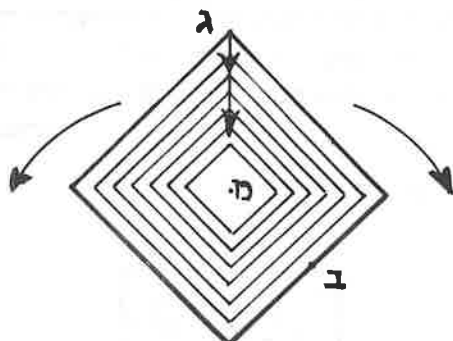
נחתוך את המשולש לאורך הקו ב - מ ונקבל שני משולשים (עיין בתוס' סוכה דף ח'. ע"א הנ"ל).

נניח אותם זה ליד זה ונקבל מלבן 20×5 ס"מ ושטחו הוא 100 ס"מ מרובע. וזהו השטח הנכון שהרי שטח הרבוע הוא 10×10 ס"מ = 100 סמ"ר.

אולם, אם נלך בדרך השניה ונחתוך את החוטים מאחת הקרנות לכוון המרכז נקבל תוצאה שונה.

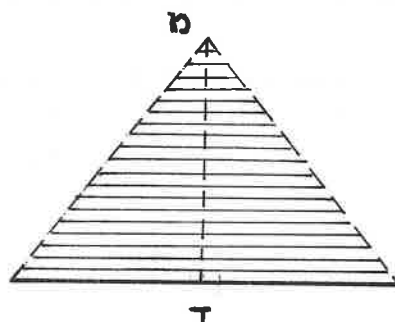
עיינ ציור 3.

ציור מס' 3



נחתוך מנקודה ג לכוון מ ונפרוס את החוטים לכוון נקודה ד ונקבל משולש (ציור מס' 4).

ציור מס' 4



הפעם נקבל משולש שאורך בסיסו הוא 40 ס"מ אך גובהו מ — ד שווה לאורך חצי אלכסון הריבוע דהיינו בערך 7 ס"מ על פי הכלל "כל אמתא ברבוע ותרי חומשי באלכסונא" (סוכה ח').

ולכן, שטח המשולש הזה יהיה 140 סמ"ר = 7×20 . הייתכן?

החוות יאיר כותב על כך וזה לשונו: "וזאת נפלאות בעיני ולא אוכל לה ומי יתן ואדע מקום השגיאה והטעות וכר'".

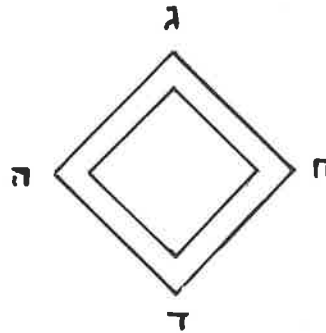
בהמשך דבריו הוא מנסה ליישב תמיהה זו בכך ששיטת המדידה של תוס' טובה רק בעגול ולא ברבוע היות ובקרנות הריבוע על כרחק יתווספו חוטים או יתרחב כל חוט שהרי מרחק הקרן מן המרכז

רב יותר ממרחק אמצע הצלע מן המרכז.

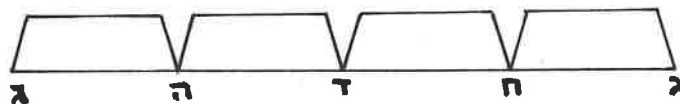
ועוד סיבה, שהרי כאשר נפרוס את החוטים יוצרו פגימות בכל חוט וחוט בקרן במקום "השבירה".
עיינ ציור 5 כיצד נראה חוט אחד לאחר פריסתו.

ציור מס' 5

(קודם הפריסה)



(לאחר הפריסה)



(ואם כי בחוט רך וגמיש לא ייראו הפגימות עקב מתיחתו של החוט אבל לאמיתו של דבר יש כאן אי דיוק מחמת שינוי שטחו של החוט בעת מתיחתו. ולכן, עלינו להשתמש בחוטים "קשיחים" בלבד אם רצוננו לדייק במדידה.) אך על כך הוא שואל שתי שאלות:

1. אם כן איפוא מדוע כאשר חותכים את החוטים מאמצע הצלע מקבלים תשובה נכונה?
2. הרי גם בעיגול יוצרו פגימות בשעת פריסת החוטים. א"כ שמא מדידת התוס' אינה מדויקת?

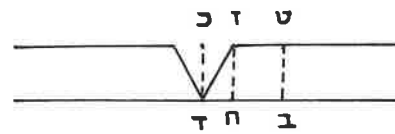
פרק ב.

קודם שנענה על תמיהותיו האחרונות של החוות יאיר נמצא היכן בדיוק מסתתרת הטעות כאשר חותכים את החוטים מן הקרן.

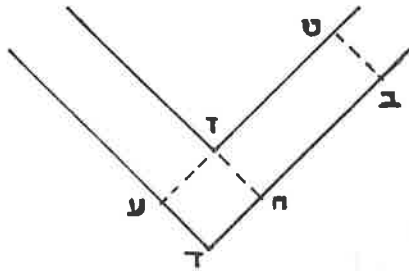
ובכן, לאמיתו של דבר כאשר נפרוס את החוטים שבציור 3, נקבל משולש (ציור מס' 4) שגובהו מ—ד אינו 7 ס"מ אלא 5 ס"מ בלבד! כל המתבונן בציור מס' 5 יראה בעליל שכאשר פורסים את החוט "מתקצר" עוביו בקרן בגלל הפגימה שנוצרה ולמעשה נקבל את עוביו האמיתי, בעוד שקודם הפריסה היה עוביו מדומה (באלכסון).

ציור מס' 6

(לפני פריסת החוט)

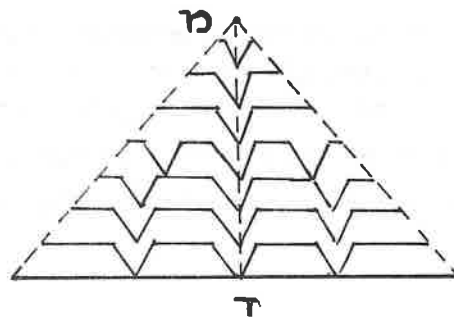


(לאחר הפריסה)



נתבונן בציור מס' 6 בצד שמאל נראה את החוט קודם פריסתו ובצד ימין לאחר פריסתו, ברור שעוביו המדומה של החוט (באלכסון) בנקודה ד' היה ד' — קודם הפריסה, ואילו אחר הפריסה העובי הוא ד' — כ' שהוא שווה ל-ז' — ח' או ל-ב' — ט' שהוא עוביו האמיתי של החוט (בהמשך הדברים נחזור לדון בכך ביתר דיוק). ולכן, כאשר נפרוס את כל החוטים נקבל דבר מעין זה : (ציור מס' 7) (הציור אינו מדויק כל כך ובא רק לשבר את העין)

ציור מס' 7



כאשר סך הכל של גובה המשולש הוא 5 ס"מ ולא כ-7 ס"מ כפי שטענו בציור 4. אולם, מיד תתעורר כאן שאלה: הרי במשולש שקבלנו בציור מס' 7 יש מספר עצום של פגימות (תלוי במספר החוטים) אם כן המשולש שציירנו בציור 2 אינו מדויק כלל ואם כן כיצד קבלנו בכל זאת תשובה נכונה?

שאלה זו תתעורר גם בדברי התוס' בענין פריסת חוטי העגול וכנראה ששתי השאלות אלו הן הן התמיהות שהצגנו לעיל בסוף פרק א' בשם החוות יאיר.

פרק ג

לכאורה, נוכל לענות על שאלה בצורה פשוטה: אם נשתמש בחוטים דקים מאד יהיו פגימות קטנות מאד ואי הדיוק יהיה אפסי. אך אין די בתשובה זו מכיון שככל שהחוטים יהיו דקים יותר כן ילך ויגדל מספרם באותו שעור ואם כן מה שהרווחנו בהקטנת הפגימות יצא בהפסדנו בהגדלת מספרן של הפגימות. והראיה לכך: אם נתבונן בציור 6 נראה שכאשר נשתמש בחוט דק מאד יהיה ההפרש שבין עובי החוט בקרן ז – ד לבין עובי האמיתי ב – ט קטן מאד אם כן לכאורה כאשר נשתמש בחוטים דקים מאד, יפול הסבר שהסברנו אודות הטעות בפרק (ב), אלא על כרחך עלינו לומר שאע"פ שההפרש בין ז – ד לבין ב – ט בחוט דק הוא קטן מאד, אולם ההפרש המצטבר של סך הכל החוטים נשאר קבוע שהרי ככל שהחוטים דקים יותר כך גדל מספרם באותו יחס, ומה שהרווחנו בהקטנת ההפרש בכל חוט יצא בהפסדנו בהגדלת מספר החוטים.

סוף דבר קושיית החוות יאיר בעינה עומדת.

פרק ד

התשובה לקושיות טמונה בעקרון הבא:

כאשר אנו מקטינים את עובי החוטים אין שטח הפגימות הולך וקטן באותו יחס שבו מתקטן עובי החוט אלא בשעור הרבה יותר גדול (כפי שנוכיח זאת בפרוטרוט בפרק (ה) להלן). לדוגמא, אם בחוט שעוביו מילימטר תופסת הפגימה כ-10% משטחו הרי בחוט שעוביו $1/10$ מ"מ תתפוס הפגימה רק כ-1% משטחו. דהיינו בעוד ששטח החוט נתקטן בערך פי 10 הרי שטח הפגימה נתקטן בערך פי 100! ולכן, בעוד שמקודם – כאשר השתמשנו בחוטים שעוביים מילימטר היה סך השטח המצטבר של הפגימות 10% מסך השטח המצטבר של החוטים. הרי כעת – בחוטים שעוביים $1/10$ מ"מ – סך השטח המצטבר של הפגימות מהוה רק 1% מסך השטח המצטבר של כל החוטים.

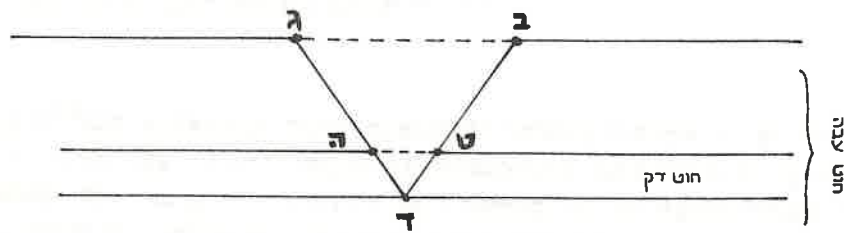
כמובן, שבדרך זו נוכל להקטין את האחוז שתופס השטח המצטבר של הפגימות, עד שיהיה אפסי או ליתר דיוק עד שיהיה קטן בשעור אינסופי. כל שעלינו לעשות הוא לבחור בחוטים דקים עד למאד. והיות ומדובר כאן בחוטים תיאורטיים ולא בחוטים של ממש הרי הדבר בידינו. כך שנוכל להגיע למצב שבו נוכל להתעלם כליל מאי הדיוק שנוצר עקב שטח הפגימות.

אולם, כל זאת אמור רק לגבי שטח הפגימות אך כאשר נבדוק את הפרשי עובי החוט בקרן המתוארים בציור מס' 6 דהיינו ההפרש בין ד – ז לבין ב – ט נמצא שהם מתקטנים בדיוק באותו יחס שבו מתקטן עובי החוט, (כמו שנוכיח להלן פרק (ה)). ולכן, ההפרש המצטבר של סך כל החוטים נשאר קבוע.

פרק ה

כעת נוכיח את הכלל שהצגנו בפרק הקודם דהיינו שכאשר מקטינים את עובי החוטים אין הפגימות הולכות וקטנות באותו יחס שבו מתקטן עובי החוט אלא בשעור הרבה יותר גדול.

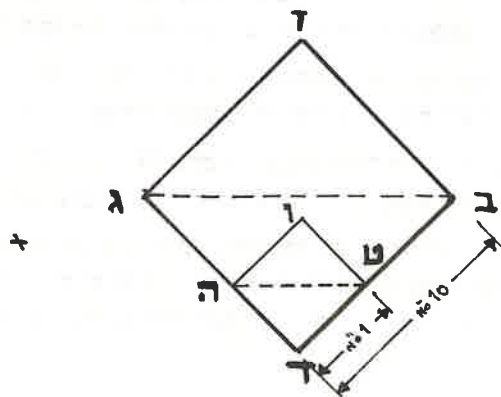
ציור מס' 8



בציור מס' 8 עובי החוט הדק הוא $1/10$ מעובי החוט העבה ולכן שטחו הוא $1/10$ (בערך) משטחו של החוט העבה ואילו הפגימה הקטנה ט – ד – ה שטחה הוא $1/100$ משטח הפגימה הגדולה ב – ג – ד כפי שנוכיח מיד.
ראשית, נקבע שאורך הקטע ט – ד הוא $1/10$ מאורך הקטע ב – ד (מכיון שעובי החוט הדק הוא $1/10$ מעובי החוט העבה).

כעת, נתבונן בציור מס' 9, שם אנו רואים את המשולש הגדול ב – ג – ד כשהוא מצוייר כחציו של הרבוע הגדול ב – ד – ג – ז, ובקרבן ד אנו רואים את המשולש הקטן ט – ה – ד כשהוא מצוייר כחציו של הריבוע הקטן ט – ד – ה – ו.

ציור מס' 9



כל המתבונן בציור מס' 9 יראה שאם לדוגמא אורך צלעו של הרבוע הגדול הוא 10 ס"מ ואורך צלעו של הרבוע הקטן הוא 1 ס"מ הרי שטחו של הרבוע הקטן יהיה $1/100$ משטחו של הרבוע הגדול

וממילא שטחו של המשולש הקטן ט — ד — ה יהיה $1/100$ משטחו של המשולש הגדול ב — ד — ג. נחזור ונתבונן בציור מס' 8 ונראה שלפי האמור לעיל שטחה של הפגימה הקטנה הוא $1/100$ משטחה של הפגימה הגדולה ובוזה הוכחנו את הכלל שהצגנו בראש הפרק. כעת נוכיח את הכלל שהצגנו בסוף פרק (ד) בעניין הפרשים בין עובי החוט המדומה בקרן לעובי האמיתי.

אם נתבונן בציור 6 בצד ימין וכן בצד שמאל נראה, שהקטע ד — ז הוא אלכסונו של הרבוע ז — ח — ד — ע לכן היחס שבין עובי המדומה של החוט לבין עובי האמיתי הוא כיחס שבין אלכסון הרבוע לבין צלע הרבוע, ולפי הכלל "כל אמתא ברבוע אמתא ותרי חומשי באלכסונא" יחס זה הוא 1:1.4.

יחס זה ישאר קבוע ולא ישתנה בין בחוט עבה ובין בחוט דק ולכן אם לדוגמא נקח חוט בעובי 10 מ"מ יהיה עוביו המדומה (באלכסון) 14 מ"מ וההפרש ביניהם יהיה 4 מ"מ.

ואם נקח חוט דק פי 10 דהיינו בעובי 1 מ"מ יהיה עוביו המדומה 1.4 מ"מ וההפרש ביניהם 0.4 מ"מ, דהיינו ההפרש יקטן גם הוא פי 10 ולא יותר. ולכן, סך כל ההפרש המצטבר ישאר קבוע דהיינו במקום החוט העבה בעובי 10 מ"מ יש לנו כעת עשרה חוט דקים בעובי 1 מ"מ. ההפרש העובי המצטבר שלהם הוא 4 מ"מ $10 \times 0.4 =$ וזה בדיוק הפרש העובי בחוט העבה. ובוזה הוכחנו את האמור בסוף פרק ד'.

פרק ו

עדיין נותר לנו לבאר את שאלתו הנוספת של החוות יאיר הלא גם בפרישת חוטי העגול יוצרו הפגימות. והנה לענין אי הדיוק הנוצר עקב שטח הפגימות כבר הראנו שאפשר להתעלם ממנו אם משתמשים בחוטים דקים מאד, אולם באשר לעובי החוט כאן יש לשאול שמא גם בעגול יש הפרש בין עובי האמיתי של החוט לאחר פריסתו לבין עובי המדומה קודם פריסתו כפי שהראנו את הדבר בריבוע בנקודת הקרן. והרי העגול מורכב לכאורה מהרבה "קרנות" שבהם אנו "שוכרים" את החוט. ועלינו לזכור שאנו מדברים בחוט קשיח ולא בחוט גמיש. כפי שהערנו בסוף פרק א.

האינטואיציה אמנם אומרת שבעגול אין שום הבדל בין עובי אמיתי של החוט לבין עובי מדומה, ננסה להראות דבר זה בצורה יותר מדויקת.

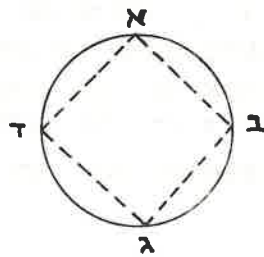
קודם לכן נציג שאלה שניה והיא: מי יתקע לידינו שאפשר בכלל "ליישר" את חוט העגול שמא נקבל במקום חוט ישר חוט "שבור" שהרי בחוט קשוח עסקינן.

התשובה לשאלה השנייה היא כזאת: אם נפרס את חוט העגול ע"ש "נשבור" אותו בנקודות רבות מאד וצפופות מאד נגיע למצב שהחוט שנקבל יהיה קרוב מאד בצורתו לקו ישר, וככל שנגדיל את מספר נקודות השבירה ילך אי הדיוק הלך וקטן עד שיהא אפסי.

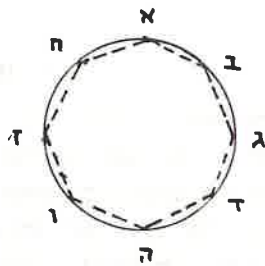
המתבונן בציור 10 יראה זאת מיד.

ציור מס' 10

קודם פריסה



אחרי פריסה



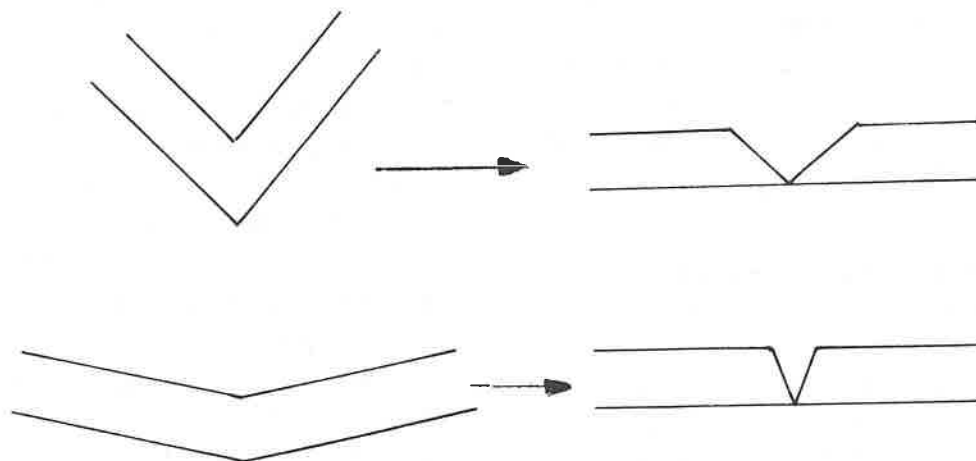
באותו צורה נוכל לענות גם על השאלה הראשונה.

כל המתבונן בציור 11 יראה שככל שהזווית בקרן יותר "שטוחה" (דהיינו קרובה יותר לקו ישר) הולך ומשתווה עוביו המדומה של החוט בקרן לעוביו האמיתי של החוט.
(נא לעיין גם בציור 6 לעיל לברור המושגים "עובי מדומה" ו"עובי אמיתי")

ציור מס' 11

קודם פריסה

לאחר פריסה



וכאשר הזווית "השטוחה" תהיה קרובה מאוד לקו "ישר" יהיה היחס בין עובי החוט האמיתי לבין עובי החוט המדומה קרוב ל-1:1 (בעוד שבזווית של רבוע היה היחס ביניהם 1:1.4).

כעת נתבונן שוב בציור 10 משמאל ונראה שככל שנרבה את נקודות השבירה תהיה זווית הקרן בנקודות השבירה "שטוחה" יותר ויותר. כך שע"י הגדלת מספר נקודות השבירה במאד מאד נוכל להגיע למצב שזווית השבירה תהיה קרובה יותר ויותר ל"קו ישר" כך שההפרש שבין עובי מדומה לעובי אמיתי יהיה אפסי.

ואם יטען הטוען הרי ע"י הגדלת מספר נקודות השבירה הגדלנו מאד את מספר הפגימות וממילא שטחן המצטבר ילך ויגדל?

התשובה היא שנוכל להתגבר על אי דיוק זה בכך שנשתמש בחוטים דקים יותר ויותר. לדוגמא אם נגדיל את מספר נקודות השבירה פי 100 נוכל להקטין את סך כל שטח הפגימות ע"י הקטנת עובי החוטים פי 100 כך ששטח הפגימות יקטן שוב פי 100 ובכך בטלנו את השפעת הגדלת מספר הפגימות. בסכומו של דבר נלע"ד שיישבנו את דברי רבותינו בעלי תוס' מכל תמיהותיו של בעל החוות יאיר.