

בעיית הבכורות

אליהו בלר

1. מברא

שנה אחרי יציאת מצרים היו 603,550 זכרים מבני ישראל מגיל עשרים שנה ומעלה (במדבר א' מ"ו). באותו זמן נמנו 22,273 בכור זכר מבני ישראל מכן חדש ומעלה (שם ג' מ"ג). נניח כעת שמספר בני ישראל מתחת גיל 20 היה לפחות שוה¹ למספרם של אלה מעל 20. זאת אומרת שיחד עם נקבות, היו לפחות 2,400,000 בני ישראל, מתוכם 44,000 בכורות (כולל בכורות נקבות). לפי זה היו במשפחה הממוצעת² 55 אחים ואחיות!

גם אצל הלויים אנחנו מגיעים לבעיה דומה. כתוב (במדבר ג' ל"ט) שנמנו 22,000 בני לוי מכן חדש ומעלה, אבל אם מחברים את תוצאות המפקד עבור שלש משפחות לוי (שם ג' כ"ב, כ"ח, ל"ד) הסכום הוא 22,300. יתירה מזו, כתוב (שם ג' מ"ג-נ"א) כי 22,000 הלויים הוקדשו לה' במקום 22,000 בכורות, ואילו 273 הבכורות הנותרים נפרו על ידי מתן חמשה שקלים לאהרן ובניו. נשאלת השאלה, למה לא פדו 300 הלויים הנוספים את 273 הבכורות הנותרים?

כבר ישב רבן יוחנן בן זכאי על מדוכה זו, והסביר (בכורות ה' ע"א) שאותם 300 היו בעצמם בכורות; דיים שיפקיעו את עצמם מן הפדיון, ולא היו פנויים לפדות את בכורי ישראל. יוצא מזה שמתוך 22,300 לויים זכרים, היו רק 300 בכורות, זאת אומרת שבמשפחה ממוצעת מבני לוי, היו 74 אחים ואחיות!

המפתח לפתרון בעיית הבכורות נמצא בדברים הבאים שכתב הרמב"ן בפירושו על במדבר (ג' מ"ה):

הנה הבכורים נתקדשו להיות לשם מעת שצוה קדש לי כל בכור בבני ישראל באדם וגומר ... והנראה אלי כי הבכורים האלה כלם לא נולדו במדבר בשנה אחת כי לא נתרבו העם שם כל כך, רק כל הבכורים אשר היו בישראל נמנו.

הרמב"ן מתייחס כאן לאפשרות שהחיוב לפדות את הבכורות חל רק על אלה שנולדו אחר הציצוי "קדש לי כל בכור", ולפי זה, ה-22,273 שנמנו נולדו באותה שנה בין יציאת מצרים והמפקד. הטעם היחיד שהרמב"ן לא בחר באפשרות הזאת, הוא שנראה לו ששיעור הילודה של העם לא היה מספיק גבוה כדי להוליד כל כך הרבה בכורות בזמן כה קצר. ובכן, זוהי שאלת המפתח שבבילנו: האם המספר 22,273 מייצג את כל הבכורות, או רק אלה שנולדו בשנה האחרונה?

מטרת עבודתי זו היא להכריע את השאלה הזאת בעזרת המתודולוגיה הבאה: ייבנה מודל מתמטי של גידול אוכלוסיה שמביא בחשבון את כל הנתונים הדמוגרפיים בתורה, חוץ ממספר הבכורות; נקרא לו "המודל הראשוני". מתוך המודל הזה נחשב את מספר הבכורות שנולדו

בשנה האחרונה, וגם את מספר הבכורות מכל הגילים. כמו שנראה בפרק 4, התוצאות מרשימות. למשל, אם נעבוד עם תוחלת חיים של 50 שנה, המודל הראשוני יתן בערך 23,000 בכורות ישראל שנולדו בשנה האחרונה, ו־395,000 בכורות מכל הגילים. עבור בכורות הלויים, המודל נותן בערך 140 שנולדו בשנה האחרונה, ו־5,600 מכל הגילים. עבור ערכים אחרים של תוחלת חיים, התמונה דומה. המסקנה המתבקשת היא שהבכורות שנמנו בתורה אכן נולדו אחרי יציאת מצרים. ממילא, בעיית הבכורות הנ"ל נעלמת, כי אותה בעיה צמחה מההנחה שנמנו הבכורות מכל הגילים. לבסוף, בפרק 5, נתקן את המודל במקצת כדי שייצאו בדיוק 22,273 ו־300 בכורות עבור בני ישראל ובני לוי בהתאמה. המודל המתוקן הזה יוכיח שהנתונים בתורה עיקביים במסגרת המודל.

2. העקרונות להפעלת המודל

א. ילודה

בפירושו על במדבר ג' י"ד תמה הרמב"ן: למה היה שבט לוי, עבדי ה' וחסידיו, מעוטים באוכלוסין ביחס לשאר השבטים? ממשיך הרמב"ן

ואני חושב שזה חזוק למה שאמרו רבותינו כי שבטו של לוי לא היו בשעבוד מלאכת מצרים ובעבודת פרך. והנה ישראל אשר מדרו המצריים את חייהם בעבודה קשה כדי למעטם היה הקב"ה מרבה אותם כנגד גזרת מצרים כמו שאמר וכאשר יענו אותו כן ירבה וכן יפרוץ ... אבל שבט לוי היו פרים ורבים כדרך כל הארץ ולא עלו למעלה כשאר השבטים.

ההערה הזאת של הרמב"ן משמשת כאבן פינה בעבודתי. דהיינו, אניח שהיה אותו שיעור ילודה לבני ישראל וללויים עד השיעבוד. אחרי השיעבוד אניח שהילודה אצל הלויים המשיכה כבעבר, בשעה שהילודה של בני ישראל עלתה.

מסדר עולם אנחנו לומדים שבני ישראל ישבו במצרים 210 שנה.³ לפי מסורת חז"ל התחיל השיעבוד 86 שנה⁴ לפני יציאת מצרים, עם לידת מרים. בהתאם לזה, יש לנו שתי תקופות שונות בנוגע לילודה: 124 השנים הראשונות של ישיבת ישראל במצרים, ותקופת 87 שנה מתחילת השיעבוד עד המפקד, שנה אחרי יציאת מצרים.

ב. תמותה

בנוגע לתמותה, לא נבחין בין הלויים לשאר ישראל, ולא בין תקופות חרות ושיעבוד; יהיה לנו מבנה אחיד של תמותה עבור כל התקופה של 211 שנה. תהי $e(x)$ ההסתברות שאדם יחיה

לפחות x שנים. אנחנו נעבוד עם $e(x)$ בצורת

$$e(x) = \exp(-(x/\theta)^\beta) \quad (1)$$

כאשר θ ו- β קבועים חיוביים, ו- $\exp(x) = e^x$. זו מה שנקראת התפלגות Weibull. שים לב שהתפלגות Weibull לא משקפת תמותת תינוקות. זאת אומרת שבמסגרת המודל שלנו, התוצאה של תמותת תינוקות תהיה הפחתה מתאימה בשיעור הילודה. במלים אחרות, תינוק שנפטר, ייחשב כאילו לא נולד⁵. הערכים של θ ו- β בנוסחה (1) ייקבעו על ידי שתי המשוואות

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} e(n) \quad (2)$$

$$e(100) = .001 \quad (3)$$

כאשר E מסמן את תוחלת החיים. משוואה (3) אומרת שאדם אחד מתוך אלף יהיה על גיל 100: כאשר מתאימים את התפלגות Weibull ל life tables מודרניים⁶, מוצאים שזה סדר הגודל הנכון.

אנחנו לא יודעים את תוחלת החיים E של בני ישראל באותו זמן⁷; לכן, במודל הראשוני, נעבוד עם ארבעת הערכים הבאים: 40, 50, 60, ו-70 שנה. בפרק 4 נראה שמבין ארבעה הערכים האלה, $E = 50$ מתאים ביותר לנתונים בתורה. להלן הערכים של θ ו- β המתאימים לארבעת ערכי E :

E	θ	β
40	45.6611	2.46535
50	56.2475	3.35873
60	66.1481	4.67643
70	75.4458	6.85928

ג. זכר ונקבה

לצורך המודל שלנו נניח שמספר הזכרים תמיד שווה למספר הנקבות, בכל גיל. ההנחה הזאת מועילה כי, מצד אחד, כל הנתונים בתורה הם על זכרים, ומצד שני, יותר קל לעבוד עם פריון הנקבות.

אנחנו שלכל אשה מגיל⁸ 13 על 45 יש שיעור ילודה קבוע, ובגילים האחרים, שיעור הילודה אפס. הערך של הקבוע הזה ייקבע על פי הנתונים הדמוגרפיים.

שיטת העבודה שלנו תפעל בסדר הבא:

- 1) נתוני התורה על הזכרים יועברו לנקבות.
 - 2) המודל שלנו בנוי עבור נקבות וצאצאיהן הנקבות.
 - 3) התוצאות עבור אוכלוסיית הנקבות יועברו בחזרה אל הזכרים.
- הסדר הנ"ל יהיה מובן מאליו בהמשך המאמר; באופן מפורש, ארכר רק על הזכרים.

ד. מבן עשרים שנה ומעלה

כזכור למעלה, 603,550 ישראלים "מבן עשרים שנה ומעלה" נמנו במפקד (במדבר א': מ"ה, מ"ו). לפי רב אחא בר יעקב (בבא בתרא קכ"א ע"ב) רק אלה עד גיל 60 נמנו במפקד. רב אחא לומד את זה מערכין (ויקרא כ"ז, ג"ז), שהערך המירבי הוא עבור זכר מבן עשרים עד בן ששים. הרמב"ן מסביר⁹ שחוקי הערכין משקפים את העובדה שהתקופה בין 20 ל-60 היא התקופה העיקרית בחיי איש; רק אז הוא "יוצא צבא", כאמור במפקד (במדבר א': ג', מ"ה).

אולי אפשר לטעון שהשתיקה של מדרשים שונים על הנקודה הזאת¹⁰ מראה שהם חולקים על רב אחא, וסוברים שנמנו גם אלה שמעל גיל 60. בכל מקרה, ההפרש בין התוצאות המספריות הנובעות משתי ההנחות האלה (אם נמנו רק עד גיל 60 או לא) הוא לא משמעותי¹¹, ולא משפיע על המסקנה שהוסקה מהמודל הראשוני. לכן אגיש לקורא רק אותם חישובים שהם לפי שיטת רב אחא.

ה. חמושים עלו בני ישראל

על הפסוק "חמושים עלו בני ישראל מארץ מצרים" (שמות י"ג י"ח) שנינו במכילתא

... דבר אחר וחמושים עלו אחד מחמשה ויש אומרים אחד מחמשים ויש אומרים אחד מחמש מאות רבי נהוראי אומר העבודה לא אחד מחמש מאות עלו שנאמר רבבה כצמח השדה נתתיך (יחזקאל ט"ז, ז) ואומר ובני ישראל פרו וישרצו וירבו ויעצמו (שמות א' ז') שהיתה האשה יולדת ששה בכרס אחד ... ואימתי מתו בשלשת ימי אפלה ...

מהשיטות הנ"ל יש נפקא מינה גדולה בנוגע לנתונים שצריכים להכניס למודל. אלא שיש נתאים במכילתא ובמכילתא דרבי שמעון בן יוחאי שמפרשים את המלה "חמושים" אחרת; וכך שנינו במכילתא דרשב"י על אותו פסוק:

חמושים אין חמושים אלא מזויינין ... דבר אחר וחמושים יש מהן שעלה בארבעה דורות ויש מהן שעלה בחמשה דורות דבר אחר וחמושים עלו מלמד שעלו עמהם

גרים ועבדים חמשה כיוצא בהם ...

יש עוד פירוש למלה "חמושים" בתרגום יונתן: "וכל חר עם חמשא טפלין סליקו ...", כלומר, כל גבר עלה עם חמשה ילדים. יש להוסיף מה ששנינו במכילתא דרשב"י פרשת וארא¹¹:

ר' אלעזר בן יהודה איש ברתותא אומר, השיב משה ואמר לפני הקב"ה אתה אומר לי לך הוציא ששים רבוא בני אדם מתחת סבלות מצרים ומתחת שיעבודן של מצרים, אלו על ק' בני אדם או על ק"ק בלבד אתה אומר לי הדבר עדין קשה לי מאד ...

דבר זה נאמר קודם עשר המכות, ומוכח שלא סובר שמתו ארבע חמישיות בשלשת ימי האפלה.

העבודה הנוכחית שלי מבוססת על שיטת התנאים שלא מפרשים שיוצאי מצרים היו רק חלק קטן מאלה שהיו לפני ימי האפלה. (דרך אגב, יש לציין שבפרק 5 יתברר שלפי המודל שלנו היה מספר הזכרים והנקבות שמתחת לגיל 20 בערך פי חמשה ממספר הגברים בין 20 ל-60 שנה, וזה עולה בקנה אחד עם הפירוש בתרגום יונתן.) אין ספק שגם השיטות של אחד מחמשה, אחד מחמשים, וכו', ראויות לעיון בעזרת מודל מתמטי מתאים כדי לעמוד על השלכותיהן לגבי בעיית הככרות, אבל לא אעסוק בהן במאמר הזה.

1. ששה בכרס אחד

מדברי רבי נהוראי במכילתא שהבאנו למעלה, מוכח שהוא סובר שלידת ששה בכרס אחד היתה הנורמה אצל נשי ישראל, וזה הכריח אותו להסיק שיוצאי מצרים היו הרבה פחות מחלק אחד מ-500 ממה שהיו לפני מכת החושך. מצד שני, תרגום יונתן, שאומר שכל אחד עלה עם חמשה ילדים, סובר (לפי הפשטות) שששה בכרס אחד לא היתה הנורמה בישראל, וכן משמע מדברי רבי אלעזר בן יהודה איש ברתותא שהבאתי למעלה. קרוב לומר שגם השיטות האחרות של "אין חמושים אלא מזויינין" וכו' לא גורסות את הנורמה ההיא. לכן, לאור מה שכתבתי בסעיף ה' על ההנחה שעליה מבוסס המאמר הנוכחי, אין לחפש אחרי עקבות של "ששה בכרס אחד" בתוצאות המספריות של המודל.

3. המודל

נעזר במודל דטרמיניסטי של גידול אוכלוסיה עם התפלגות גילים שפיתחו ה. ברנרדלי, א.ג. לואיס ופ.ה. לסלי¹².

יהי $t = 0, 1, 2, \dots$, ויהיו

$n_k^{(t)}$ = מספר האנשים בגיל k שנים בזמן t שנים,

P_k = חלק האנשים בגיל k שנשארים בחיים עד גיל $k+1$,

F_k = מספר הנולדים, בשנה הבאה, לכל הורה בגיל k .

נניח שאף אחד לא חי עד גיל $m+1$, כלומר, $P_m = 0$. אזי נוסחאות המעבר מ- $t=0$ עד $t=1$ הן

$$n_0^{(1)} = \sum_{k=0}^m n_k^{(0)} F_k$$

$$n_k^{(1)} = P_{k-1} n_{k-1}^{(0)} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

אם נכתוב

$$n^{(t)} = (n_0^{(t)}, n_1^{(t)}, \dots, n_m^{(t)}), \quad (t=0, 1, \dots)$$

אזי אפשר לכתוב את המעבר בצורה מטריצית

$$n^{(1)} = M n^{(0)}, \quad (4)$$

כאשר M מסמן את המטריצה

$$M = \begin{array}{c|cccccc|} & F_0 & F_1 & F_2 & \dots & \dots & F_m \\ & P_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ .M = & 0 & P_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \cdot & & & & & \cdot \\ & \cdot & & & & & \cdot \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & P_{m-1} & 0 \end{array}$$

היות ו- P_k ו- F_k לא תלויים בזמן, אותן נוסחאות מעבר תקפות בין כל שתי שנים עוקבות. לכן אנחנו יכולים לחזור על נוסחה (4) ולקבל

$$n^{(t)} = M^t n^{(0)} \quad (t=1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

במודל שלנו נקבע $m = 100$. לאור נוסחה (1), מקבלים

$$P_k = e(k+1)/e(k) = \exp(-((k+1)/\theta)^\beta + (k/\theta)^\beta) \quad (0 \leq k \leq 99)$$

ר- $P_{100} = 0$. הקיטום הזה ב-100 שנה נוח לחישובים, וההשפעה שלו על התוצאות כמעט ולא מורגשת.

לאור הנחת הפריזון שהנחנו בפרק 2, סעיף ג', מקבלים

$$F_k = \begin{cases} b & (13 \leq k \leq 44) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

באשר b מספר חיובי שייקבע בהמשך. M_b יסמן את המטריצה M עם P_k ו F_k כניל, באשר b פרמטר הילודה של F_k .

א. הלויים

כאשר ירד יעקב ובניו למצרים ($t = 0$), היו רק ארבעה לויים: לוי עצמו, שהיה אז בן 44 שנה¹³, ושלושת בניו (בראשית מ"ו, י"א). לוי לא הוליד עוד בנים זכרים במצרים, ולכן אפשר להתעלם ממנו לצורך המודל. שלושת בני לוי עוד לא הולידו בנים בזמן ירידתם למצרים, לכן סביר להניח שגיליהם היו בין 0 ל-20. לצורך המודל, נניח שהם היו בן 6, בן 12, ובן 18 בהתאמה. בסימנים,

$$n_k^{(0)} = \begin{cases} 1 & (k = 6, 12, 18) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

(ניסויים נומריים הראו ששינוי הגילים של שלושת הבנים לא משפיע בכלל על מספר בכורות הלויים, ויכול לשנות את מספר הבכורות של בני ישראל ב-2% לכל היותר.)

למען הפשטות התוצאות המספריות שאתן ברוב הפרק הזה יהיו לפי תוחלת חיים של $E = 50$ שנה. בפרק 4, התוצאות יינתנו עבור כל ארבעת הערכים המייצגים של E : 40, 50, 60 ו-70 שנה.

כמו שנאמר בפרק 2, סעיף א', אין סיבה לכתחילה להניח ששיעור הילודה b של הלויים השתנה במשך 211 השנים. לפי זה, ולאור נוסחה (5), היינו מקבלים $n^{(211)} = M_b^{211} n^{(0)}$. כמו שראינו בתחילת המאמר, מספר הלויים הזכרים אחרי 211 שנה היה 22,300. כאשר פותרים את המשוואה

$$\sum_{k=0}^{100} n_k^{(211)} = 22,300$$

עבור b , מקבלים $b = .10858359$.

אבל המצב איננו כה פשוט. מהכתוב (במדבר ד' מ"ר-מ"ח) אנו לומדים שהיו 8,530 לויים בין הגילים 30 ו-50. אבל אם נשתמש בערך הנ"ל של b , נקבל

$$\sum_{k=30}^{49} n_k^{(211)} = 3,216$$

במלים אחרות: גידול אוכלוסיית הלויים במשך ה-211 שנה מראה על שיעור ילודה גבוה יחסית, בשעה שהאחוז הגבוה של לויים בין 30 ו-50 יכול להיווצר רק על ידי שיעור ילודה נמוך.

ובכן, המסקנה הבלתי נמנעת שיוצאת מהנתונים הדמוגרפיים היא ששיעור הילודה אצל הלויים היה גבוה יחסית במשך רוב התקופה של 211 שנה, ונמוך בעשרות השנים האחרונות. (יש להדגיש שמסקנה זו לא תלוייה בכלל בבעיית הבכורות.) עכשיו b יסמן את שיעור הילודה של הלויים במשך r השנים הראשונות, ו- c יסמן את שיעור הילודה במשך s השנים הנותרות, כאשר $r = 211 - s$. אזי יש לנו

$$n^{(211)} = M_c^s M_b^r n^{(0)}$$

ועבור ערך נתון של s , צריכים לפתור את שתי המשוואות

$$\sum_{k=0}^{100} n_k^{(211)} = 22,300, \quad \sum_{k=30}^{49} n_k^{(211)} = 8,580 \quad (6)$$

עבור r ו- c .

חישובים מראים שעל מנת שיהיה פתרון חיובי $\{b, c\}$ למשוואות (6), צריך להתקיים $19 \leq s \leq 40$. יתרה מזו, על מנת שיהיה גידול אוכלוסיה חיובי, צריך להתקיים $c > 1/32 = 0.03125$, וזה גורר $29 \leq s \leq 32$. לכן, סביד לקבוע $s = 30$, כך ש-

$$n^{(211)} = M_c^{30} M_b^{181} n^{(0)}$$

לפי זה, הפתרון למשוואות (6) הוא

$$b = .1238362, \quad c = .03500915 \quad (7)$$

שלושים הוא הערך האופטימלי עבור s , כי הוא נותן את הערך הגבוה ביותר של c , ולכן ההפרש הקטן ביותר בין b ו- c : זה נכון לא רק עבור תוחלת החיים $E = 50$, אלא גם

עבור הערכים האחרים של E.

ב. בני ישראל

כאשר ירדו יעקב ובניו למצרים, היו¹⁴ 63 זכרים מבני ישראל שלא היו לויים (חוץ מיעקב עצמו). הצעיר מבני יעקב, פרט לבנימין, היה יוסף, בן ה-39 שנה¹⁵, והבכור ראובן היה בערך¹⁶ בן 46. בנימין היה צעיר מיוסף ב-8 שנים¹⁷; כאשר נולד בנימין, ראובן היה בערך בן 15 וסביר להניח שנכדי יעקב התחילו להיוולד בערך באותו זמן. לסיכום, גילי עשרה בני יעקב, חוץ מלוי ובנימין, נעו בין 39 ל-46, וגילי שאר הזכרים שלא היו לויים, נעו בין 0 ל-31. יהי $\tilde{n}_k^{(0)}$ מספר הזכרים הלא-לויים בגיל k בזמן הירידה למצרים ($t=0$). בהתאם לסיכום הנ"ל אפשר לקבוע $\tilde{n}_k^{(0)}$ ככה:

$$\tilde{n}_k^{(0)} = \begin{cases} 2 & (0 \leq k \leq 20; k = 39, 40) \\ 1 & (21 \leq k \leq 31; 41 \leq k \leq 46) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

על פי העקרונות בפרק 2, סעיף א', אנחנו מכחינים בין 124 השנים הראשונות, ו-87 השנים הנשארות, כך ש-

$$\tilde{n}^{(211)} = M_d^{87} M_b^{124} \tilde{n}^{(0)}$$

באשר $b = 1238362$. הוא אותו פרמטר ילודה שהיה ללויים באותה תקופה (עיין (7)), ו- d, שיעור הילודה של בני ישראל ב-87 השנים האחרונות, צריך עדיין להקבע.

לפי המפקד היו 603,550 גברים מבני ישראל בין 20 ו 60 (עיין פרק 2 סעיף ד'), כלומר

$$\sum_{k=20}^{59} \tilde{n}_k^{(211)} = 603,550$$

כאשר פותרים את המשוואה הנ"ל עבור d, מקבלים $d = 1512684$. כדי להשלים את התמונה, נציג טבלה של b, c, ו-d עבור ארבעת הערכים של E:

E	b	c	d
40	.1499871	.03357849	.1746464
50	.1238362	.03500915	.1512684
60	.1130073	.13553880	.1419426
70	.1096910	.03406591	.1389216

4. הבכורות (במודל הראשוני)

א. בני ישראל

עכשיו אפשר לחשב את מספר הבכורות שנולדו בשנה אחרי יציאת מצרים, בין יציאת מצרים והמפקד. נזכיר שכל ישראלי, במשך תקופת הפריזון שלו בין 13 ו-45, הוליד d בנים זכרים לשנה. למען הפשטות, נפרש את d כהסתברות שיוליד לפחות בן זכר אחד בשנה הבאה.¹⁸ תהי g_k ההסתברות שאיש ישראל בגיל k בזמן יציאת מצרים יוליד את הבן הזכר הראשון שלו בשנה הבאה, כך שמספר הבנים הראשונים שנולדו באותה שנה הוא

$$\sum_{k=13}^{44} g_k \tilde{n}_k^{(210)} \quad (210)$$

ובכן, g_k היא המכפלה של $(1-d)^{k-13}$ (א) ההסתברות שלא יוליד בן

במשך $k-13$ השנים הראשונות של תקופת הפריזון שלו, ו- (ב) ההסתברות d שיוליד בן בשנה הבאה, כך ש- , $g_k = d(1-d)^{k-13}$, $(13 \leq k \leq 44)$.

שים לב שחצי הבנים הזכרים הראשונים לא היו בכורות, כי אחיות בכירות נולדו לפניהם, כך שמספר בכורות בני ישראל¹⁹ fb הוא

$$fb = \sum_{k=13}^{44} (1/2)d (1-d)^{k-13} \tilde{n}_k^{(210)} \quad (8)$$

נוסחה (8) נותנת את הערכים הבאים של fb , מספר בכורות בני ישראל שנולדו בשנה אחרי יציאת מצרים, עבור ארבעת הערכים של תוחלת החיים E :

E	fb
40	28,746
50	23,205
60	20,365
70	19,148

עכשיו אפשר לקבל הערכה גסה למספר בכורות בני ישראל מכל הגילים, לפי המודל הראשוני שלנו. למשל, לפי תוחלת חיים של 50 שנה, $\tilde{n}^{(211)} = 133,172$ בנים זכרים מבני ישראל נולדו בשנה אחרונה, והאוכלוסייה הכוללת של בני ישראל הזכרים בזמן המפקד היתה

$$\sum_{k=0}^{100} \tilde{n}_k^{(211)} = 2,269,520$$

אם נכפיל את הסכום הזה ב $-fb/\tilde{n}_0^{(211)}$, (יחס הבכורות לכל לידות הזכרים בשנה האחרונה), נקבל את ההערכה הגסה של 395,000 בכורות בני ישראל מכל הגילים.

יהי tfb מספר בכורות ישראל מכל הגילים (בזמן המפקד). להלן טבלה של ההערכות של tfb לפי תוחלת החיים E :

E	tfb
40	454,000
50	395,000
60	363,000
70	350,000

ב. הלוויים

אפשר לחשב את בכורות הלוויים בדרך דומה, אלא שצריכים לקחת בחשבון את הירידה בשיעור הילודה שלהם מ- b ל- c , שאירעה 29 שנה לפני יציאת מצרים. לאותם לויים שהיו בני 43 (44) שנה בזמן יציאת מצרים היה שיעור ילודה b במשך השנה הראשונה (שתי השנים הראשונות) של תקופת הפריין שלהם. בהתאם לכך, מספר הבכורות הלוויים lfb שנולדו בשנה האחרונה היה

$$lfb = (1/2)c \left(\sum_{k=13}^{42} (1-c)^{k-13} n_k^{(210)} + (1-c)^{29} (1-b) n_{43}^{(210)} + \right. \quad (9)$$

$$\left. + (1-c)^{29} (1-b)^2 n_{44}^{(210)} \right)$$

הנה הערכים של lfb :

E	lfb
40	145
50	142
60	135
70	124

על מנת להעריך את מספר הבכורות הלוויים מכל הגילים, צריכים להבחין בין הלוויים שהיו מתחת לגיל 30, לבין אלה שהיו מעל 30, בזמן המפקד. קודם כל, נקח את מספר הלוויים הזכרים עד גיל 30 ונכפיל ב- $-lfb/n_0^{(211)}$, יחס הבכורות לכל הזכרים שנולדו בשנה האחרונה, כדי לקבל הערכה של מספר הבכורות הלוויים מתחת גיל 30.

עבור הלוויים מעל גיל 30, נשתמש ביחס הבכורות לכל הזכרים שנולדו בשנה מ- $t = 180$

עד $t = 181$, השנה האחרונה של הילודה הגבוהה b . המכפלה של היחס הזה ומספר הלוויים מעל גיל 30 בזמן המפקד, תתן הערכה של בכורות הלוויים מגיל 30 ומעלה. לבסוף, כאשר נחבר את שתי ההערכות הנ"ל, נקבל הערכה גסה של t_{lfb} , מספר בכורות הלוויים מכל הגילים:

E	t_{lfb}
40	5,600
50	5,600
60	5,500
70	5,400

5. המודל המתוקן

בפרק 1 ראינו שיש רק שני פירושים אפשריים של מספר הבכורות הכתוב בספר במדבר: (א) הבכורות שנולדו בשנה אחרי יציאת מצרים או (ב) הבכורות מכל הגילים. תוצאות המודל הראשוני בפרק הקודם מראות שהאלטרנטיבה הראשונה היא הנכונה. ככל זאת, אותו מודל נתן פחות מחצי ממספר 300 בכורות הלוויים הגלום בדברי התורה. עכשיו נראה איך שאפשר לתקן את המודל כדי שיקח בחשבון גם את נתוני הבכורות.

קודם כל נעיר שתוחלת חיים של $E = 52.5637$ מוליכה ל 22,273 בכורות בני ישראל בריוק (שנולדו בשנה האחרונה), כמו שכתוב במדבר ג' מ"ג. (כמו שהזכרנו בפרק 2, סעיף ב', E לא משקפת תמותת תינוקות; זאת אומרת שתוחלת החיים האמיתית נמוכה בכמה שנים.) בהתאם לזה, אנחנו מאמצים את הערך $E = 52.5637$ (שגורר $\theta = 58.8476$, $\beta = 3.64410$) בהתפלגות Weibull (1). לפי כללי המודל הראשוני, זה נותן את הערכים הבאים של שיעורי ילודה: $b = .1199995$, $c = .03530421$, $d = .1479462$. זה מפרנס את בכורות בני ישראל, אבל נותן רק 141 בכורות לויים.

נזכיר שהמודל הראשוני הניח ששיעור הילודה של הלוויים היה קבוע במשך 30 השנים האחרונות. עכשיו, במודל המתוקן, אנחנו מרשים ללוויים שיעור ילודה אחר (קרי: יותר גבוה) בשנה אחרי יציאת מצרים.

יהיו b , c , e שיעור הילודה של הלוויים במשך 181 השנים הראשונות, 29 השנים הבאות, ובשנה האחרונה, בהתאמה, כך ש-

$$. n^{(211)} = M_c M_c^{29} M_b^{181} n^{(0)}$$

את הגורם "c" משמאל לסוגריים בנוסחה (9) צריכים להחליף ב-"e". כל השאר נשאר כלי שינוי. עכשיו צריכים לפתור משוואות (6) יחד עם המשוואה

$$\begin{aligned} (1/2)e \left(\sum_{k=13}^{42} (1-c)^k n_k^{(210)} + (1-c)^{29} (1-b) n_{43}^{(210)} + \right. \\ \left. + (1-c)^{29} (1-b)^2 n_{44}^{(210)} \right) = 300 \end{aligned}$$

עבור הנעלמים c, b, e. (המשוואה האחרונה הזאת אומרת ש-300 בכורות נולדו ללויים בשנה האחרונה) הפתרון הוא $b = .1199995$, $c = .03385920$, $e = .07560837$. שים לב ש-b נשאר כמו שהיה במודל הראשוני (עם $E = 52.5637$); הסיבה היא שהמשוואה הימנית ב-(6) תלוייה רק ב-b. לכן, מספר בכורות בני ישראל, שתלוי ב-b, נשאר כמו שהיה קודם, דהיינו 22.273

להלן טבלה של מספר בני ישראל, מחולק לפי גילים, על פי המודל המתוקן:

זכרים	נפשות (זכר ונקבה)	הגיל
1,589,110	3,178,220	0-19
603,550	1,207,100	20-59
12,360	24,720	60-
2,205,020	4,410,040	סך הכל

שים לב שיש 3,178,000 נפש מתחת לגיל 20, בערך פי חמשה ממספר הגברים בין 20 ל-60, דבר שעולה בקנה אחד עם תרגום יונתן (עייין למעלה, פרק 2, סעיף ה').

המספרים בטבלה אינם כוללים את הלויים. אם נוסיף את 44,600 נפשות הלויים, נקבל שכמעט ארבעה וחצי מיליון נפש יצאו מארץ מצרים.

הילודה של שבט לוי

השינויים שחלו בשיעור הילודה של הלויים בשלשים השנים האחרונות, ראויים לתשומת לב. בערך 29 שנה לפני יציאת מצרים נפל שיעור הילודה בצורה חדה מאד, ונשאר נמוך עד

יציאת מצרים, כאשר חזר ועלה בצורה חדה. בשורות הבאות יבוא הסבר אפשרי של התופעה הזאת.

אולי הדיכוי המצרי נגד עם ישראל נעשה קשה במיוחד ב 30 השנים האחרונות, והלויים (שהיו בעצמם פטורים מעבודת פרך²⁰) השתתפו בצער אחיהם המשועבדים ופרשו מנשיהם אחרי שהיו להם שני ילדים²¹. מצד שני, בני ישראל שהיו משועבדים המשיכו עם שיעור הילודה הגבוה שלהם, לקיים את מה שכתוב "וכאשר יענו אותו כן ירבה וכן יפרוץ" (שמות א' י"ב)²².

(בהקשר זה, אפשר לציין את הטעות החמורה שעשה שבט אפרים שלשים שנה לפני יציאת מצרים, לפי מסורת חז"ל²³. תחת השפעת מנהיגם יצאו ממצרים חמושים, ולכסוף נוצחו ונשחטו בגת (עיין דברי הימים א', ז', כ"כ"א). סביר להניח שכתגובה לתקרית כזאת, יתאכזרו המצרים נגד בני ישראל.)

אם נקבל את ההסבר הנ"ל על הירידה של שיעור הילודה של הלויים, אזי תהיה עלייתו בזמן יציאת מצרים מובנת מאליה. שהרי לפי המסורת שמסרו רבי אליעזר ורבי יהושע (ראש השנה י' ע"ב - י"א ע"א) נגמר השיעבוד באחד לתשרי, ששה וחצי חדשים לפני יציאת מצרים, וממילא הסתיים גם פרישות הלויים מנשיהם.

* * *

אני מודה לד"ר שמחה הורוביץ ופרופ. יונתן סתוי עבור רעיונותיהם שעזרו לי מאד. תודה גם לפרופ. קנת הוכברג, ד"ר זאב מיכלסון, פרופ. עלי מרצבך, ד"ר אורי צ'סקין וד"ר משה קופל שהעידו לי את הערותיהם. כל החישובים עבור המחקר הוה נעשו בעזרת חבילת התוכנה MATHEMATICA II במקינטוש של המחלקה למתמטיקה ולמדעי המחשב, אוניברסיטת בר-אילן.

הערות

1. בפרק 5 נראה שאפשר להסיק מהנתונים הדמוגרפיים בתורה שהאוכלוסיה שמתחת לגיל 20 היתה פי שניים וחצי מזו שמעל 20.
2. זה כולל המשפחות הצעירות הרבות שבהן היו הזורים נשואים רק שנים מעטות.
3. סדר עולם, פרק ג', והרבה מקומות במדרשים ובתלמוד.
4. פסיקתא דרב כהנא, פרשת חודש (דף נ' ע"א במהד' בנר); תנחומא בוא (דף כ"ג ע"ב במהד' בנר); שיר השירים רבה, פ' ב', פסוק כ"י הנה הסתו עבר". המקור שלהם הוא סדר עולם, פרק נ'. (הגירסא בכל כתבי היד של סדר עולם הוא "פ"י", כמו במדרשים. עיין ת"י. מיליקובסקי, סדר עולם, University Microfilms, '81, p.228).

5. רובן ככולן של פסירות תינוקות הן בחדש הראשון. האיל והתורה לא מונה אף אחד פחות מגיל חרש, הפישוט הגיל לא יגרם לשום סטייה משמעותית.
6. עיין למשל, R. C. Elandt-Johnson, N. L. Johnson, Survival models and data analysis, John Wiley and Sons, '80 p. 189.
7. בהקשר זה, אי אפשר להסיק מסקנה מהפסוק ימי שנותינו בהם שבעים שנה^א (תהלים צ'), כי יכול להיות שהכוונה היא שעבור אלה שלא נפטרו ממחלות בצעירותם, 70 היה אורך חיים נרמלי.
8. כאתם ימים נישא הנערות בגיל צעיר, ולכן מצדק 13 כגיל התחלה.
9. בפירושו על במדבר כ"ז, ס"ד.
10. עיין למשל תנחומא שלה י"ג (מהר"ב בובר דף ל"ה ע"ב-ל"ז ע"א), במדבר רבה ט"ז, כ"ג.
11. למשל, כאשר עוברים עם תוחלת חיים של 50 שנה, ההפרש בין מספר בכורות בני ישראל הנובע משתי התנחות האלה הוא רק 2%.
- 11א. מהדורות אפשטיין-מלמד, עמוד 7.
12. עבוד ביבליוגרפיה, עיין, J.H.Pollard, Mathematical models for the growth of human populations, Cambridge Univ. Press, '73 p. 37.
13. סדר עולם, פרק ב'.
14. בראשית מז, ח"כ"ו.
15. שם מ"א, מז: מ"ה, ו'.
16. עיין שם ל' כ"ה ר' ל"א, מ"א. בסדר עולם זוטא, פרק ד', נאמר במפורש שראובן היה בן 46.
17. סדר עולם, פרק ב'.
18. אליבא דאמת, d במודל שלנו מסמן את המספר המיוחל של בנים זכרים שיוליד בשנה הבאה, כאשר לוקחים בחשבון האפשרות של לידה מרובה ובה לפחות שני זכרים. אבל רק לידה אחת, מתוך 250, בערך, תהיה של תאומים זכרים. לכן, ההסתברות שיוליד לפחות בן אחד נמוכה מ-d ב" 0,4% בערך, וזה יהיה ארוח הסטייה במספר הבכורות שנגרם על ידי הפישוט שלנו.
19. לפי האמת, צריכים להקטין את המספר הזה במקצת על ידי ניכוי הבנים שגולחו אחרי הפלה של זכר, או אחרי זכר שנפטר כתינוק (עיין גם הערה 5).
20. עיין בקטע של פירוש הרמב"ן שהבאתי בפרק 2, סעיף א'. המקורות של הפסוק של שבט לוי הן תנחומא וארא ו' (דף י' ע"ב במהר"ב בובר), שמות רבה ה' ט"ו.
21. זה מוכיח את מסורת חז"ל (סוטה י"ב ע"א) ש-80 שנה לפני יציאת מצרים, עמרם הלוי, גדול הדור, נפטר מאשתו אחרי שגור פרעה על הזכרים, ואחרים הלכו בעקבותיו. המסורת ממשיכה שעמרם שוכנע להחזיר את אשתו, וכך עשו גם האחרים.
22. עיין בפירוש הרמב"ן שהבאתי בפרק 2 סעיף א'.
23. ריש מכילתא בשלח, מכילתא דרשב"י שם, סנהדרין צ"ב ע"ב, שיר השירים רבה ב' ו'. התאריך של 30 שנה לפני יציאת מצרים, עבור אסון שבט אפרים, נאמר במפורש בשמות רבה כ' י"א, תרגום יונתן על שמות י"ג י"ו, תרגום תהלים ע"ח ט', תרגום דברי הימים א' ו' כ"א, מדרש וישע (אוצר מדרשים עמוד 155).